De kortste weg

H. Freudenthal

OW & OC, R.U. Utrecht

Summary

The shortest path. A well-known problem. Find the shortest path from A to B via the line l.
A simple problem if you know the tricks, and a very difficult one if you don't. Therefore unsuited as a test item.
A similar problem: a snail sits on a wall of a room and wants to travel to a point on another wall. A network of the room solves the problem.

"Kortste wegen" is een voorbeeld hoe je differentiaalrekening toepast, maar die zal er hier niet bij worden betrokken. Ik denk veeleer aan zo'n probleem als: de kortste weg van A naar B waarbij de lijn *l* wordt aangedaan. Als je de truc kent is het een probleem van niets en als dit niet het geval is, kun je je er suf over piekeren.

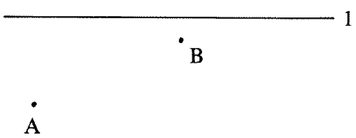

fig. 1

Het is een mooi voorbeeld van iets dat *niet* geschikt is als toetsitem, tenzij je precies op de hoogte bent van de voorkennis die de te toetsende geacht kan worden te bezitten. Desniettemin vond ik zoiets in een Amerikaanse toetsverzameling als voorbeeld met een hoge "taxonomische" waarde.
De oplossing zal u welbekend zijn: je verbindt A niet met B maar met zijn spiegelbeeld B′ t.a.v. de lijn *l*. De kortste weg is dan de rechte, AB′, die *l* ergens in C snijdt, en de gebroken lijn ACB is de gevraagde oplossing. Het is trouwens ook de weg van teruggekaatst licht of een teruggekaatste bal, waarbij dan ook "invalshoek = uitvalshoek" is. Gebruikelijke complicaties van dit probleem zijn ook bekend: de kortste weg van A naar B waarbij drie "banden" moeten worden geraakt. Om zo iets op te lossen moet je herhaaldelijk spiegelen, in banden en spiegelbeelden van banden en tenslotte alles op het oorspronkelijke "biljart" terugbrengen – ik laat het aan de lezer over de vereiste stippellijnen enz. in te vullen.

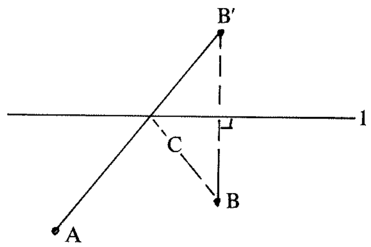

fig. 2

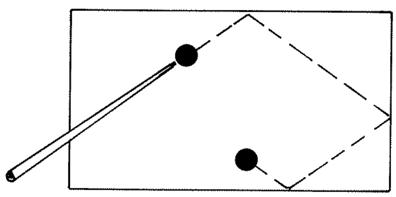

fig. 3

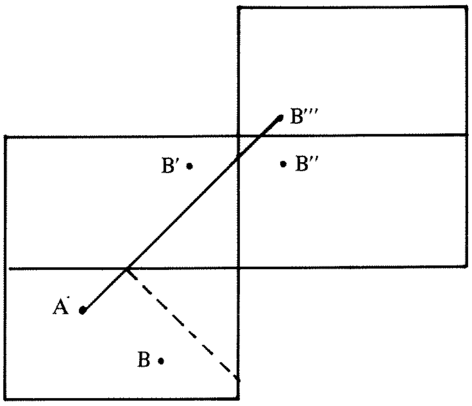

fig. 4

Laatst kwam ik dit soort vraagstukken weer eens in een ontwerp van meetkunde-onderwijs tegen en wel als toepassing van een reeks lessen over translaties, spiegelingen, draaiingen enz. – uiteraard een redelijke context. Als toepassing. Maar wat betekent het woord toepassing hier? Hoe moet ik me een les voorstellen waarin ons eerste vraagstuk wordt opgegeven nadat de leerlingen met diverse meetkundige afbeeldingen kennis hebben gemaakt? Ik heb zo'n les in mijn verbeelding trachten te reconstrueren. Ik heb mijn best gedaan, maar als iemand iets beters weet, mag hij het zeggen.
Leraar: Hoe kom je op de kortste weg van A naar B terwijl je onderweg lijn *l* moet aandoen?
Leerlingen tekenen, passen en meten, proberen van alles.
Leraar: Denk er eens over waar we het in de voor vorige les over hebben gehad.
Leerlingen: Draaiingen... hoeken... vectoren...
Leraar: Neen, dat was de vorige les. Ik bedoelde daarvoor.
Leerlingen: Vectoren, rechte hoeken, lijnstukken,...
Leraar schudt aldoor maar van néén.
Leerlingen: Afstanden, spiegelingen, ruiten...
Leraar: Juist! Spiegelingen. Denk eens of je iets met spiegelingen kunt doen.
Leerling 1: B in A spiegelen.
Leraar: Zo iets noem je een....
Leerling 2: Puntspiegeling.
Leraar: En dat komt neer op... (zwijgen)... een draaiing over...
Leerling 3: 180°
Leraar: Juist. Dat was dus een puntspiegeling. En dan zijn er ook nog van die....
Leerlingen: Lijnspiegelingen.
Leraar: Juist. Zou je daar nu iets aan hebben?
Leerling 4: Als je de middelloodlijn van AB tekent is B het spiegelbeeld van A.
Leraar: Goed. Maar moet je er echt een nieuwe lijn bij halen? Heb je er niet al eens een?
Leerlingen: De lijn *l*.
Leraar: En wat zou je nu doen?
Leerlingen: A en B in *l* spiegelen.
Leraar: Juist, en hoe zouden we de spiegelbeelden wel noemen?
Leerlingen maken verschillende voorstellen.
Leraar: Laten we zeggen A' en B'. En hoe vinden we nu de kortste weg van A naar B die *l* raakt?
Leerlingen zwijgen.
Leraar: Laat ik even Jan's tekening op de overheadprojector overdoen. Jan had C aangenomen in het midden van de voetpunten van de loodlijnen van A en B op *l*. Ik ga Jan's figuur nu in *l* spiegelen. Zou Jan's weg ACB nu wel de kortste zijn?

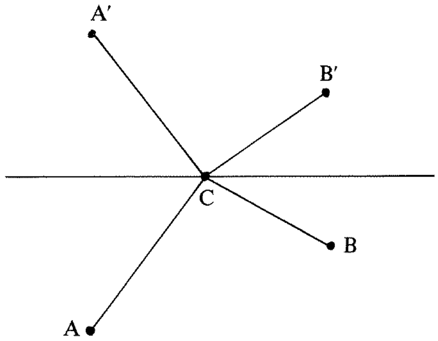

fig. 5

Leerling 5: Die C moet meer naar rechts.
Leraar: Juist. En hoeveel?
Leerling 6: ACB' moet een rechte lijn worden.
Leraar: Juist, en waarom?
Leerling 6: Ik voel het zo aan.
Leraar: Een juist gevoel.
Leerling 7: De rechte lijn is de kortste.
Leraar: Uitstekend. Daar zit de kneep in. De kortste tussen...
Leerling 8: A en B'.
Leraar: En wat moeten we eigenlijk hebben?... De kortste die *l* aandoet tussen...
Leerling 8: A en B.
Leraar: En klopt dat nu?
Leerling 8: Ja want BC = B'C.
Leraar: We zijn er nu. Maar we hadden het met wat minder werk kunnen doen.
Leerling 9: Alleen B spiegelen en dan AB' trekken.
Leraar: Goed. En nu geef ik jullie een moeilijker vraagstuk...

Het klinkt tot nu toe erg negatief. Maar dat moest als voorbereiding op iets meer positiefs. Laten we de spiegelingen eventjes buiten schot. Laten we met een ander probleem beginnen, dat u zeker ook welbekend is: Een slak zit op een zeker punt van een muur van een kamer en wil naar een bepaald punt op de tegenovergestelde muur kruipen. Hoe loopt de kortste weg?
Laat ik het probleem eerst vereenvoudigen. Je hebt twee vlakstukken die langs een lijnstuk samenhangen en je moet langs dit geval op de kortste weg van A naar B. Als die vlakstukken van stevig karton zijn kun je je eerst met een gespannen touwtje van A naar B van

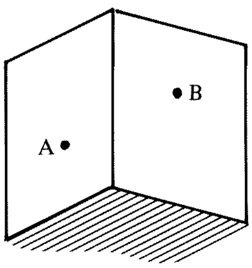

fig. 6

overtuigen dat er een (en ook slechts één) kortste weg bestaat.

Laat nu even het geval zo ingericht zijn dat je de twee vlakstukken om het gemeenschappelijke lijnstuk kunt draaien. Bijvoorbeeld een vel stevig papier dat je met een vouw (liefst er schuin doorheen) in de situatie hebt gebracht van twee vlakstukken die elkaar langs de vouw snijden. Er zijn twee uitersten van hoe de vlakstukken tegen elkaar positie kunnen kiezen: een hoek van 180°, dus het vel uitgespreid in een vlak, òf een hoek van 0°, dus dubbelgevouwen. En laten we dit even tussen haakjes opmerken: Als je het dubbelgevouwen vel openslaat tot het weer vlak is, voltrek je een draaiing over 180°, waarbij elk punt van het ene deel overgaat in zijn spiegelbeeld t.a.v. de vouwlijn.

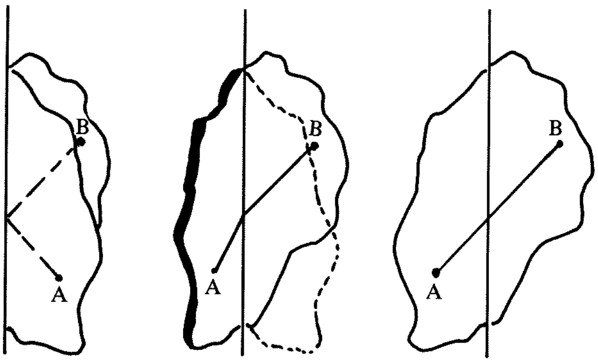

fig. 7

Ik zei "tussen haakjes" want in feite spreekt de situatie zodanig voor zichzelf dat je er niets bij hoeft op te merken. Ik zie dus de volgende didaktische sequentie: Je begint met het middelste geval: de kortste weg van A naar B langs het paar vlakstukken die in *l* aan elkaar vastzitten. Dat lost zich als het ware vanzelf op door die vouw in een vlak glad te strijken. En nu krijg je cadeau door het geval dubbel te vouwen: de kortste weg van A naar B met aanraking van *l*. De essentie ervan is dat je de vlakke lijnspiegeling ziet in de ruimtelijke context van de draaiing om de lijn met al zijn tussenstadia.

Het probleem van de slak die naar een andere muur moet, is navenant: je vormt een netwerk van de kamer – muren, vloer, plafond – een geschikt netwerk naar gelang de situatie. Ik ga er niet nader op in om ondertussen nog eens het biljartprobleem in een grotere context te plaatsen.

Vat de biljartrechthoek op als een tweedimensionale kamer met spiegelwanden. Wat je ziet als je erin zit kun je schematisch als volgt voorstellen:

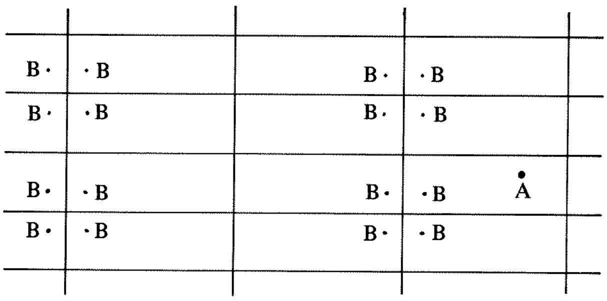

fig. 8

De echte kamer waar A in zit en B met al zijn talloze spiegelbeelden ziet, in talloze richtingen. (1) Om die richtingen te vinden, trek je de verbindingslijnen naar al die representanten van B en brengt die telkens weer terug in je besloten kamer. Probeer het zelf eens; ik wil deze tekening niet te zeer overladen.

Kortste wegen (of geodeten) op een *krom* oppervlak is een ander chapiter.

Daarover een volgende keer.

(1) Van Escher is er zo iets, naar ik meen, in drie dimensies.