Matrices en wegen

F.J. van den Brink
OW & OC, RU Utrecht

Summary

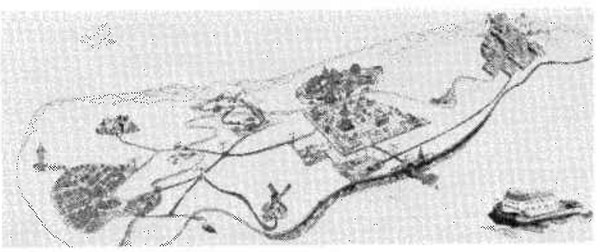
Several issues focussed on matrices can easily be introduced at BOVO-level such as attainableness, using different matrices and measuring units, working with schemes and diagrams.
Describing some problems the present paper gives a short overview of activities which prepare matrices.

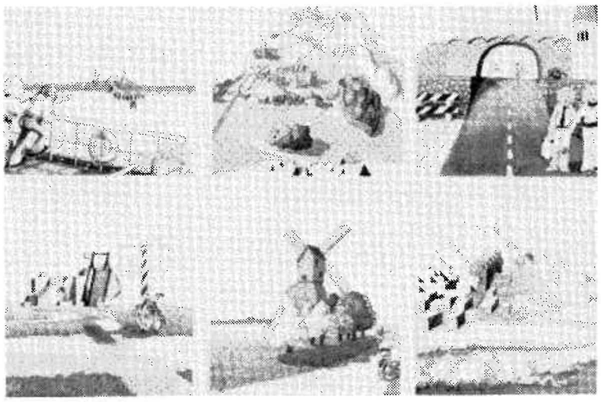
Aan matrices, zoals aangeboden aan leerlingen in de Hewetproduktie "Matrices" zijn verschillende kanten te ontdekken die ook op BOVO-niveau of (zelfs) lager aan de orde komen.
We denken hierbij aan vraagstukken rond:

I Bewegingen en de bereikbaarheid van plaatsen.
II Het gebruik van verschillende metrieken en maateenheden.
III Het werken met tabellen en schema's.

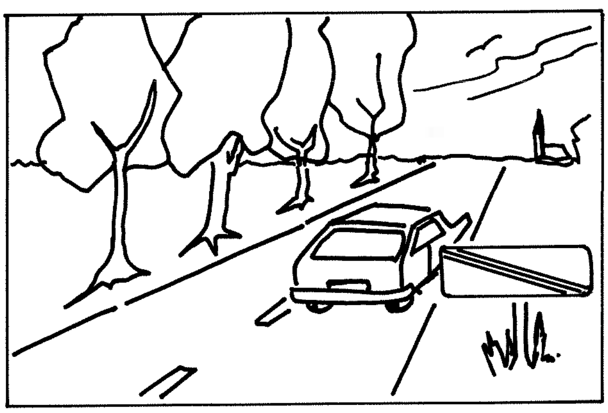
Deze problemen maken dat het pakket "Matrices" niet geïsoleerd staat, maar dat het binnen een reeks van activiteiten past die al in de basisschool begint.
Met voorbeelden uit verschillende klassen van de basisschool trachten we in dit artikel een schets van die reeks te geven ter informatie en stimulering.

1.
"Piet en Lies zijn op vakantie geweest op het eiland Waterland en ze hebben daar een serie foto's gemaakt. Hoe zijn ze over Waterland getrokken?"

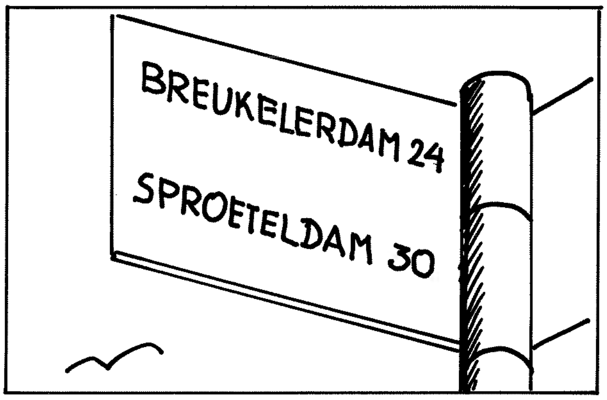




2.
"... en zo verlaten we onze laatste pleisterplaats en gaan OP WEG NAAR BREUKELERDAM.



We doen het rustig aan en na ongeveer een kwartiertje rijden komen we op een kruispunt.

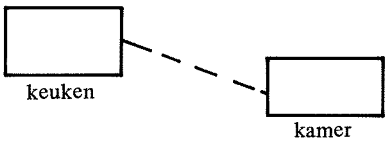


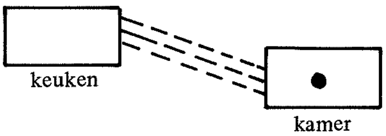
> *Op welk kruispunt staat dit bord? (Geef aan op de kaart)".*

Dit probleem komt uit het 5e klaspakket, terwijl "Waterland" in klas 2 ter sprake komt.

Fotoalbums van beeldstrips van denkbeeldige gebieden blijken zeer geschikt om de leerling met allerlei problemen in wegenstelsels te confronteren.
Bewegings- en oriënteringsvraagstukjes, problemen met verschillende afstandsmaten (lengte, tijd) komen door de hele basisschool op die manier aan de orde.

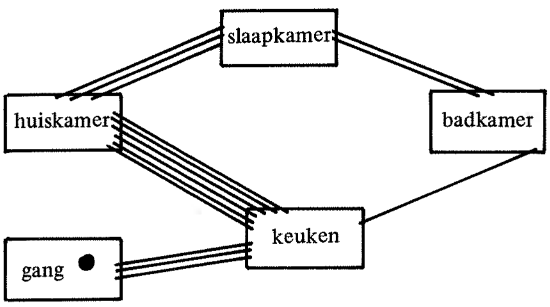
3.
Moeder loopt precies één keer van de keuken naar de kamer of omgekeerd.
Op bord komt:

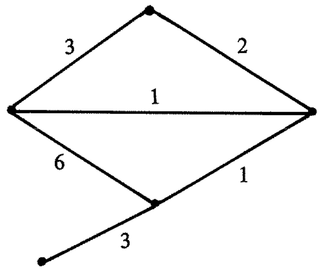




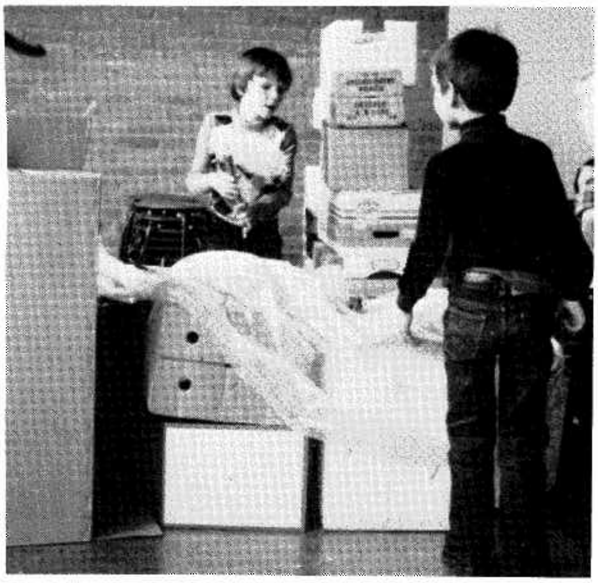
Ze begon in de kamer.
Waar is ze nu?

"Ze is in de keuken", zegt Ellie uit de 2e klas van de basisschool, "want ze gaat eerst heen en weer en dan nog eens naar de keuken". Over "even getallen" spreekt ze (nog) niet. Dan volgen wat ingewikkelde opgaven, die later ook met getallen genoteerd worden:

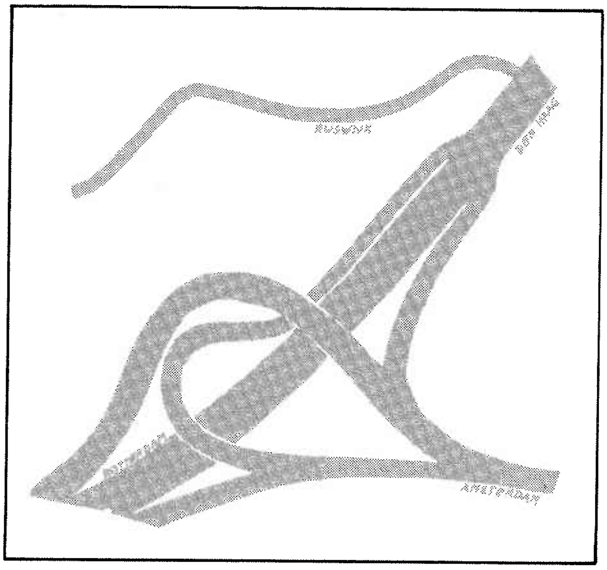




In dit project komt ook de afstand ter sprake.
Een van de opgaven luidt:
"Ontwerp met schoenendozen een maquette voor een huis.
Waar liggen de kamers t.o.v. elkaar?
Waarom?"



4.



Teken met viltstift op het kaartje hoe een auto rijdt van Amsterdam naar Den Haag, van Amsterdam naar Rotterdam.
Hoeveel verschillende weggetjes kan je eigenlijk tekenen op dit kaartje?
Hoeveel viaducten zijn er gebouwd?

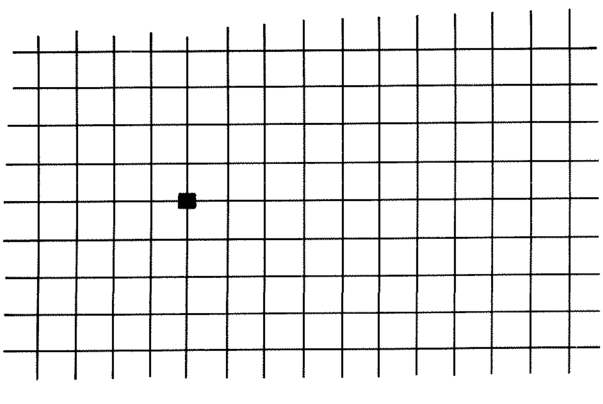
De politie weet, dat van de auto's die uit Den Haag komen, $^2/_3$ deel in de richting Rotterdam rijdt en $^1/_3$ deel in de richting Amsterdam. Er komen uit Den Haag: 36.000 auto's...

Het al of niet gericht zijn van het diagram komt hier ter sprake.
Ofschoon dergelijke doorloopproblemen flink geschematiseerd zijn, blijven ze toch gekoppeld aan een bepaalde context.
Dat geldt ook voor de getallen die erin staan: het aantal keren dat moeder passeert in voorbeeld 3 en de fractie passerende auto's in voorbeeld 4.
Deze maten worden gekozen om bewegingen te vergelijken. In dit gebied van de telmaat, afstandsmaat, kans, e.d. liggen talloze mogelijkheden voor onderwijsthema's.

5. *Witkarproject*

Jaren geleden werd op de basisschool het z.g. "stadsplan" ingevoerd: een rooster van "lanen" en "straten". Ongeveer te zelfder tijd ging in Amsterdam het witkarproject van start.
Een koppeling tussen beide ontwikkelingen kon niet uitblijven.

*"De witkar is een auto, die op elektriciteit door de straten en lanen van het stadsplan rijdt. Als je er een nieuwe batterij in stopt, kun je 6 'kilometer' (stapjes) in het stadsplan vooruit.
Alleen bij een witkargarage, hier in het stadsplan aangegeven, kun je zo'n batterij kopen."*



Vragen en opdrachten

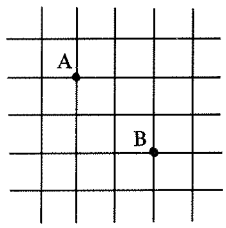
Naar welke kruispunten kan de witkar met een nieuwe batterij rijden?

*In het stadsplan zijn 3 garages. (Ze worden erin aangegeven).
Hoeveel extra garages heb je nodig om met de witkar naar de drie garages te rijden?*

Onderzoeksopdrachten

- *als elk kruispunt te bereiken is vanuit een serie garages, geldt dit dan ook voor een bepaalde wijk van het stadsplan?*
- *moeten daartoe garages in de wijk staan?*
- *teken een wijk waarin geen garages staan en waarin toch elk punt bereikt kan worden.*

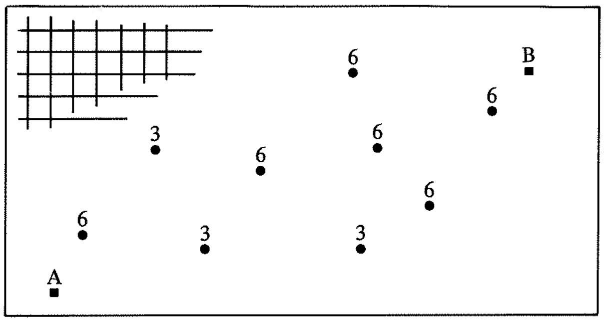
Ontmoetingspunten van twee (of meer) witkarren



De ene witkar rijdt vanuit A naar B, de andere in tegengestelde richting; waar kunnen ze elkaar ontmoeten?

Verschillende batterijen te koop

*Er zijn garages, die alleen 6-kilometer batterijen verkopen en er zijn er die alleen 3-kilometer batterijen verkopen.
"6- en 3-kilometergarages" liggen verspreid over een wijk:*



Kun je van A naar B en weer terug komen?

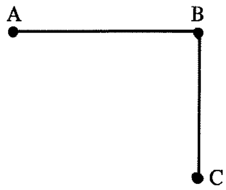
6. *Witkarpenningen*

Later in de basisschool worden de witkarren in een verbeterde uitvoering aangeboden: ze rijden op penningen. Bovendien is het stadsplan vervangen door "een net van haltes". Geleidelijk aan komen dan de matrices in zicht.

"Een witkar is een fijn vervoermiddel. Je ziet ze in Amsterdam rijden. Je kunt zo'n karretje huren. Wil je één halte verder rijden, dan koop je een penning die het karretje zo lang laat rijden dat je de volgende haalt. Wil je twee haltes verder, dan moet je twee penningen gebruiken. Voor een afstand van drie haltes

heb je drie penningen nodig, enzovoorts."
"Ze zijn begonnen met een eenvoudig net van haltes door de stad."

Op bord komt:



Hoever kom je met één penning?
vanuit A?
vanuit B?
vanuit C?

We vullen de antwoorden klassikaal in de tabel in:

Op bord komt:

	A	B	C
A	0	1	0
B	1	0	1
C	0	1	0

0 betekent . . .
1 betekent . . .
afspraak!

Joost rijdt met de witkar. Hij gebruikt twee penningen.

Waar kan hij komen vanuit A?
Dit in de tabel invullen

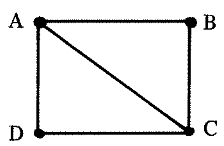
(bord)

	A	B	C
A	1	0	1
B			
C			

En vanuit B?
We vullen dit weer in: Nu komt echter naar voren dat de volgende twee routes mogelijk zijn: B A B en B C B.
We vullen dat zó in:

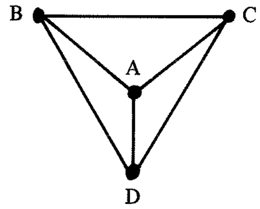
	A	B	C
A	1	0	1
B		2	
C			

"Toen Amsterdam zijn witkarrensysteem uitbreidde, tot



wilden ze in Rotterdam er ook mee beginnen. Ze bestudeerden het Amsterdamse systeem en besloten om een ander systeem te gaan opzetten.
Het witkarnet in Rotterdam ging er zó uitzien:

(bord)

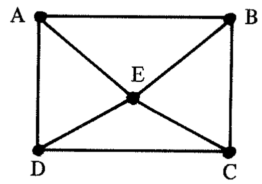


Evenals in Amsterdam zijn er 4 haltes.

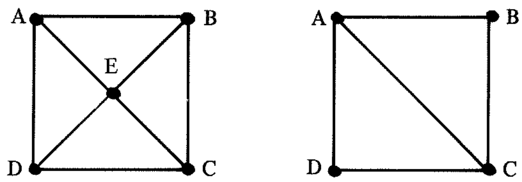
Is het Rotterdamse systeem beter dan het Amsterdamse systeem?

Toen de Amsterdammers in de gaten kregen dat het Rotterdamse systeem beter was, verbeterden zij vlug hun systeem. Er kwam een route en een halte bij.

(bord)



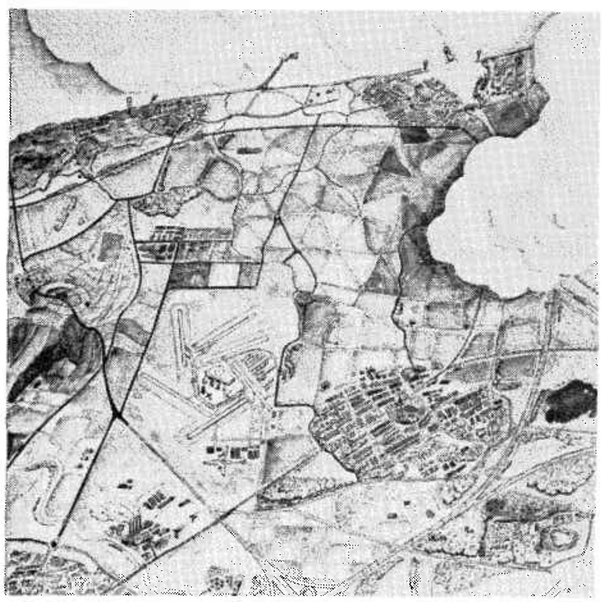
Vergelijk de twee Amsterdamse systemen:

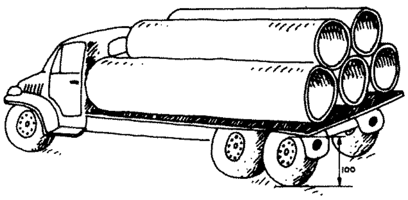


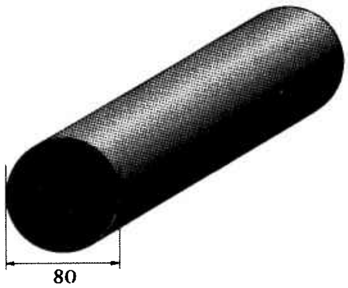
- *Zijn er ook ritten duurder geworden in het nieuwe Amsterdamse systeem?*
- *Zijn er ook ritten goedkoper geworden?*

Bij het vergelijken van dergelijke systemen vormt de bereikbaarheid van plaatsen het centrale thema. •
Allerlei omstandigheden zoals tunnels, bruggen e.d. in het wegennet beïnvloeden de bereikbaarheid of de afstand.

7. Buizenvervoer







Een lege vrachtauto weegt 10 ton.
Een buis weegt 1 ton.

"6 buizen moeten vervoerd worden van de haven naar de fabriek."
Hoe moet de wagen rijden?

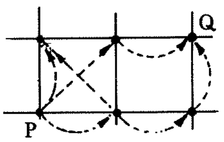
Er gelden beperkingen aangegeven met verkeersborden (hoogte van viaducten, draagkracht van bruggen, zandpaden, e.d.).

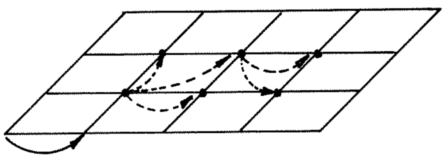
Het liefst zo weinig mogelijk keren rijden!

8. Het stadsplan uitgebreid

In het stadsplan kunnen evenzeer verkeersverboden en -geboden gelden die de kortste weg tot een gebroken lijn maken. Bovendien blijken er onzichtbare voetgangerswegen in het plan te bestaan.

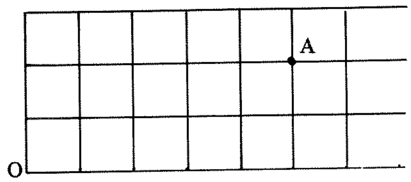
"Wisten jullie dat onder het stadsplan door voetgangerstunnels liggen?
Je kunt ze natuurlijk niet zien, maar wel bedenken. In elk roostervierkantje kun je vanuit elke hoekpunt via een stukje tunnel direct naar een andere hoekpunt lopen, hetzij onder de weg door, hetzij diagonaal naar de overkant. Daarbij telt elk tunnelgedeelte voor één stuk.



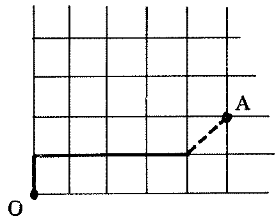


Hoeveel tunnelstukjes moet je passeren om van P naar Q te gaan?"

Op het stadsplan wordt gewoonlijk de "som"-metriek (1) gehanteerd:



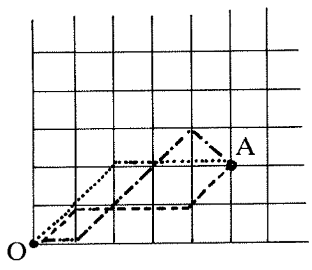
de afstand van O naar A is 7; namelijk: 5 + 2. Door voetgangerstunnels in te voeren komt een ander metriek aan bod.
"Met de voetgangerstunnels kun je binnendoor", meende een leerling en hij vond een kortere weg tussen O en A:



"Zes straatjes *lang is deze weg", meende hij en dit betekende dat uitsluitend de straatjes* zelf *werden geteld en niet meer de lengte van de straatjes. (een straten-tel-metriek)*

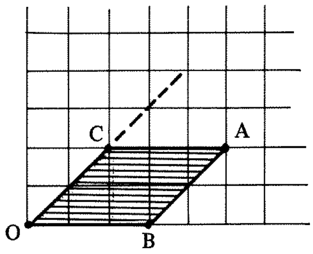
Is er een nog kortere weg van O naar A?
Zijn er nog kortere wegen van O naar A?

De kinderen vonden verschillende afstandswegen van lengte 5:

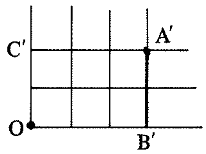


Afstandswegen van O naar A van een "lengte" 4 of 3 werden niet gevonden. "5" was de kleinste.
Er is blijkbaar geen punt B te vinden zodat
$d(OB) + d(BA) < 5$
($5 = d(OA)$, zijnde de lengte van een afstandsweg van O naar A).
Kennelijk geldt voor alle B:
$d(OB) + d(BA) \geqq d(OA)$ (de driehoeksongelijkheid).
En dit betekent dat het "straten tellen" een metriek is. ($d(OB) = d(BO)$ en $d(OB) \geqq 0$ geldt reeds!)
Stel dat $A(x, y)$ en $B(p, q)$ roosterpunten in het stadsplan zijn.
Het is te bewijzen dat de afstand tussen A en B, gedefinieerd als
$d(A(x, y), B(p, q)) \stackrel{df}{=} \max(|x - p|, |y - q|)$, een metriek is (bewijs dat de driehoeksongelijkheid geldt).
Ga na of de "straten-tel-metriek", zoals boven beschreven, equivalent is met deze "maximummetriek".

Nog een interessant verband.
Alle niet-dalende afstandswegen van O naar A liggen in het gearceerde gebied (OBAC):



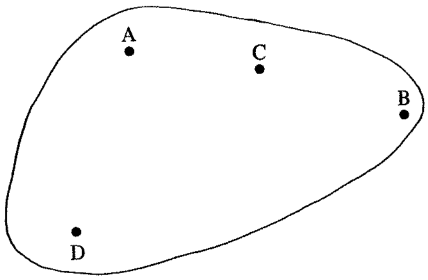
Beschouw de lijn OC als y-as;



Het aantal afstandswegen van O naar A (gerekend met de "straten-tel-metriek") is gelijk aan het aantal van O naar A′ (gerekend met de "sommetriek").

9. Tabellen

Later wordt de nadruk gelegd op het rekenen en het werken met tabellen. De bereikbaarheid wordt vastgelegd in een tabel waarin te lezen is welke plaatsen rechtstreeks te bereiken zijn (met "1" aangeduid) en welke niet. Ook het meten van afstanden en werken met verhoudingen staan centraal.



AD – 5 cm
AC – 2½ cm
CB – 3 cm
DC – 6 cm
DB – 8½ cm

Bereikbaarheidstabel:

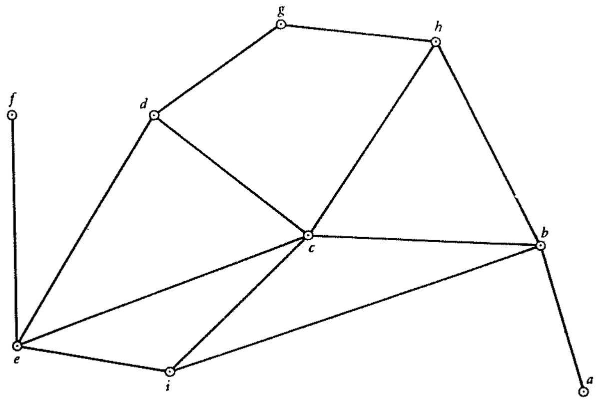
	A	B	C	D
A	X	0	1	1
B	0	X	1	1
C	1	1	X	1
D	1	1	1	X

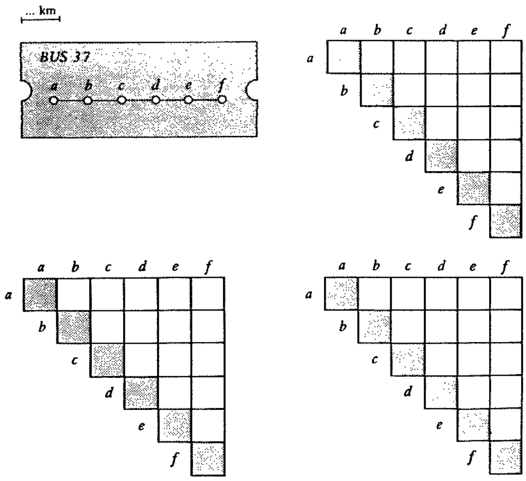
> *Teken de wegen in het kaartje.*

Afstandentabel in kilometers:

	A	B	C	D
A	0			10
B		0		
C			0	
D	10			0

> *Meet met je liniaal en vul de tabel in.*





De activiteiten bij dit laatste blad zijn:
- De eerste tabel invullen met afstanden. We geven op het werkblad de visuele schaal (bijvoorbeeld: "3 km"). Ook kan een kommagetal gegeven worden. De leerlingen moeten de afstanden met de liniaal meten (gehele centimeters van "stip" tot "stip").
- In de tweede tabel worden de kosten van de rit ingevuld (bijvoorbeeld: 1 km kost *f* 0,25).
- In de derde tabel laten we de retourprijzen invullen aan de hand van bijvoorbeeld de volgende regel: de kosten van een retour zijn die van een enkele reis plus 40%. Daarbij kunnen we afspreken om af te ronden op een dubbeltje.

10. Tot slot

We hebben slechts getracht u een idee te geven van wat er aan matrices op BOVO-niveau kan worden uitgevoerd. De matrix-vermenigvuldiging blijft achterwege. Daar tegenover staat dat met verschillende maten en metrieken wordt gewerkt (tijd, lengte, prijs e.d.)
Verschillende afstandsbepalende voorwaarden maken de problemen over het bereikbaar zijn van plaatsen zinvol.

(1) Een metriek of afstandsfunctie op een verzameling V is een functie d(x, y): V → IR met de eigenschappen voor x, y, z ∈ V dat

$d(x, x) = 0$
$d(x, y) > 0$ voor $x \neq y$
$d(x, y) = d(y, x)$
$d(x, y) + d(y, z) \geqq d(x, z)$

Voorbeelden van dergelijke functies zijn (voor $x = (x_i)_i$, $y = (y_i)_i$):

$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ de euclidische metriek

$d(x, y) = \max_{(i=1,\dots n)} |x_i - y_i|$

$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$