Ongelijknamige breuken aftrekken met een slakkengang (1)

L. Streefland
OW & OC, RU Utrecht

Summary

This contribution summarizes some research at the level of classroom-practice.
The main purpose was to create a partial course in fractions, aimed at a process of gradual algorithmization in which the pupils could acquire a general procedure for the subtraction (and later on addition) of fractions with different denominators, without being forced into stages.
The comparison of two situations within which two related magnitudes are involved, plays a main part in the didactical approach. For instance the comparison of the distance-time relation of two snails being mixed up in a speed competition.

Inleiding

Het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken zijn zonder twijfel hoofdbrekende bewerkingen voor veel kinderen. Dit komt, omdat zij op het schoolse, algoritmische africhten voor deze taken niet berekend zijn.
De sterk analytisch – en dus op algoritmen – ingestelde leerlingen zijn dit wellicht wèl, maar over deze groep hebben we het nu niet. Al die andere kinderen vragen om een tot de rand gevulde, misschien zelfs overstromende, bron van inzichtelijkheid (1), waaruit zo lang mogelijk geput kan worden.
Veelal gaat het bijgebrachte inzicht – als dit er al is – weer ras teloor, doordat men in het onderwijs in te snel tempo aanstuurt op de algoritmen, daarmee de eerder uitgelokte noties weer verstikkend.
In deze bijdrage wordt globaal een deelleergang voor het aftrekken van ongelijknamige breuken geschetst, waarin een methode van probleem-oplossen op den duur kan "stollen" tot een algoritme.
De verstarring van de procedure tot algoritme wordt (bewust) uitgesteld ten gunste van het vasthouden van reeds verworven inzichten in breuken (en verhoudingen).
Omdat verschilbepaling zich als vanzelf aandient als het wiskundige hoogtepunt van een lijn, waarin situaties met elkaar worden vergeleken en vervolgens geordend met toenemende precisie, valt op het aftrekken de nadruk.
Is de gevolgde methode eenmaal losgemaakt van de problemen waaraan ze ontwikkeld en voltrokken werd, dan is vanzelf ook de algoritme voor het optellen van ongelijknamige breuken voorhanden.
Het behoeft geen betoog meer dat met deze bijdrage de in beide voorgaande nummers ingeslagen weg wordt doorgetrokken, hoewel de inhoud van ingrijpender aard is.

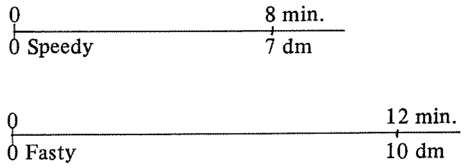
Een voorbeeld als instap

Twee slakken, Speedy en Fasty, houden een wedstrijd – 't idee alleen al; over het uitgaan van rijke, realistische contexten gesproken – maar toch!
Stel dan: twee slakken houden een wedstrijd. Een wedstrijd waarin dan? Wel, een *snelheids*wedstrijd vanzelf! (nu we toch realistisch bezig zijn).
Na 8 minuten blijkt Speedy 7 dm te hebben afgelegd, terwijl Fasty na 12 minuten de respectabele weg van 10 decimeter heeft overmeesterd.
- Welke slak is nu de "master of speed"? en
- Hoe zit het met het verschil in afstand-tijd overbrugging?

Oriëntatie op het probleem

Er zijn stellig allerlei mogelijkheden om de geschetste situatie het hoofd te bieden en ook allerlei kwesties, waarover eerst iets moet worden afgesproken.
Om met het laatste te beginnen. Hoe zit het met de ontwikkelde "traagheden" van beide glijders?
Kunnen ze na 8 minuten nog gelijk gelegen hebben?
Wat spreken we af over hun snelheden?
Zullen we er maar van uitgaan, dat het modelslakken

zijn, die de standvastigheid van de verhouding van weg en tijd – want dat is toch model ... eenparig bewegen – netjes in acht nemen?
We doen ook maar net, of ze rechtlijnig voortgaan; dat is gemakkelijk bij het maken van een situatieschets:



Nu nog het gestelde probleem zèlf oplossen. Valt daarover op voorhand wat te zeggen?

Mogelijke oplossingen

Wel, vijfde en zesdeklassers van de lagere school, die iets van breuken en verhoudingen begrepen hebben, zijn in staat op de volgende manieren te redeneren.

- Speedy deed bijna 1 dm per minuut; hij komt daarvoor gerekend over die 8 minuten maar 1 dm tekort.
  Bij Fasty is dat 2 dm over 12 minuten, of 1 dm over 6 minuten.
  Fasty heeft dus eerder het tekort van 1 dm bereikt dan Speedy, dus ...
  Dit betekent, dat je als leerling nu kunt gevolgtrekken dat Speedy de snelste was, maar over het snelheidsverschil zelf valt nog weinig concreets te zeggen, als het op numerieke precisie aankomt.
- Anderen zoeken het mogelijk in het vergelijken van de tijden.
  Fasty was de helft van Speedy's tijd langer onderweg, maar hij kwam niet de helft van Speedy's weg verder, dus...
  Misschien deden verhoudingstabellen wel dienst om deze redenering te ondersteunen:

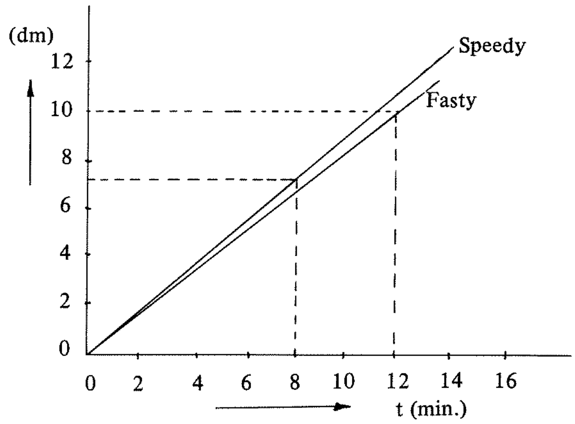
Speedy: ($\xrightarrow{1\frac{1}{2}}$ / $\xrightarrow{\times 1\frac{1}{2}}$)

WEG (dm)	7	$10\frac{1}{2}$
TIJD (min.)	8	12

Fasty:

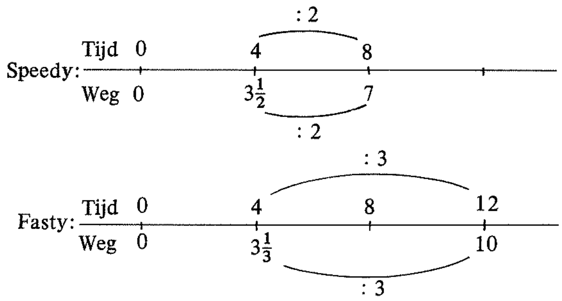
WEG (dm)	10
TIJD (min.	12

  Ook op deze manier kan de volgorde bepaald worden en over het verschil (in snelheid) valt ook nog wel iets te zeggen: Fasty komt in 12 minuten ½ dm op Speedy tekort, maar dat nu wat netter te zeggen in de vorm van ... dm/min. valt nog niet mee.
- Weer anderen zullen – heel globaal – zeggen, daarbij enigermate voorgaande redenering toepassend: "Och, 't scheelt niet zoveel. De snelheden zijn ongeveer gelijk" en zij zullen zich om het verschil verder niet meer zo druk maken.
- Wat ook nog mogelijk is – al zullen er niet veel zijn die dit doen – is dat kinderen een weg-tijd grafiekje samenstellen om de snelheden visueel vergelijkbaar te maken:



Wanneer de grafiek met enige nauwkeurigheid is samengesteld, is de gevraagde ordening in de snelheden als vanzelf aangebracht.

Een andere mogelijkheid tot visualisering, maar dan meer direct, is het maken van de eerdergenoemde situatieschets en die eventueel nog aanvullen met wat tussenwaarden:



Daarna kan over de ordening een uitspraak worden gedaan, maar ook hier is voor de verschilbepaling méér nodig.

Bezinning

De gesuggereerde reacties van leerlingen zijn geen bureauverzinsel om een mathematisch-didactisch utopia te scheppen, maar stoelen op geobserveerde leerprocessen. Langdurige ervaring (en veel getob) in ontwikkelings- en onderzoekswerk ligt eraan ten grondslag (2). Dit vooraf.
Uit de beschreven reacties van de leerlingen valt heel wat te leren, dat van beslissende betekenis is of kan zijn voor het didactisch vervolg. Zo zijn vrijwel alle geschetste oplossingen erop gericht geweest de snelheidssituaties van beide slakken vergelijkbaar te maken, omdat bij rechtsteeks vergelijken de weg naar een oplossing nu eenmaal geblokkeerd was.
De toegepaste wiskundige bewerkingen en middelen waren wel toereikend om tot "Speedy was sneller" te besluiten, maar nog niet om met meer precisie over de vastgestelde orde te beslissen.
Vooral opvallend was de neiging tot het vervangen van één of beide situaties. Daarmee beoogden de leerlingen het vergelijken te vereenvoudigen en dus de mogelijkheid tot preciezer ordening binnen bereik te brengen. Voorbeelden hiervan waren de omzetting van

"2 dm in 12 min." in "1 dm in 6 min." of het vaststellen van "tussenwaarden" bij de tweeschalige getallenlijnen.

We zullen nu aan het voorbeeld van de slakken laten zien, hoe een deelleergang voor het aftrekken van ongelijknamige breuken kan worden opgezet. Daarbij zal het respecteren van de opmerkelijke trekken in het oplossingsgedrag van kinderen vanzelfsprekend uitgangspunt zijn. Dit betekent dus dat we recht proberen te doen aan de neiging van kinderen situaties om te zetten in daarmee gelijkwaardige bij vergelijkingsproblemen om het vergelijken te vereenvoudigen.

Opmerking: De ervaring leerde, dat de kinderen al snel ontdekken, dat er twee gevallen zijn, waarbij het vergelijken en ordenen gemakkelijk verloopt. Wat ons voorbeeld aangaat: overeenstemming in de afgelegde afstanden òf overeenstemming in de tijden.

Bijvoorbeeld: Beide slakken doen 7 dm in resp. 8 min. en 10 min. De eerste is sneller, maar te bepalen hoeveel sneller vergt de nodige inspanning. Zouden beide slakken resp. 7 dm en 10 dm doen in 8 min. dan kan ook het verschil zonder moeite worden vastgesteld.

De aandacht van de leerlingen zal zich bij het veranderen van situaties dus moeten richten op het scheppen van gunstige vergelijkingsmogelijkheden, liefst zó, dat ook het verschil daardoor onbelemmerd kan worden bepaald. Dubbelschalige getallenlijnen en/of verhoudingstabellen bieden daarbij voldoende mogelijkheden de voorkeuren van kinderen tot het veranderen van situaties onbelemmerd te ontplooien. Aan en door genoemde wiskundige werktuigen kunnen zij de oplossing voltrekken.

Op weg naar het verschil

Speedy kruipt 7 dm in 8 min. en
Fasty 10 dm in 12 min.

Dit soort en andere situaties worden eerst grondig verkend. De aandacht van de leerlingen wordt daarbij gericht op het verband tussen 7 dm in 8 min. en "de uitkomst $7/8$ dm/min. of, om ook de voor wat jongere leerlingen meer toegankelijke verdeelsituaties erin te betrekken:

Wanneer 7 pannekoeken onder 8 kinderen verdeeld worden, dan werkt de relatie pannekoeken–kinderen door in de uitkomst "ieder krijgt $7/8$ pannekoek" nadat de verdeling werkelijk is uitgevoerd.

Op de samenhang tussen situatie en "uitkomst" wordt dus nadrukkelijk de aandacht gevestigd. Er wordt als het ware betekenisvolle samenhang nagestreefd van het probleem: de ontlokte wiskundige activiteit en de uitkomst, met het oog op de begripsvorming.

Terug nu naar onze slakken.

Uitgaande van de veronderstelde constante snelheden worden de leerlingen uitgedaagd met het volgende probleem van dubbele omkering:

Stel je weet dat Speedy 7 dm in 8 min. kruipt, dus $7/8$ dm/min.

Kun je nu nog zo'n situatie bedenken waarin Speedy even snel gaat, maar een andere afstand aflegt in een andere passende tijd.

Zie je nog meer mogelijkheden?

Tweeschalige getallenlijn en/of verhoudingstabel kunnen hier letterlijk uitkomst(en) bieden:

Speedy:

Afstand	0	$(3\frac{1}{2})$	7	$(10\frac{1}{2})$	14
Tijd	0	(4)	8	(12)	16

of

Afstand (dm)	7	14	21
Tijd (min.)	8	16	24

Toepassing van de dubbelschalige getallenlijn zal bovendien het bedenken van "nieuwe" tussenwaarden uitlokken.

Voor Fasty's geval wordt hetzelfde probleem opgeworpen en net zo aangepakt.

Fasty:

Afstand	0	5	10	15	20
Tijd	0	6	12	18	24

of

Afstand	5	10	15	20			
Tijd	0	12	18	24			

Natuurlijk zullen vooral in het begin nieuwbedachte situaties op hun juistheid getoetst moeten worden. Betekent bijv. 14 dm in 16 min. nu ook echt dat *de* snelheid $7/8$ dm per min. was.

Door het verantwoorden van nieuw bedachte situaties wordt de band met de context van de vraagstelling niet verbroken. Dit is belangrijk, omdat bij het verwiskundigen van het probleem de betekenis van de context wordt "meegenomen". Vergelijking van de uitkomst van de werkzaamheden tot dusver leert, dat inmiddels twee gemakkelijk vergelijkbare situaties zijn voortgebracht, n.l.:

Speedy:

A	21
T	24

en

Fasty:

A	20
T	24

Speedy blijkt dus in 24 min. 1 dm meer te zijn opgeschoten dan Fasty, dus zijn snelheid lag $1/24$ dm per min. hoger.

Ervaring in onderzoek met vijfdeklassers wees uit, dat bij deze benadering spontaan verschillen in de verwerking kunnen ontstaan.

Enkele niveaus die we opmerkten waren:

- Eerst (bij getallenlijnen of) (3) in tabellen een flink aantal situaties bedenken en pas dan vergelijken, bijvoorbeeld:

Speedy:

A	7	14	21	28	35	42	49	56	63	79
T	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

Fasty:

A	10	20	30	40	50	60	70
T	12	24	36	48	60	72	84

Afhankelijk van de situaties die de leerling in het oog vat, kunnen dus verschillende (gelijkwaardige) uitkomsten worden vastgesteld.

- Door middel van (getallenlijn of) een tabel toewerken naar de eerste gemakkelijk vergelijkbare situaties:

Speedy:

A	7	14	21
T	8	16	24

Fasty:

A	10	20
T	12	24

Het volgen van deze werkwijze kenmerkt zich door tussentijds vergelijken. Dus bij

A		14
T		16

wordt even "met een schuin oog" naar het andere geval gekeken, gezien dat

A	10
T	12

hierin niet eenvoudig omgezet kan worden en vervolgd met de volgende situatie voor Speedy

A				21
T				24

.

Opnieuw vergelijken leert, dat nu wèl een uiterst bruikbaar geval is bereikt. Na het omzetten van Fasty's situatie in

A	20
T	24

staat niets de verschilbepaling meer in de weg.

- Vermoedt een leerling eenmaal dat het handig is met de grootste getallen te beginnen, dan is daarmee een nog doelmatiger oplossingsweg binnen bereik gekomen:

A	10	20
T	12	24

Het opschieten in de tabel gebeurt nu "met grotere stappen".
Degenen die op deze wijze te werk gaan zullen ook snel inzien, dat je de andere situatie dan rechtstreeks in de gewenste kunt omzetten.

×3

A	7	21
T	8	24

×3

, dus met overslaan van

A		14	
T		16	

Nu is met het oog op het overslaan van situaties de voorbeeldopgave wel erg beperkt in zijn mogelijkheden. Van het meergenoemde onderzoek willen we daarom nog iets laten zien in verband hiermee.
De aanpak van de kinderen die destijds aan het onderzoek meededen kenmerkte zich in de loop van het leerproces door toenemende efficiency. O.a. met voorbeelden van leerlingenwerk wordt één en ander verduidelijkt.

Voortschrijden in schematiseren

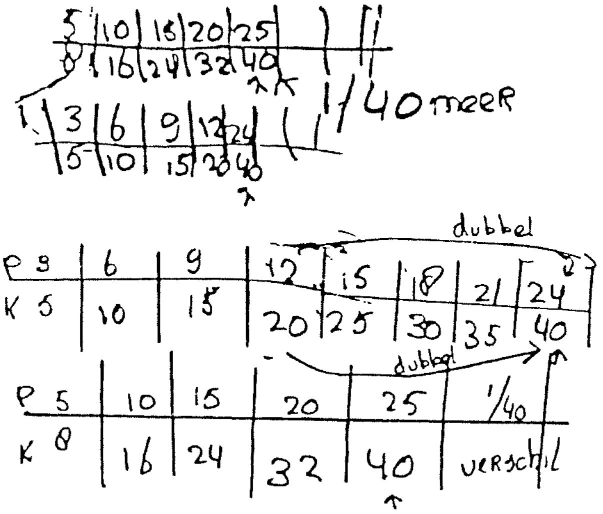
In de vorige paragraaf werd reeds gewezen op mogelijke verschillen in verwerking bij de geschetste benadering. Enkele verschillen in – wat we niveaus van schematisering zouden willen noemen – werden aangegeven. Waren het niveaus van éénzelfde leerling of van verschillende leerlingen? De gegeven voorbeelden suggereerden het laatste.
Het is evenwel ook heel goed denkbaar, dat de gegeven voorbeelden het werk van de zelfde leerling typeren, of beter nog zijn leerproces over langere termijn tot uitdrukking brengen. Zo'n individueel leerproces kenmerkt zich dan door toenemende doelmatigheid van het tabelgebruik, waarbij deze wordt aangepast aan het oplossingsproces en waarbij geleidelijk aan steeds meer tussenstappen worden overgeslagen. Ook van die mogelijkheid tot individuele progressie willen we iets laten zien.

Voorbeeld 1

5 kinderen verdelen 3 pannekoeken.
8 kinderen verdelen 5 pannekoeken.
In welke situatie krijgt een kind meer? Hoeveel meer?
In het stadium van het onderzoek waarin dit probleem gesteld werd waren er 12 van de 24 kinderen die de systematiek van de aanpak "in hun vingers" begonnen te krijgen.
We laten vijf voorbeelden van werk van leerlingen zien die zichtbaar probeerden hun methode te stroomlijnen en daarin verkortingen aan te brengen.

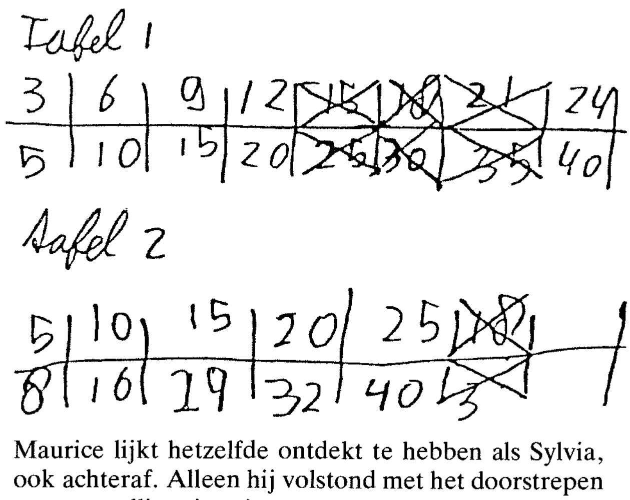
Voorbeelden van leerlingenwerk

Sylvia



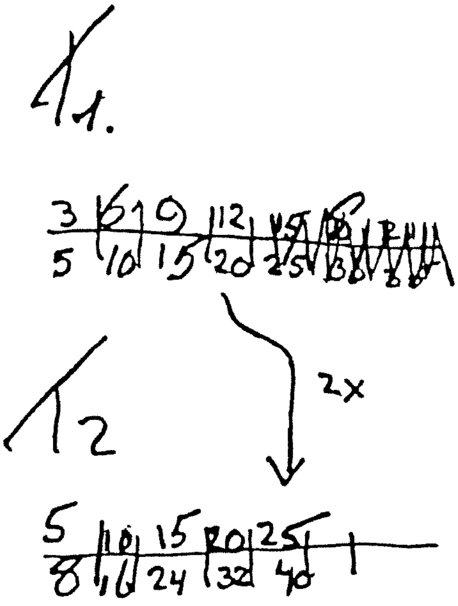
Sylvia ontdekte achteraf, dat in de tabel van $\frac{3}{5}$ zo maar 3 situaties konden worden overgeslagen. Daarom maakte zij nieuwe tabellen (erboven) begon met die voor $\frac{5}{8}$ en paste in die voor $\frac{3}{5}$ de ontdekte verkorting toe.

Maurice



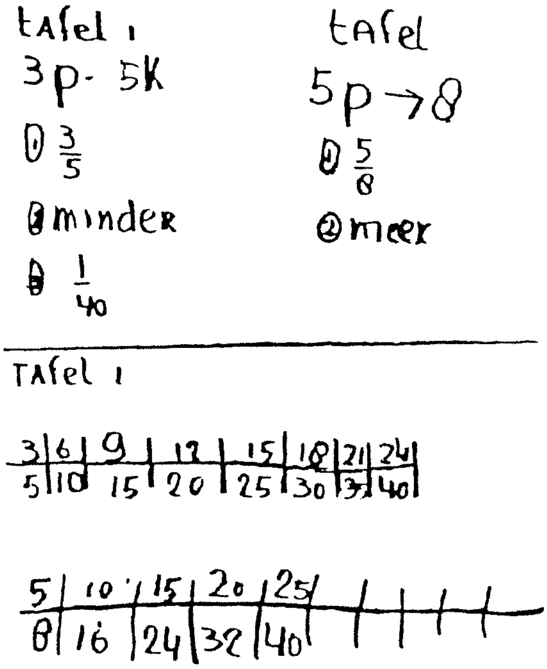
Maurice lijkt hetzelfde ontdekt te hebben als Sylvia, ook achteraf. Alleen hij volstond met het doorstrepen van overtollige situaties.
Hij liet ook na het verschil te bepalen.

Jacqueline



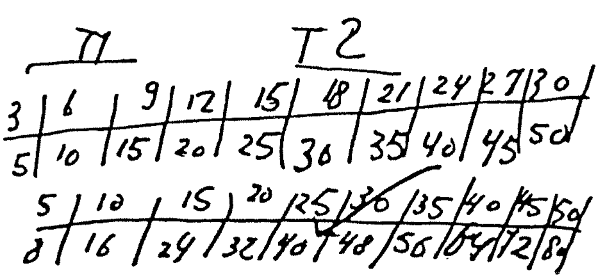
Jacqueline ging net als Maurice te werk. Zij streepte echter nog een extra situatie door, zag hetzelfde verband als Sylvia, maar liet het afmaken en de uitkomst achterwege.

Peter-Jan



Een model-oplossing in dit stadium.

Bert



Bert's werk was vrij illustratief voor de groep als geheel. Hij produceerde eerst maar eens flink wat situaties en ging zich pas achteraf druk maken om het vergelijken.

Voorbeeld 2

Iemand maakt koffie met een koffiezetapparaat. De eerste 3 schepjes koffie voor 4 koppen. De tweede keer 4 schepjes voor 5 koppen.
Welke koffie is sterker? Wat kun je zeggen over het verschil.
We zullen van dit probleem, dat enige dagen na het vorige opgelost werd, de resultaten van de volledige groep bespreken. De vijf kinderen van het voorbeeldwerk nestelden zich nu bij de twee meest gevorderde niveaus van de oplossing (onder no. 1 en 4).

Geobserveerde oplossingen

1. Voor beide keren koffiezetten een tabel maken tot aan de eerste, eenvoudig vergelijkbare gegevens:

S	3	6	9	12	15
K	4	8	12	16	20

en

S	4	8	12	16
K	5	10	15	20

Zeven kinderen verwerkten het probleem op deze manier.

2. Als 1. Maar nu werden voor het vergelijken de volgende situaties uitgekozen:

S		12
K		16

S		12
K		15

De drie leerlingen die zó te werk gingen lieten over het verschil precieze uitspraken achterwege.

3. Zes kinderen gingen net als Bert aan de slag. Dus eerst veel situaties maken en dan pas vergelijken en het gevraagde verschil bepalen. Van deze zes waren twee kinderen, die door herhaald verdubbelen de goede situaties uitsloten. Ze "sprongen" er door hun methode overheen.

S	3	6	12	24	48
K	4	8	16	32	64

S	4	8	16	32
K	5	10	20	40

Eén nijvere leerling(e) hield het pas bij

S		32
K		40

en

S		30
K		40

voor gezien en besloot op grond daarvan tot een sterkteverschil van 2/40 schepje per kop!

4. Als 1, maar met aanbrengen van verkortingen. Zes kinderen werkten toe naar de eerste eenvoudig vergelijkbare situaties, maar met overslaan van tussenstapjes.
Vier van hen deden dat nog maar in één tabel:

S	4	8	16
K	5	10	20

en de overblijvende twee in beide tabellen

S	3	6	12	15
K	4	8	16	20

en

S	4	8	16
K	5	10	20

Dus verschil (in sterkte) 1/20 schepje per kop koffie. De laatste groep begint zo langzamerhand de geschetste methode te beheersen.

Besluit

Natuurlijk is met het laatst beschreven niveau van schematisering de volledige leerweg nog niet geschetst.
Maar ... men zou het hierbij kunnen laten.
Het is echter twijfelachtig of de leerlingen dit zullen doen. De mogelijkheden tot verkorten zijn nog niet uitgeput. De rek is er nog niet helemaal uit. En die ruimte moet benut, al was het maar door een beperkt aantal leerlingen. Zij zullen al toewerkend naar de meest doelmatige methode zo en passant hun ideeën over delers en kleinste gemeenschappelijke veelvouden wèl ontwikkelen en de toepasbaarheid daarvan in dergelijke situaties ervaren. Uiteindelijk zullen zij zelfs de tabellen de rug toekeren en ongelijknamige breuken aftrekken volgens klassiek recept. In een volgende bijdrage zullen we hier iets van laten zien.
Voordat het echter zover is, zal de gevolgde oplossingsmethode losgeweekt moeten worden van de problemen die dienst deden als bron en toepassingsgebied ervoor. Door de problemen te variëren ondersteunt men dit losmaken van de werkelijkheid. De beschikbaarheid van de globale methode ineens vanaf het begin is hiervoor eveneens een gunstige omstandigheid.
Tussen het vergelijken van de gegeven voorbeeldsituaties en het aftrekken van ongelijknamige breuken volgens de k.g.v.-methode, ligt een lange weg. Per traditie is dit een éénrichtingsweg. Voor die weg gold: inrijden vanaf de k.g.v.-kant. Echter de borden stonden verkeerd. De pijl had aan de andere kant moeten staan. En daaronder de waarschuwing: Voorzichtig inrijden. Met een slakkengang.

(1) Term van Prof. Freudenthal.
(2) Zie Streefland, L.: *"Subtracting fractions with different denominators"* in Educational Studies in Mathematics 13 (1982) 233–255.
N.B. Bij OW & OC zal op niet al te lange termijn een meerdelige publikatie over breuken (theoretisch-praktisch) verschijnen in de onderzoeksreeks van de vakgroep.
(3) Met de getallenlijnen dient men voorzichtig te zijn, omdat men bij de vergelijking van situaties met de gekozen eenheden in de knoei kan komen. Alleen wanneer de tweeschalige getallenlijn voor de leerlingen echt een denkmodel geworden is kan over dit bezwaar heengestapt worden.