

Klapmutsen in gevaar?

Impressie van het Hewet-experiment (VI)

J. de Lange Jzn
G.A. Vonk

OW & OC, R.U. Utrecht

Summary

The possible extinction of the Hooded Seal forms the context of an application of population projection matrices. The experiments, carried out under the Hewet-project, proved to be very successful. Part of this success seems due to the motivating context, part to the mathematical content, and last but not least, part of the use of computers.

A real life problem – the actual research was done by two dutch scientists – was transformed to a lower level without losing its character and scientific conclusions.

Het vermenigvuldigen van matrices is niet zo'n moeilijke zaak. Zeker niet voor leerlingen die straks Wiskunde A kiezen, als de voorstellen van de HEWET-werkgroep zullen worden aangenomen. Dat betekent niet dat we er zijn als leerlingen twee gegeven matrices met elkaar kunnen vermenigvuldigen. Het probleem zal juist zijn hoe je aan een matrix komt, en wat zo'n produkt betekent. Dat zal een zaak zijn waarop we de leerlingen zullen moeten voorbereiden. Immers, een bioloog, een geograaf, een scheikundige, een socioloog krijgt niet te maken met pasklare matrices, maar met vele gegevens, waar hij op listige wijze wat mee dient te doen. En soms, en steeds vaker, kan de wiskunde hem daarbij helpen.

Een stukje uit de Wiskrant van mei 1979. Een gematigd optimisme lijkt de auteur niet ontzegd te kunnen worden. Anderen zullen dat optimisme met lichtvaardigheid, of misschien zelfs lichtzinnigheid willen betiteln. Hoe het ook zij, er was niemand die op grond van *ervaringen* kon zeggen of het voorgestelde onderwijs: Lesliematrix, geschikt was voor A-leerlingen.

Dat is nu anders.

Op de twee proefscholen is het onderwerp Lesliematrix in de winter en het voorjaar '82 tamelijk uitgebreid ter sprake gekomen. Uitgebreid omdat er

ook geoefend is in het automatisch verwerken van gegevens.

De leerlingen waren al flink in de weer geweest met matrices. Gedeeltelijk is u daarvan al verslag gedaan in eerdere nummers van de Nieuwe Wiskrant. Pas in het laatste hoofdstukje van het boekje 'Matrices' komen de Lesliematrix aan bod. Voor diegenen die niet in het gelukkige bezit zijn van de oude 'Wiskrant' kan de volgende introductie uit de leerlingentekst mogelijk een geheel nieuwe wereld openen.

Een bepaalde keversoort levert – na geruime tijd van studie – de volgende bijzonderheden:

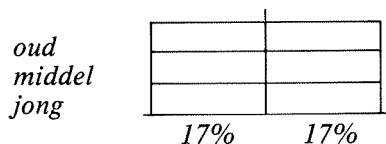
– (ongeveer) de helft van de geboren kevers overleven hun eerste levensjaar en leven dus nog in hun tweede jaar.

– een derde gedeelte daarvan maakt z'n tweede verjaardag mee.

– geen enkele kever wordt 3 jaar oud. Maar ze zitten dat laatste jaar (of gedeelte daarvan) niet stil; ieder der in leven zijnde kevers produceert (gemiddeld) zes nakomelingen.

We starten met een ideale bevolking van 3000 kevers: 1000 die hun eerste verjaardag nog moeten vieren; 1000 in de middelste leeftijdsgroep en 1000 in de oudste groep.

De bevolkingspiramide ziet er dus zo uit:



► 124. Bereken en teken de piramides van de bevolkingsopbouw na 1 jaar, 2 en 3 jaar. Kun je voorspellingen doen over nog later?

De meeste leerlingen lezen de tekst na het lezen van de vraag 124 nog eens goed door. Kun je werkelijk voorspellingen doen over bevolkingsopbouw voor de komende jaren? Aarzelend proberen ze aan de hand van de tekst de zaak wat verder te onderzoeken.

“Van die duizend jongens overleeft de helft. Dus dat worden vijfhonderd ‘middel’,

dus 1000
 1000 → 500
 1000

Een derde gedeelte daarvan maakt zijn tweede verjaardag mee. Dus van de middelste 1000 worden er maar 333 oud. Of 334. Of 333,3. Nee dat kan niet.

dus 1000 → 333
 1000 → 500
 1000

Die oudjes zitten het laatste jaar niet stil (gniffel). Ieder oudje produceert 6 jongen.”

dus 1000 → 333
 1000 → 500
 1000 → 6000

Een lichte verbazing is merkbaar dat het zó makkelijk is. Dat wil niet zeggen dat alle leerlingen er snel uitkomen. Maar door wat onderlinge hulpverlening komt de klas als geheel er goed uit.

De volgende jaren leveren:

1000 → 333 → 167
 1000 → 500 → 3000
 1000 → 6000 → 1998

De 1998 rechtsonder doet een enkeling de wenkbrauwen fronsen. Er wordt nog eens teruggekeken naar de 333. Sommigen veranderen daarop de 1998 in 2000. De anderen volgen na ‘O ja’ uitroepjes.

Even verder volgt:

► 126. Laat $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ en bereken $A \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$

De uitwerking:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 0 + 6000 \\ 500 + 0 + 0 \\ 0 + 333 + 0 \end{pmatrix}$$

Een verklaring waarom dit de nieuwe bevolkingsopbouw oplevert:

‘Nou de eerste regel met de kolom levert precies die 6000 jongens omdat die 6 met die 1000 oudjes wordt vermenigvuldigd. En de tweede regel met de kolom? Die $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigt je met die duizend jongens.

Dus krijg je die 500 middelsten.

Net zo met die laatste regel.’

Deze matrix is een Lesliematrix of zoals het leerboekje zegt:

De matrix A is een zogenaamde: POPULATIE-VOORSPELLINGS-MATRIX of: LESLIE-MATRIX; naar de Engelse zoöloog Leslie, die voor het eerst de matrices zo gebruikte (vlak na de Tweede Wereldoorlog).

Zo'n matrix bevat de volgende elementen:

- op de eerste rij : vruchtbaarheid van ieder der betreffende groepen.
- op de tweede rij : 1e kolom: kans om van eerste groep naar de tweede te komen (overlevingskans, promotiekans); alle andere elementen zijn nul.
- op de derde rij : 2e kolom: kans om van de tweede naar de derde groep te komen; alle andere elementen zijn nul.
- op de vierde rij : op analoge wijze verder.

Dus, in het algemeen:

$$A = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & \dots & \dots & \dots & v_{n-1} & v_n \\ p_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Dat de meeste leerlingen het echt een beetje snappen, blijkt uit de beantwoording van

► 128. Waarom is de laatste rij niet:

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 0 \quad p_n?$$

Bijna in koor (nou ja) wordt geroepen dat als je in de oudste groep zit je kans om nog ouder te worden nul is. Uiteraard had de leraar Kees Lagerwaard wel even klassikaal de definiërende tekst van de Lesliematrix besproken.

Zonder computer is het werken met Lesliematrices uitermate lastig, afgezien van zeer eenvoudige, niet levensechte voorbeelden zoals hierboven. Wat je wilt, kunt en moet doen is het oefenen in het opstellen van zo'n matrix.

We willen u twee voorbeelden niet onthouden.

Het eerste sluit redelijk aan bij het eerdere verhaal over de kevers.

Alleen wordt de informatie iets minder geordend

gebracht:

- 132. *We beschouwen een gemeenschap van 3000 individuen. Deze gemeenschap delen we in drie leeftijdsklassen in, ieder één jaar breed. We noemen die drie groepen: jongeren, volwassenen en ouderen.*

Bij aanvang van onze studie zijn deze groepen even groot. De vruchtbaarheid en overlevingskansen: 10 jongeren brengen gemiddeld 1 jong voort. 2 volwassenen ook. En er zijn wel 100 ouderen nodig om datzelfde resultaat te bereiken. Jongeren hebben 50% kans volwassenen te worden, volwassenen 25% kans om 'ouder' te worden.

Geef de bevolkingsopbouw voor de komende 4 jaren; teken de bijbehorende piramides en teken de grafiek waarin het verloop van ieder der drie bevolkingsgroepen te zien is. Welke conclusies zijn er te trekken?

Ook in deze opgave wordt weer gezocht naar de

- huidige opbouw van de bevolking;
- de kansen van de overleving van de huidige bevolkingsgroep naar de volgende;
- de reproductie van ieder der bevolkingsgroepen.

Bij deze opgave 132 zijn de gegevens nog vrij doorzichtig zoals ook bleek in de klas. Maar er is natuurlijk toch ook hierbij al duidelijk sprake van mathematiseren en modelvorming. Op een veel hoger niveau wordt dat bedreven bij de volgende opgave:

- 133. *Tenslotte een geval met authentieke cijfers: Het betreft hier een gedeelte van de Amerikaanse vrouwelijke bevolking. Men heeft vrouwen genomen omdat die 'reproduceren' en dus goed in een Lesliematrix passen. Bovendien kun je toch een redelijke schatting geven van de totale bevolking. De gegevens zijn:*

leeftijd:	aantal vr. in 1940	aantal dochters in periode 40-55	aantal vr. in 1955
0-14	14.459*	4.651	16.428
15-29	15.264	10.403	14.258
30-44	11.346	1.374	14.837

- Bepaal de v_i van de Lesliematrix L .
- Bepaal de p_i van de Lesliematrix L .
- Laat zien dat $L \cdot B$ (B = bevolking 1940) inderdaad de bevolking van 1955 oplevert.
- Bereken de bevolking van 1970 en 1985.

*) veertieneneenhalfmiljoen.

Bij het rondwandelen door de klas blijkt voor ons toch nu verrassend, een groot aantal leerlingen wel raad met de opgave te weten.

Niet dat de gevraagde Lesliematrix binnen enkele minuten op papier staat. Verre van dat. Daar is de opgave te complex voor.

Maar de opgave is nog enigszins gestructureerd in de vraagstelling:

- bereken de v_i .

Deze zijn tamelijk makkelijk uit de aangeboden gegevens te halen:

$$v_1 = \frac{4.651}{14.459}; v_2 = \frac{10.403}{15.264}; v_3 = \frac{1.374}{11.346}$$

Iets lastiger zijn de promotie- of overlevingskansen. Weliswaar wordt de link gelegd

van de 14.459 van 0-14 jaar oud
naar de 14.258 van 15-29 jaar oud,

vijftien jaar later, maar de intussen geproduceerde kinderen moeten toch ook ergens blijven. Langzaam, leerling voor leerling gaat een lichtje branden: die dochters zitten in de 0-14 jaar groep na 15 jaar. Dus daar heb je niets mee te maken.

$$\text{Dus } p_1 = \frac{14.258}{14.459}$$

Is deze hindernis met succes genomen, al of niet aan de hand van een medeleerling, dan levert p_2 weinig problemen.

Nu blijken er ook 'overtollige' gegevens te zijn. Immers de 16.428 vrouwen van 0-14 in 1955 heb je 'nergens voor gebruikt'.

Sterker nog: 'dat getal hadden we zelf wel kunnen invullen want dat is de som van de drie getallen in de middelste kolom.'

Dat zijn momenten die het leven, en in wat engere zin het experiment, zo mooi maken.

Een blikwisseling met de leraar leert dat die ook onder de indruk is van zijn leerlingen. Het ruimtelijk inzicht mag dan tot grote vertwijfeling aanleiding geven (zie artikel H. Verhage in het vorige nummer), de activiteiten bij Lesliematrices zorgen voor voldoende compensatie. Daarbij komt nog dat de docent nog enthousiaster over het onderwerp is dan de leerlingen, hetgeen een prima sfeertje in de klas tot gevolg heeft.

Natuurlijk is er ook stilgestaan bij de nadelen van de Lesliematrix. Het meest voor de hand liggende nadeel is natuurlijk dat de v_i en p_i door de jaren heen niet constant zijn. Maar dat feit deed nauwelijks afbreuk aan de verhelderende werking van matrices op deze manier.

Bovendien hadden de leerlingen zo langzamerhand het idee gekregen dat matrices welhaast 'overal' toegepast kunnen worden.

Inmiddels mocht verwacht worden dat nu de fase was aangebroken dat de leerlingen de matrices goed 'snapten', dat ze Lesliematrices konden interpreteren, dat ze er mee moesten kunnen werken. En uiteraard diende die verwerking automatisch plaats te hebben met de micro (in Zevenaar) of met schrapkaarten (Haarlem).

Juist toen de meest afschuwelijke en met bloedovergoten beelden uit Canada ons bereikten over het doodknuppelen van jonge zeehondjes werden de leerlingen in Haarlem vergast op de resultaten van een - Nederlands - onderzoek naar het al of niet uitsterven van de klapmuts-zeehond op Jan Mayen. Uit het onderzoek kwamen de cijfers voor natuurlijke overleving - d.w.z. zonder jacht - naar voren. We citeren:

Er zijn, uit vroegere onderzoekingen, overlevingskansen bekend. Deze percentages houden nog geen rekening met de jacht, maar uitsluitend met dood door ziekte en natuurlijke vijanden buiten de mens.

Voor puppies is dit 85% om de eenjarige leeftijd te halen, voor de overige is 89,4% de kans om een jaar ouder te worden. Voor de klasse 11 jaar-en-ouder geldt dat eveneens 89,4% in de klasse blijft. De hogere sterfte bij de puppies is voornamelijk te wijten aan darminfecties. Bovendien worden nogal wat puppies onder de voet gelopen door de mannen wanneer deze om de vrouwen vechten.

► 172. Met deze gegevens kan de Lesliematrix-zonder-jacht worden opgesteld, met uitzondering van de bovenste rij. Doe dit en let op de afwijking in de onderste rij van de matrix.

De reproductie in de verschillende leeftijdsklassen, dus de geboorten uit ouders van de verschillende leeftijden, is hieronder weergegeven in aantallen puppies per 1000 ouders.

klasse	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11+
% ₀	0	0	53	240	249	352	369	418	422	422	430	438

► 173. Maak de Lesliematrix compleet.

Dit levert als resultaat – daar bestaat éénstemmigheid over bij de leerlingen – de volgende matrix, hier als computer output weergegeven in figuur 1.

Op de volgende blz. ziet u dezelfde matrix zonder al die overbodige nullen.

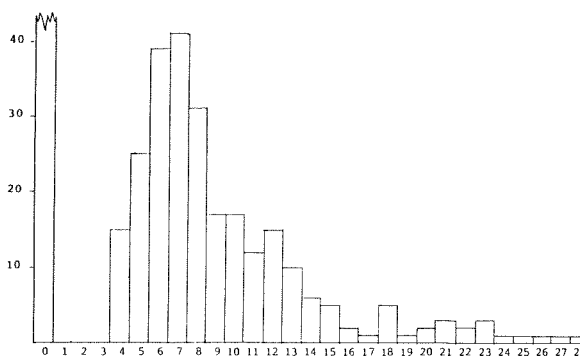
Hieruit blijkt dat het programma, dat schrapkaarten verwerkt, genoeg neemt met de bovenste en de onderste rij en de getallen ‘onder’ de hoofddiagonaal. Deze matrix heeft rechtsonder geen 0 omdat de laatste leeftijdsklasse die van 11 jaren en ouder is. De 0,894 geeft de kans aan om in deze klasse te blijven. Met deze matrix zijn er voorspellingen te doen over de opbouw in komende jaren. Daartoe moet echter nog één vraag worden beantwoord:

Hoe is de huidige bevolkingsopbouw?

Geen eenvoudige vraag. Zoals ook blijkt uit de tekst:

*De eenvoudigste oplossing, het enkele jaren achter-
een tellen van het totale aantal, is onuitvoerbaar. Ze*

zijn onvindbaar in diep water en fotograferen vanuit de lucht tijdens de korte werptijd is onmogelijk door de onbereikbaarheid van het gebied voor lichte vliegtuigen. De gegevens moeten worden ontleend aan onderzoeken van gemerkte dieren waarmee een sterftecijfer kan worden geschat, aan secties op geschoten wijfjes waaruit vruchtbaarheidscijfers kunnen worden afgeleid en tenslotte de leeftijdsverdeling bij gevangen dieren, te bepalen uit onderzoek van de gebitten. Wat dit laatste betreft, meldt een vangst van één schip in 1975 de verdeling zoals die in de onderstaande figuur is weergegeven.



Het aantal gevangen pasgeboren puppies wordt niet vermeld. Toch misschien wat schaamtegevoel?

► 171. Verklaar het ‘gat’ aan de linkerkant van het histogram.

Dat er in het histogram een ‘gat’ zit bij de 1 en 2 jarigen vindt zijn oorzaak in het feit dat deze niet gejaagd kunnen worden.

Pas vanaf de leeftijd van zo’n 4 jaar kunnen de klapmutsen paren en komen ze het ijs op zodat ze gevangen kunnen worden.

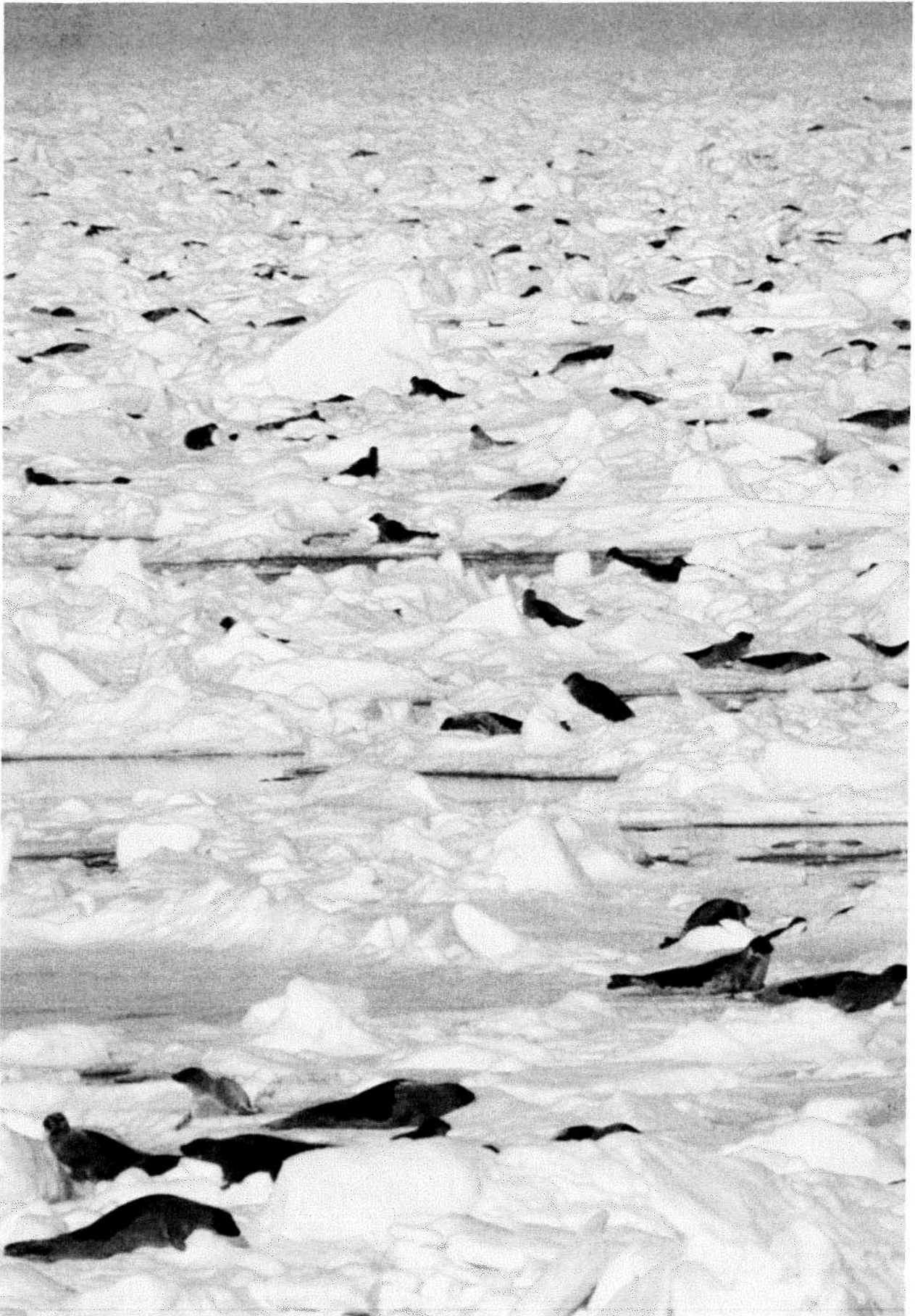
Dit staat hier nu voor u als informatie, maar in de leerlingentekst is dit een vraag waarbij het antwoord gevonden moet worden uit een vrij uitvoerige zoölogische beschrijving van de klapmuts. Veel van deze beschrijving is in dit verband overtoollig.

De meeste verslagen over dit thema van leerlingen uit Zevenaar melden over deze redundantie iets in de

0.000	0.000	0.053	0.240	0.249	0.352	0.369	0.418	0.422	0.422	0.430	0.438
0.850	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.894	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.894	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.894	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.894	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.894	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.894	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.894	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.894	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.894	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.894	0.894

figuur 1

Zonder jacht



Zadelrobben verzamelen zich om te paren op het pakijs. Uit de foto wordt duidelijk hoe kwetsbaar de dieren zijn als er op ze gejaagd wordt.

geest van (citaat) 'maakt het interessanter; je raakt er meer bij betrokken bij het onderwerp', maar anderen vonden het een 'te lang verhaal'.

Het computerprogramma is in staat de bevolkingsopbouw weer te geven over vele jaren, naar keuze in absolute aantallen en percentages.

De vraag hoeveel invloed de jacht op de klapmuts heeft op de totale populatie kan worden beantwoord volgens de volgende strategie.

1. Stel de Lesliematrix *zonder* jacht op.
2. Gebruik verwerking in percentages met een willekeurige aanvangspopulatie totdat stabiliteit optreedt.
3. Neem deze percentages vermenigvuldigd met bijvoorbeeld 100 als een reële kolonie klapmutsen.
4. Laat de computer met deze kolonie een aantal jaren doorrekenen in absolute aantallen.
5. Bepaal voor elk jaar het totale aantal klapmutsen en daaruit (rekenmachine) het percentage groei per jaar.
6. Doe hetzelfde met de Lesliematrix *met* jacht.
7. Vergelijk het resultaat met dat van 5.

Even voor de wiskundige lezer: experimenteel wordt achtereenvolgens de eigenvector vastgesteld met een reële positieve eigenwaarde.

De vector is gemakkelijk te herkennen door het normeren tot 100 als som van de kentallen. De eigenwaarde geeft de groei of afname van de kolonie aan.

Vanwege de 'dreigende' paasvakantie is in Haarlem de hier geschetste procedure enigszins bekort door de aanvangspopulatie zo goed mogelijk in verhouding te nemen, geschat uit het histogram van gevangen dieren. Ook tussenliggende vragen zijn overgeslagen, zoals de opdracht te onderzoeken of bij een willekeurige aanvangspopulatie er ook de eerste jaren sprake was van een constante groei.

De leerlingen kwamen tot deze aanvangspopulatie:



We kijken eerst naar wat resultaten waaruit, om ruimte te winnen, de bijbehorende histogrammen zijn weggelaten.

In percentages zonder jacht

```

15 13 12 11 9 7 6 5 4 3 3 12 *afdrukken kolommatrix *
* volgende kolommatrix berekenen *
20 12 11 10 9 7 6 5 4 3 2 12 *afdrukken kolommatrix *
* volgende kolommatrix berekenen *
19 15 9 9 8 7 3 3 12 *afdrukken kolommatrix *
* volgende kolommatrix berekenen *
15 13 12 *afdrukken kolommatrix *
* volgende kolommatrix berekenen *
19 10 8 7 5 4 4 3 3 *afdrukken kolommatrix *
* volgende kolommatrix berekenen *
19 14 12 10 8 7 5 4 4 3 3 11 *afdrukken kolommatrix *
* volgende kolommatrix berekenen *
19 14 12 10 8 7 5 4 4 3 3 11 *afdrukken kolommatrix *
* volgende kolommatrix berekenen *
19 14 12 10 8 7 5 4 4 3 2 12 *afdrukken kolommatrix *
* volgende kolommatrix berekenen *
19 14 12 10 8 7 5 4 4 3 2 12 *afdrukken kolommatrix *
* klaar *
  
```

Na 15 jaar blijkt de situatie in percentages stabiel. Sommige leerlingen in Zevenaar aarzelden wel na het zien van de opbouw na het 13de en 14de jaar. Bij navraag over de oorzaak van het verschijnsel dat de opbouw twee jaar stabiel lijkt en daarna toch weer verandert, kwam men met enig schouderophalen wel op 'iets met afronden'.

In absolute aantallen, zonder jacht, stabiele opbouw

```

R E S U L T A A T
* waargenomen gegevens *
12
0 0 0.053 0.240 0.249 0.352 0.369 0.418 0.422 0.422 0.430 0.438
0.850
0.894
0.894
0.894
0.894
0.894
0.894
0.894
0.894
0.894
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.894 0.894
1900 1400 1200 1000 800 700 500 400 400 300 200 1200
  
```

```

* afdrukken kolommatrix *
1900 1400 1200 1000 800 700 500 400 400 300 200 1200
totaal: 10000
* volgende kolommatrix berekenen *
* afdrukken kolommatrix *
2008 1615 1252 1073 894 715 626 447 358 358 268 1252
totaal: 10864
* volgende kolommatrix berekenen *
* afdrukken kolommatrix *
2181 1707 1444 1119 959 799 639 559 400 320 320 1359
totaal: 11806
* volgende kolommatrix berekenen *
* afdrukken kolommatrix *
2371 1854 1526 1291 1000 857 715 572 500 357 286 1500
totaal: 12829
* volgende kolommatrix berekenen *
* afdrukken kolommatrix *
2586 2015 1658 1364 1154 894 767 639 511 447 319 1597
totaal: 13951
* volgende kolommatrix berekenen *
* afdrukken kolommatrix *
2808 2198 1802 1482 1219 957 821 691 571 457 400 1713
totaal: 15167
  
```

De groei blijkt iets boven 87% te liggen, behalve in het eerste jaar. De navraag naar de oorzaak kreeg geen antwoord. Weer schouderophalen. Geen van de waarnemers is er verder op door gegaan. Jammer, want waarschijnlijk is deze houding bij velen gegrond op het gezonde standpunt dat zulke kleine verschillen in het niet vallen bij de mogelijke fout veroorzaakt door onnauwkeurigheden in de ingevoerde gegevens. Ook de aandacht gevestigd op de klasse van 8-jarigen deed geen licht opgaan.

Waarom we eerst een (bijna) stabiele opbouw willen hebben om daarna de groei te meten is de leerlingen ook niet zo duidelijk. Zeker niet als je toch een computer hebt. Die laat je maar decennia van de bevolking doorrekenen en dan is het eind vast wel stabiel en kun je aan de laatste twee totalen wel de groei meten.

Zevenaarste leerlingen hadden dit gevoel minder omdat hun programma minder gedienschtig was. De totale bevolking werd niet opgegeven. Het eigenhandig optellen van klasseaantallen was bewerkelijk genoeg om leerlingen zeker van een stabiele toestand te willen laten zijn. Bovendien hadden zij de ervaring dat met een willekeurige bevolkingsopbouw er geen peil op te trekken is.

Een leerling in Haarlem dacht even de jaarlijkse groei te kunnen middelen door de groei over 15 jaar te delen door 15.

Een kans voor een aardig lesje wiskunde dat we hebben moeten laten schieten. De leerling nam helaas genoegen met een verklaring aan de hand van getalresultaten.

Daarna de situatie met jacht:

We hebben nu het totale aantal onderzocht als geen jacht gemaakt wordt op de klapmutsen en er voldoende voedsel en ruimte aanwezig is.

Nu de gevolgen van de jacht.

Geschat wordt dat van alle dieren van 4 jaar en ouder 8,3% wordt afgeschoten, zodat de overlevingskans daalt tot 81,1%. We houden dit percentage ook aan voor de hoogste klasse.

Van de pasgeboren puppies wordt helaas aanzienlijk meer gevangen, naar schatting 28,6%. Dit

betekent dat de reproductie van alle leeftijdsklassen met dit percentage verminderd moet worden. (Aftrekking).

Het opstellen van deze met-jacht-matrix leverde enkele opmerkelijke zaken.

In de eerste plaats was snel duidelijk dat op de 'diagonaal' de 0,894 vervangen moesten worden door 0,811 vanaf de leeftijd van 4 jaar.

Dit nu had enig protest in de klas tot gevolg. 'Weliswaar' redeneerde men 'lijkt uit het histogram te volgen dat er pas op 4 jarigen en ouder wordt gejaagd, maar volgens mij ook op 3 jarigen'.

Bijval van de klas.

Verbazing bij de leraar en de Hewet-begeleiders.

Wat nu, hoe komt zij daar nu bij?

De betreffende leerlingen lieten ons niet lang in het ongewisse:

'Uit de matrix, bovenste rij, blijkt duidelijk dat driejarigen ook al flink reproduceren, dus het ijs op moeten, dus gejaagd kunnen worden.'

Weer zo'n prachtig moment. Er lijkt ook geen speld tussen te krijgen. Kees Lagerwaard verandert op bord ook p_3 in 0,811.

De correctie blijkt achteraf juist en niet de fout van de biologen maar van de schrijver van het pakketje.

Maar de leerlingen hebben nog meer verrassingen in petto. Zo wordt in het onderzoeksrapport en dus ook in de leerlingentekst alle reproductiegetallen met 28,6% verminderd. De gevangen puppies worden als niet geboren beschouwd, zoals ook de leerlingen begrijpen. Maar enkele vinden dat niet zo'n mooie oplossing en willen liever de overlevingskans p_0 van de puppies met 28,6% verminderen.

De gezochte eigenwaarde verandert hierdoor niet, zoals we later ook nog experimenteel hebben vastgesteld. In de bevolkingspiramide worden uiteraard alle geborenen als nuljarigen geregistreerd, hetgeen een gunstiger maar minder juist beeld geeft.

Kortom uit de diverse reacties blijkt duidelijk dat het begrip Lesliematrix heel goed leeft bij de leerlingen. Besloten wordt om toch maar de reproductie te verminderen.

De matrix met jacht wordt dan:

0.000	0.000	0.038	0.171	0.178	0.251	0.263	0.298	0.301	0.301	0.307	0.313
0.850	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.894	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.894	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.811	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200
0.000	0.000	0.000	0.000	0.811	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.811	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.811	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.811	0.000	0.000	0.000	0.200
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.811	0.000	0.000	0.200
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.811	0.000	0.200
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.811	0.200

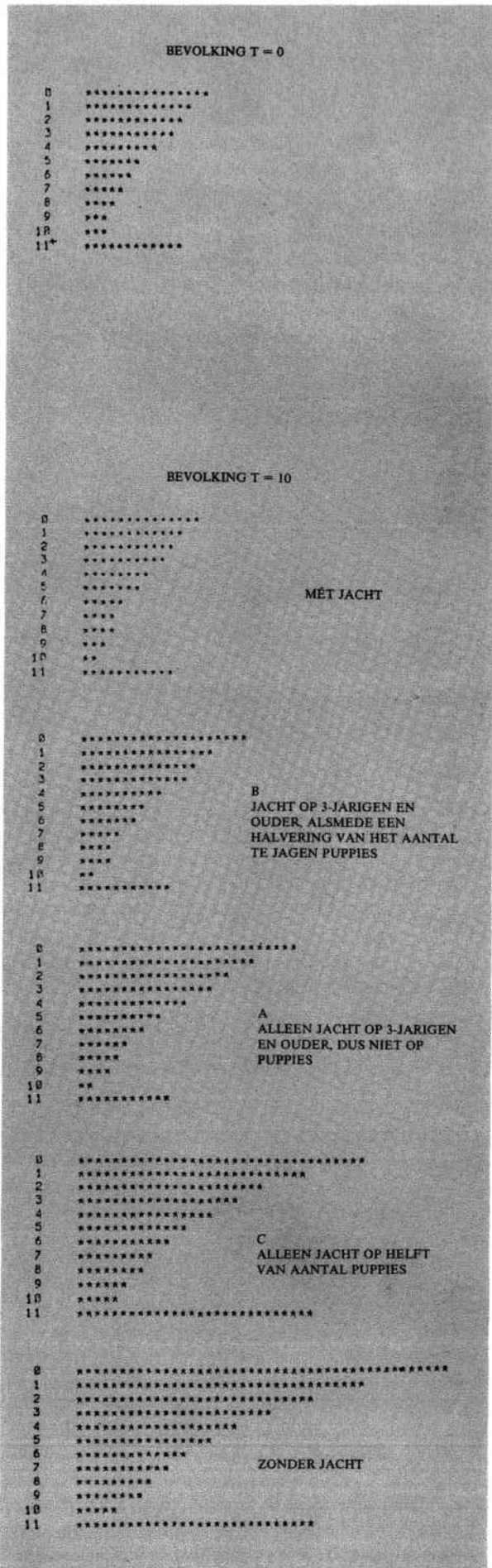
De output ziet er als volgt uit:

```

* afdrukken kolommatrix *
1500 1300 1200 1100 900 700 600 500 400 300 300 1200
totaal: 10000
* volgende kolommatrix berekenen *
* afdrukken kolommatrix *
1555 1275 1162 1073 892 730 568 487 406 324 243 1217
totaal: 9931
* volgende kolommatrix berekenen *
* afdrukken kolommatrix *
1539 1322 1140 1039 870 723 592 460 395 329 263 1184
totaal: 9856
* volgende kolommatrix berekenen *
* afdrukken kolommatrix *
1519 1308 1181 1019 843 706 587 480 373 320 267 1174
totaal: 9777
* volgende kolommatrix berekenen *
* afdrukken kolommatrix *
1502 1292 1170 1056 826 683 572 476 389 303 260 1168
totaal: 9696
* volgende kolommatrix berekenen *
* afdrukken kolommatrix *
1490 1276 1155 1046 857 716 606 506 416 326 246 1158
totaal: 9616

```

Dat aparte blad ziet er zó uit:



Duidelijk is dat de populatie langzaam maar zeker ten dode is opgeschreven als de huidige jacht doorgaat. Hoe het zit met andere mogelijkheden is onderzocht op het proefwerk dat in Haarlem over dit onderwerp is gehouden. Van te voren werd deze derde vraag als moeilijk door de ontwerper ingeschat maar de resultaten waren zéér hoopgevend.

Misschien wilt U zelf uw krachten erop proberen:

3. *Het kan je bekend zijn dat twee Nederlanders in 1975 een onderzoek hebben gedaan naar het bevolkingsverloop van klapmutsen op het Jan Mayen-eiland. Aan de hand van hun onderzoeksgegevens kwamen we tot de volgende Leslie-matrix als er geen jacht plaats zou vinden: (Zie eerder in dit artikel)*

In de praktijk blijkt er echter flink te worden gejaagd: van alle dieren van 3 jaar en ouder wordt 8,3% afgeschoten en van de pasgeboren puppies zo'n 28,6%, zodat de reproductie van alle leeftijdsklassen met dit percentage vermindert moet worden. We kregen toen:

(zie eerder in dit artikel)

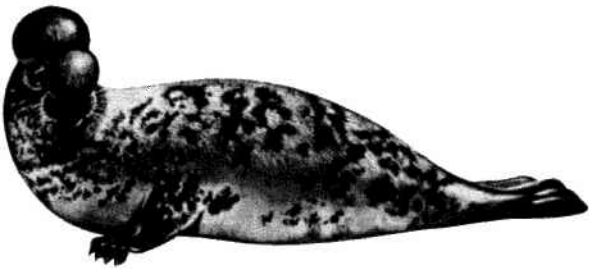
We hebben nu van twee situaties de Leslie-matrix: zonder jacht en met jacht. Het is echter uitgesloten dat er helemaal niet gejaagd kan worden, want de lokale bevolking ziet z'n boterham ook graag belegd. Vandaar dat enige tussenoplossingen zijn bestudeerd:

- A – géén jacht op puppies, wèl op ouderen (vanaf 3 jaar).
- B – de jacht op puppies wordt gehalveerd, op ouderen ongewijzigd jagen.
- C – de jacht op puppies wordt gehalveerd, op ouderen wordt niet gejaagd.

Van deze situaties worden Leslie-matrices gemaakt, in de computer gevoerd en bekeken wat de gevolgen zijn na tien jaar. Op een apart blad zie je de gevolgen.

Bovenaan op dat blad zie je de huidige situatie (bevolking) op $T=0$ als histogram. Daaronder zie je de toestand na 10 jaar in vijf verschillende gevallen. Bekijk die vijf gevallen goed.

- Waarom staat er rechtsonder in de Lesliematrix géén nul?
- Probeer aan de hand van de twee gegeven matrices de matrix op te stellen voor geval A en geval B.
- Alle vijf grafieken op $T=10$ lijken veel op elkaar; al neemt de grootte van de totale populatie van boven naar beneden toe. Toch is er een opvallend verschil tussen de grafieken van A en C. Wat is dat verschil en tracht dit verschil te verklaren.



De kant van de matrices

De resultaten van dit proefwerk als geheel, en van deze vraag in het bijzonder, waren op z'n minst zeer bemoedigend. Ook reageerden de leerlingen positief op zo'n toch wel iets afwijkend proefwerk.

Terugkijkend naar de kant van de matrices kan de conclusie op dit moment nauwelijks anders dan positief luiden. Het onderwerp Lesliematrices lijkt heel geschikt voor een behandeling op VWO-niveau en in het bijzonder binnen de A-wiskunde, ook al zijn er geluiden die erop wijzen dat ook B-leerlingen dit soort toepassingen zeer weten te waarderen.

Wat betreft het onderwerp "Matrices" als geheel: Er zijn tot nu toe reeds enkele artikelen aan dit onderwerp gewijd. Het betrof hier steeds enkele deelonderwerpen. In het volgende nummer van de Nieuwe Wiskrant zal uitgebreid aandacht worden besteed aan de grote lijn van het onderwerp zoals dat vorm heeft gekregen in het boekje "Matrices" zoals dat dit jaar op de twee scholen gebruikt wordt. Tevens zal met dat nummer gratis het betreffende boekje worden meegestuurd. Reden voor uw collega's om snel nog even abonnee te worden?

De kant van de automatische gegevensverwerking

De school in Zevenaar beschikte bij dit onderwijs over negen microcomputers, Haarlem gebruikte centrale verwerking door het OC. Dit gaf aanleiding tot wat verschillen in de programma's.

De beeldschermen van de microcomputers nodigden uit tot het weergeven van histogrammen. De geleidelijke verandering van de bevolkingsopbouw veroorzaakt geleidelijke groei of afname van de staven.

Een mooi gezicht. Voor kwalitatieve beschouwingen, zoals in het weergegeven proefwerk, is dit voldoende. Toch is er ook behoefte aan cijfermateriaal. Het weergeven daarvan op hetzelfde scherm bleek aanleiding te zijn tot moeilijkheden. Bij de orde 12 bleken de getallen het histogram te overschrijden en soms ook omgekeerd. Leerlingen blijken mede hierdoor snel afgeleid.

In Haarlem geen 'bewegend' histogram maar een per jaar herhalende afbeelding.

De resultaten op papier geven altijd een periode van 15 jaar weer. Bij deze leerstof en een redelijke keuze van de beginpopulatie treedt in deze tijd wel stabiliteit op. Toch zou men een meer flexibel programma kunnen wensen.

In Zevenaar kon men zolang met de simulatie doorgaan als men wenste. De programma's zijn in verschillende talen geschreven met overigens een grote overeenkomst in opbouw en taalgebruik.

Micro's zijn de grote mode en het geldt tenminste als ouderwets om bedenkingen te hebben. Toch is het opgevallen dat het gebruik van micro's, althans in de Zevenaar-opstelling, bijzondere eisen stelt.

Er werden tegelijkertijd twee leslokalen gebruikt, één met apparatuur, de andere voor contact met de leraar, uitwerken op papier, e.d. De gegevens moesten van het scherm worden overgeschreven.

De apparatuur leidt nogal af van de wiskundige denkwereld in het onderwerp, hoewel mogelijk verbetering optreedt bij meer apparatuurervaring. Tenslotte, het laden van het programma op dit aantal micro's met behulp van cassettebandjes is een crime. Schrapfouten blijven een probleem bij centrale verwerking, maar het programma levert altijd wel een resultaat door bij ontbrekende gegevens aan te vullen. Dit maakt de fouten juist uiterst leerzaam. Verder zal de tijd die de postverzending vergt het noodzakelijk maken dat deze leerstof wordt afgewisseld met een ander onderwerp.

De leerlingen krijgen de programmatekst niet onder ogen. Wel wordt gevraagd de structuur van het programma in grote lijnen op te sporen. Dit wordt mogelijk gemaakt doordat de hoofddelen van het programma zich melden; zie de mededelingen tussen sterretjes. Dit programma is wel wat simpel van structuur om tot meldenswaardige leeractiviteiten te komen.

Begrippen als gegevens, informatie, redundantie en verwerking komen bij dit onderwerp ter sprake, zoals ook bij eerdere onderwerpen van automatische gegevensverwerking. Begripsvorming die tot stand komt uitdrukkelijk op grond van eigen ervaringen van de leerlingen.

We dwalen nu wel erg af van het onderwerp 'matrices'; reden om ons artikel hier te eindigen.