Innoveren is vooruitzien

Impressies van het HEWET-project (VII)

H. Verhage

OW & OC, RU Utrecht

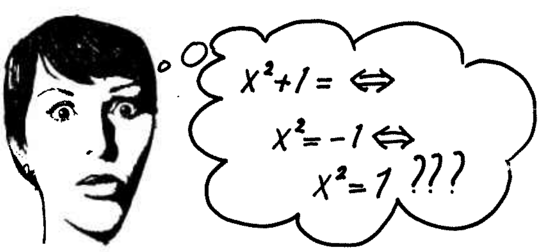
Summary

The chief aim of the HEWET-project is to arrive at a new curriculum for the teaching of mathematics during the fifth and sixth year of secondary education. However, changes at an advanced level will obviously necessitate changes in the teaching during the preceding years. This article is dealing with the way three schools that are taking part in the experiment are trying to adapt their fourth year course to the new requirements.
It appears to be far from easy to change over from traditional methods to a context-oriented type of teaching mathematics. Different schools have different problems, but all the teachers involved are equally enthusiastic and committed. It is to be hoped that the HEWET-project will in the long run not degenerate into an administrative renewal.

Met die kringeltjes

Het is maandag het zesde uur. Woensdag heeft klas A4II een proefwerk differentiëren. Dhr. van Steenis, wiskundeleraar van deze groep A-leerlingen, leidt de les in met:
"Het is heel duidelijk deze keer, het is een leerproefwerk, je weet precies waar je je aan moet houden. Je krijgt drie soorten sommen (...)"
Gedurende de les worden deze geoefend.
Van de functie $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ moet de grafiek getekend worden.

Alle te verrichten handelingen worden systematisch afgewerkt: domein bepalen, tekenbepaling, afgeleide met bijbehorend tekenverloop, asymptoten ...
Ik zit te wachten op een frappant moment. Lang duurt dat niet: bij de tekenbepaling van de teller van f is het raak.
Paulien weet $x^2 + 1 = 0$ op te lossen.
Van Steenis: "Kun je $x^2 + 1$ ontbinden?"
Paulien: "Nee."
Van Steenis: "Hoe doe je het dan?"



Paulien: "x-kwadraat-plus-één-is-nul dus x-kwadraat-is-min-één. Dat kan niet, dus je maakt er plus-één van."
Ze heeft het nog niet gezegd of ze begint al beschaamd te lachen, een reactie die overgenomen wordt door de rest van de klas.
Een tweede belangwekkend moment doet zich voor bij het onderzoek naar de asymptoten. Monique heeft een idee over hoe je dat aan zou kunnen pakken:
"Dat kun je met die kringeltjes doen."
Van Steenis begrijpt niet wat ze bedoelt, ik ook niet. Paulien komt haar klasgenote te hulp:
"Wat Monique zei, kan heel makkelijk."
Nu begrijpt Van Steenis waar ze op duiden. Van een vorige les hebben ze het volgende onthouden.

Als je de asymptoten moet bepalen van

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

dan geeft het verticale kringeltje

$$\frac{2x-1}{x-3}$$

de horizontale asymptoot en het horizontale kringeltje de verticale asymptoot.

Van Steenis wijst op de gevaren van dit regeltje en stuurt aan op "de noemer mag niet nul worden" en "wat gebeurt er als x heel groot wordt". Hij geeft echter toe dat het hier een trucje is en Paulien blijft er bij dat het met die kringetjes had gekund.

Blij met wiskunde A

De lezer vraagt zich misschien af waarom ik bovenstaande situatie de moeite van het beschrijven waard vind. Een heel gewone som uit een heel gewone les, dat is toch niets bijzonders? Welnu, daar gaat het juist om.
Als ik na de les nog even napraat met Van Steenis, vertelt hij me dat zowel het bepalen van nulpunten van tweedegraads vergelijkingen als de gebroken functie en de asymptootbepaling heel uitgebreid aan de orde zijn geweest.
"De leerlingen willen uiteindelijk graag iets onthouden. 'Met die kringeltjes' is dan wat er blijft hangen. Maar je begrijpt nu, waarom we zo blij zijn dat die wiskunde A komt."

Het Heymans College in Groningen, waar de zojuist beschreven les plaatsvond, is één van de tien scholen die volgend cursusjaar met het nieuwe wiskunde A-programma gaan experimenteren.
In dit artikel wil ik nader ingaan op de wijze waarop verschillende van deze tien scholen, vooruitlopend op het A-programma voor de vijfde klas, hun vierde klasprogramma hebben aangepast. Hiertoe heb ik drie van de tien scholen bezocht en wel naast het al genoemde Heymans College te Groningen, het Strabrecht College te Geldrop en de Middelschool in Lelystad. Dankzij de gastvrijheid van de betrokken docenten heb ik op deze scholen o.a. een aantal lessen bijgewoond.
Naast een beschrijving van de vierde klas ervaringen tot-nu-toe, zal ik proberen om één en ander in het brede kader van het experiment in zijn totaliteit te plaatsen.

Formeel gezien

Het HEWET-project houdt zich, formeel gesproken, uitsluitend bezig met de herverkaveling wiskunde I en II voor zover het de bovenbouw van het VWO betreft en dan nog voornamelijk met de voorbereidselen rond het vak wiskunde A.
In de praktijk blijkt echter dat HEWET veel verstrekkender gevolgen zal hebben. Te denken valt aan de invloeden op het wetenschappelijk onderwijs, het HBO, het HAVO, het onderwijs in de onderbouw. Wat dit laatste betreft, daar worden in het HEWET rapport een aantal duidelijke aanbevelingen over gedaan. De werkgroep wijst op een aantal consequenties van het invoeren van het nieuwe vijfde en zesde klas programma. Ik citeer:

> "Het programma van de onderbouw moet tenminste aan de volgende eisen voldoen:
> - Het moet leerstof bevatten die *voorbereidt* op de leerstof uit het programma wiskunde A en uit het programma wiskunde B.
> - De leerstof moet zodanig zijn, dat de leerlingen een redelijke aanduiding krijgen van wat wiskunde A, respectievelijk wiskunde B inhoudt en dus *een verantwoorde keuze* kunnen maken.
> - Het moet voor leerlingen die geen wiskunde in hun examenpakket kiezen een relevante *afsluiting* vormen.
>
> De huidige interpretatie van het vigerende programma voldoet niet aan deze voorwaarden, in elk geval niet aan de eerste twee. Om aan dit bezwaar tegemoet te komen stelt de werkgroep voor:
> a. het gewicht van enkele onderwerpen uit te breiden,
> b. een aantal onderwerpen op een wat andere manier te groeperen,
> c. een paar onderwerpen te laten vervallen of het gewicht ervan te verminderen door ze niet meer expliciet te noemen.
>
> De werkgroep meent dat bij het opvolgen van deze voorstellen de totale tijd die er in de onderbouw aan wiskunde besteed wordt, niet veranderd hoeft te worden."

In een nadere uitwerking van deze ideeën doet de werkgroep onder meer de volgende voorstellen:
- meer aandacht besteden aan het leren zien van ruimte in tekeningen en het tekenen van ruimtelijke figuren;
- de onderwerpen "machten met reële exponenten; logaritmen" gaan behandelen in het kader van het functiebegrip en daarbij als toepassing allerlei groeiproblemen bekijken;
- ook bij de "inleiding tot de differentiaalrekening" meer aandacht besteden aan toepassingen;
- in het leerplan expliciet "eenvoudige kansrekening" vermelden, de vermelding van "permutaties en combinaties" kan dan vervallen;
- het "gebruik van de rekeningliniaal" schrappen, evenals "relaties" en "rekenkundige en meetkundige rijen";
- het functiebegrip en de grafiek van een functie moeten een belangrijke plaats in (blijven) nemen, evenals de toepassingen ervan;
- de goniometrische verhoudingen hoeven niet persé vanuit de gelijkvormigheid opgebouwd te worden, een opbouw vanuit het functiebegrip of vanuit periodieke verschijnselen is ook mogelijk.

Eigen invulling

Het zij nogmaals opgemerkt dat de formele status van deze aanbevelingen gering is. Desalniettemin zijn ze belangrijk genoeg om hier nog eens op te sommen. Want iedere zichzelf respecterende school die aan het HEWET-experiment deel gaat nemen zal er toch op z'n minst over na moeten denken of het eigen vierde klas programma in meerdere of mindere mate gewijzigd moet worden. Ook de tien volgscholen hebben zich over deze vraag gebogen. Na onderling overleg en na overleg met het HEWET-team heeft elke school uiteindelijk haar eigen keuze gemaakt. De twee uiterste mogelijkheden zijn:
- Op de oude voet doorgaan met het boek dat tot op heden gebruikt wordt en bij de behandeling ervan hier en daar iets wijzigen.
- Volledig overgaan op de voor de vierde klas beschikbare IOWO en OW & OC pakketjes.

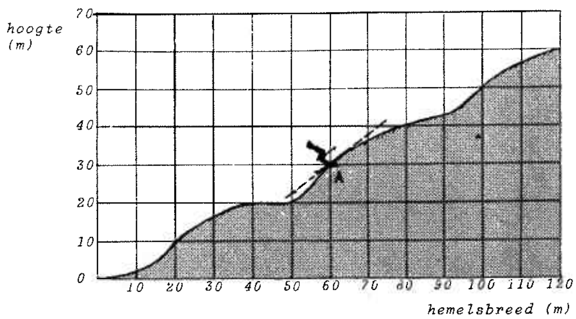
Deze zes pakketjes dekken de gehele vierde klas stof. Het zijn: Functies en Grafieken, Sinus, Differentiëren I, Exponenten en Logaritmen, Kansrekening, Functies van twee Variabelen.
De tussenoplossing om naast het boek enkele pakket-

jes te doen, heeft als praktisch bezwaar dat de leerlingen al gauw voor wat hogere kosten komen te staan. Van de tien volgscholen hebben er uiteindelijk zes besloten om volledig op het IOWO en OW & OC materiaal over te gaan, één school gebruikt evenals voorgaande jaren Getal en Ruimte en probeert daarnaast Functies van twee Variabelen uit en de overige scholen gebruiken drie of meer IOWO/OW & OC boekjes, aangevuld met eigen materiaal.
De volgende voorbeelden illustreren hoe één en ander op de drie scholen die ik bezocht heb in de praktijk verloopt.

Afdaling

Op het Strabrecht College in Geldrop is de vierde klas (een B-klas) bezig met Differentiëren I. In Deel C van het boekje, "Hellingen meten", gaat het over de afdaling die een skieër maakt:

Een berghelling varieert meestal nogal in steilheid. Hieronder zie je het "profiel" van een stukje berghelling, toegankelijk voor skieërs.



1. *Hoeveel % is de "gemiddelde helling" van het traject?*
2. *Waar is de helling het steilst?*
3. *Hoe steil is de helling voor de skieër in het punt A?*

Voor de helling in het punt A heeft Dide −75% gevonden.
Dhr. van der Kooy, de docent: "Waarom min 75%?"
Dide: "Omdat die skieër naar beneden gaat."

Voorbeeld 17

Op het Heymans College is een A-klas bezig met differentiëren. Dhr. Hegeman behandelt het onderwerp zonder een boek te gebruiken. In een klassegesprek is het verband tussen het positief (resp. negatief) zijn van de afgeleide van een functie en het stijgend (resp. dalend) zijn van de grafiek van een functie aan de orde geweest. Daarna kunnen de leerlingen zelf verder met de volgende opgave:

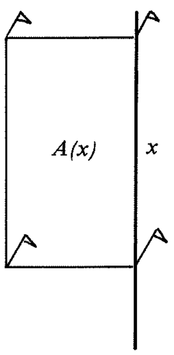
voorbeeld 17
$f(x) = x^3 - 9x$
a. *Spoor de punten op van de grafiek van f waarin de raaklijn horizontaal is.*
b. *Spoor op waar de grafiek van f stijgend en waar hij dalend is.*
c. *Teken de grafiek van f (bereken hiervoor ook de nulpunten).*

Een leerlinge heeft bij *a.* al gevonden $f'(x) = 0$ dus $x = -\sqrt{3}$ of $x = \sqrt{3}$. Ze wil verder gaan met het tekenen van de grafiek, vraag *c*.
Ik vraag: "Moet je onderdeel b niet eerst doen?"
Leerlinge: "Het is makkelijker om eerst de grafiek te tekenen."
Ik: "Maar dan beantwoord je de vragen wel in een andere volgorde dan de bedoeling is."
Leerlinge: "Ja, maar misschien kan ik het dan bij de volgende som wel in de goede volgorde doen." (Voorbeeld 18 gaat helemaal analoog, alleen het functievoorschrift is anders).
En ze gaat aan het tekenen.

Camping Mierenhoop

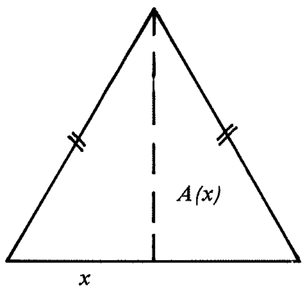
Op de experimentele Middenschool in Lelystad is 4 atheneum bezig met een verkorte versie van differentiëren I. De leerlingen hebben de eerste drie leerjaren op de middenschool gezeten en doen nu de bovenbouw Atheneum. Het laatste hoofdstuk van het boekje gaat over "Maxima en Minima":

In het reglement van camping Mierenhoop staat o.a. te lezen: Iedere nieuw aangekomen kampeerder ontvangt vier vlaggetjes en een touw van 30 meter lengte, waarmee hij een rechthoekig kavel moet afperken. In het voorseizoen wordt vaak oogluikend toegestaan dat de afrastering handig wordt benut bij het uitzetten van een kavel.
De vraag is natuurlijk: "Wat is de grootste rechthoek die je op deze manier met een touw van 30 meter kunt maken?"



Er wordt in het boek aandacht besteed aan hoe je bij dit probleem een functie op kunt stellen en hoe de differentiaalrekening behulpzaak kan zijn bij het bepalen van het optimale kavel.
Mevr. Aukema-Schepel heeft het groepje leerlingen dat deze opgave de vorige les al af had een extra vraag voorgelegd:
Zou het soms voordeliger zijn om een driehoekige in plaats van een rechthoekige kavel af te perken?
De oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met omtrek 30 m blijkt héél wat onvoordeliger te zijn dan de oppervlakte van een vierkant met dezelfde omtrek (resp. 43,27 m² en 56,25 m²).

Bovendien vinden de leerlingen een driehoekige kavel wel érg onhandig om je meestal rechthoekige tent op te zetten, zo praktisch ingesteld zijn ze wel. Toch – denk aan de rechthoekige kavel langs het hek waarbij niet de vierkante vorm het voordeligst blijkt – wordt er aan dit groepje leerlingen gevraagd of er soms een niet-gelijkzijdige driehoek met gróter oppervlak te vinden is bij het zelfde touw. Er wordt van uit gegaan dat de afrastering niet benut mag worden en dat de driehoek in elk geval gelijkbenig is.
Dit uitrekenen wordt wel moeizaam, maar onder leiding van Mevr. Aukema gaat het groepje aan de slag:



Stel de halve basis x meter.
Dan zijn de andere zijden elk $15 - x$ meter.
De hoogte van de driehoek vind je met Pythagoras.
En dan loopt het vast. Niet omdat de leerlingen van de functie $A(x) = x\sqrt{225 - 30x}$ het maximum niet kunnen bepalen (hetzij door $A(x)$ te differentiëren m.b.v. produktregel en kettingregel, hetzij door van de eenvoudige functie $A^2(x) = x^2(225 - 30x)$ het maximum te bepalen), maar omdat ze niet meer weten hoe ze $(15 - x)^2$ moeten uitrekenen!

Differentiatie bij differentiëren

Drie verschillende scholen, alle drie bezig met hetzelfde onderwerp. Ieder op hun eigen wijze.
De leerlinge van het Strabrecht College overtroeft haar leraar met -75%. Nooit aan gedacht natuurlijk, maar ze kan haar antwoord uitstekend verdedigen. De *min* in -75% betekent voor deze leerling heel wat meer dan de *min* in $x^2 = -1$ voor de leerling uit de inleiding. Zo'n contextrijke vraag geeft echter (onbedoeld) wel heel wat ruis. Voor de leraar is het dan de kunst om zo'n antwoord niet onmiddellijk te verwerpen.
De leerlinge van het Heymans College weet heel goed hoe ze de opgave aan wil pakken. Ze laat zich niet door mij van de wijs brengen, maar wil eerst zelf nog eens uitvinden hoe het nou precies zit met dat stijgend en dalend. Ook de leraar respecteert haar aanpak. Hegeman: *"Ik probeer bewust naar een wat intuïtiever benadering van de stof te streven."*
Mevr. Aukema heeft een extra opgave paraat voor die leerlingen die haast door de stof heen zijn. De leerlingen uit Lelystad zijn zeker gemotiveerd om de extra opgave aan te vatten. Met de probleemstelling en de wiskundige vertaling daarvan hebben ze niet zoveel moeite. Het gebrek aan technische vaardigheden (een gevolg van de Middenschool-onderbouw) breekt hen echter op.
De drie voorbeelden zeggen iets over hoe de leerstof aanslaat bij de leerlingen, maar er is meer. De voorbeelden kunnen ook als kapstok dienen om wat dieper in te gaan op vragen als:
- Wat is er tot nu toe veranderd in de vierde klas?
- Welke invloed hebben de tien volgscholen op het experiment?
- Waarom doen deze drie scholen mee aan het experiment?

Het Strabrecht College

Enkele leden van de wiskundesectie van het Strabrecht College kunnen gerekend worden tot de fervente aanhangers van de opvattingen over wiskunde-onderwijs van het voormalige IOWO. Vanuit die achtergrond is het niet zo verwonderlijk dat deze school meedoet aan de HEWET-experimenten: de leerstof die thans ontwikkeld wordt voor wiskunde A sluit hier goed bij aan. Bovendien ziet de sectie mogelijkheden om door de druk die van het nieuwe bovenbouw-programma uit zal gaan, ook het onderbouw-programma aan te passen. In de vierde klas worden alle hiervoor ontwikkelde IOWO/OW & OC boekjes gebruikt, terwijl er plannen zijn om over te gaan op de Wageningse Methode. Eén van de docenten: *"Als je in de vierde klas niet met pakketjes werkt, is de overgang naar de vijfde helemaal zo groot. Dan valt het de leerlingen rauw op hun dak."*
De school telt maar liefst zes Atheneum-4 klassen (twee A-klassen en vier B-klassen). Men is het schooljaar begonnen met Functies en Grafieken. Zowel Van der Kooy als zijn collega Jansen vonden de leerlingen bij het doorwerken hiervan erg passief, ze zaten vooral te absorberen wat de docent voorkouwde. Dit was voor hen aanleiding om Differentiëren I middels groepswerk door te werken. Zoals Dhr. van der Kooy het zegt: *"Er komt helemaal niks op het bord."*

Het lijkt me juist om op deze plaats nog eens te benadrukken dat het HEWET-team absoluut niet de pretentie heeft om de docenten die aan het experiment deelnemen voor te schrijven welke werkvormen gehanteerd zouden moeten worden. Daarentegen vindt het HEWET-team het wél de moeite waard om aandacht te schenken aan mogelijke werkvormen, al is het maar om duidelijk te maken dat waar de leerstof verandert, het wenselijk is dat de vraag naar de meest geschikte werkvormen daarbij opnieuw gesteld wordt. Uiteindelijk zal echter de individuele docent moeten kiezen voor bijv. groepswerk of klassikale behandeling, afhankelijk van de leerstof, de leerlingen en eigen voorkeuren.

Succes en mislukking

De docenten uit Geldrop grepen zoals gezegd de veranderingen aan om met groepswerk te experimenteren. Groepswerk is niet iets dat van zelf goed gaat, dat moet geleerd worden. Van der Kooy heeft de leerlingen van zijn twee B-klassen een papier uitgereikt met daarop de door te werken stof, een globale tijdsplanning (de stof wordt verdeeld over 20 lessen) en de volgende opmerkingen over het werken in groepen:

- *Werk samen; voel je verantwoordelijk voor je groep.*
- *Spreek onderling af wat je doet in de les en thuis.*
- *Vraag zo weinig mogelijk aan de docent; probeer samen oplossingen te vinden en toets die zélf op de juistheid.*
- *Domineer niet (altijd) binnen de groep. Geef anderen de kans om minder goede/even goede of zelfs betere ideeën te spuien dan die jij in je hoofd hebt.*
- *Luister naar elkaar.*
- *Probeer om vraagstukken maximaal op te lossen, d.w.z. volsta niet met ja/nee of iets dergelijks maar ga ook eens na waarom zo'n vraag op die plaats gesteld wordt. Zoek argumenten.*

Het is nogal wisselend hoe deze opzet in de praktijk uitvalt. In sommige groepen werkt iedereen in feite voor zichzelf, in andere groepen werken de leerlingen gelijk op, spreken onderling huiswerk af e.d. (*"We gaan niet te snel, want dan verveel je je aan het eind en niet te langzaam want dan krijg je het niet af"*).
Dhr. van der Kooy beschouwt het groepswerk zoals dat nu plaatsvindt echter nog maar als een eerste begin.
Ook in de A-klas van Dhr. Jansen wordt in groepen gewerkt. De les die ik bijwoon verkeert het groepswerk echter in een kritieke fase; een groot deel van de leerlingen is er vrij negatief over:
"We liggen met die stof zover uit elkaar dat je er niks aan hebt."
"Ik wil gecontroleerd worden, ik wil dat de leraar eisen aan mij stelt."
Bovendien hebben een aantal leerlingen in een voorgaand jaar nogal negatieve ervaringen opgedaan met groepswerk, waardoor ze er al bij voorbaat hun twijfels over hadden.
Later vertelt Jansen mij dat in de volgende les in overleg met de klas besloten is om weer van het groepswerk af te stappen. Zelf vindt hij dat erg jammer.

Reacties van leerlingen

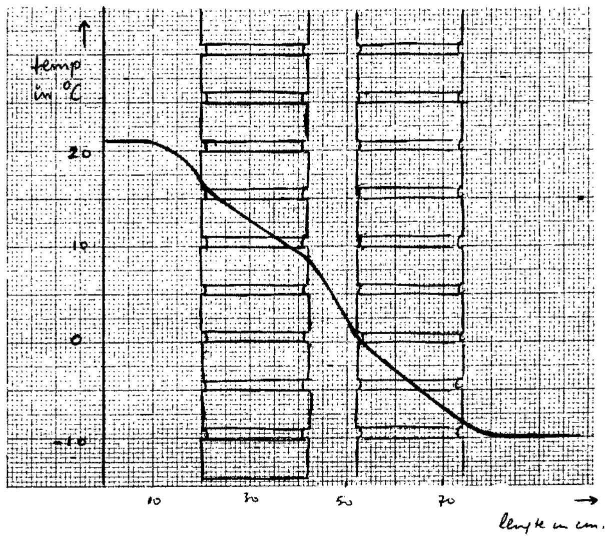
De reacties van de B-leerlingen op het boekje Differentiëren zijn overwegend positief, al schromen ze niet om ook kritische geluiden te laten horen. De A-leerlingen zijn minder tevreden. Vorig jaar werd Moderne Wiskunde gebruikt. Een greep uit de reacties:

- *Vroeger maakte je tien sommen zonder het te snappen, nu is elke som anders.*
- *Van elke som is er maar één, dus je kunt niet oefenen.*
- *Je moet veel meer nadenken.*
- *Er staat geen theorie in, dus je kunt niks nazoeken.*
- *Moderne Wiskunde is overzichtelijker, de roze bladzijden met samenvattingen zijn handig om wat op te zoeken.*
- *Er staan geen antwoorden in, als je het niet snapt, kun je niet verder.*
- *Als je vroeger oplette in de les en je huiswerk niet deed, kwam je er toch wel. Nu moet je alle sommen zelf doen.*
- *Dit is moeilijker, maar wel leuker.*
- *De uitvoering van het boek is soms kinderachtig.*
- *Dit is makkelijker, en leuker.*

Bij deze opsomming moet de kanttekening gemaakt worden, dat de reacties op het boekje sterk interfereren met de reacties op het groepswerk. Uit de reacties proef ik enigszins de tendens dat de in wiskunde toch al onzekere A-leerlingen het gevoel hebben dat hen hun laatste zekerheid, de rijtjessom, ontnomen is. Een signaal waar niet geheel aan voorbij gegaan kan worden, want uiteraard moet voorkomen worden dat de potentiële wiskunde A-leerling voortijdig afknapt op A-achtige opgaven.

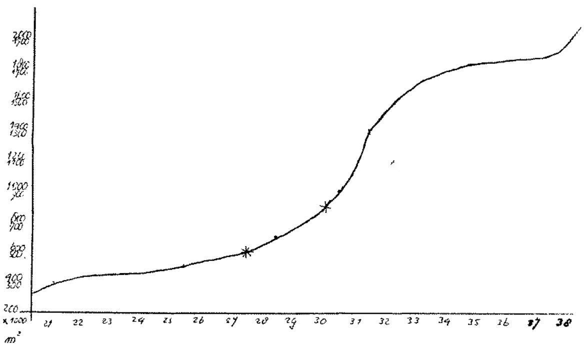
Zelf toetsvragen bedenken

Een ander experimenteel extraatje in de B-klassen was het geven van de opdracht aan de leerlingen om zélf toetsvragen te bedenken over het eerste deel van het boek. Een tweetal van de vele verzonnen opdrachten wil ik U niet onthouden:



Opdracht 1

In de figuur staat een grafiek afgebeeld van het temperatuursverloop in en om een spouwmuur.
a. Bepaal de gemiddelde temperatuurdaling in de binnenste muur (°C/m).
b. Bepaal dit ook voor het begin van de daling tot het einde van de daling.
c. Waar daalt de temperatuur het snelst? (interval van 10 cm). Wat is daar de gemiddelde daling?
d. Maak een grafiek van de temperatuursdaling.



Opdracht 2

Dit is een grafiek van de oppervlakte aan verharde wegen in de periode 1920–'40 in Eindhoven.
- *In welk jaar is er het meest geasfalteerd/verhard?*
- *Is er een periode waarin niet geasfalteerd is?*
- *Wat is de gemiddelde verandering in de grafiek?*
- *Hoeveel "weg" bezit Eindhoven in 1927? en in 1925?*
- *Hoeveel "weg" is in het interval [1930–'32) ontstaan? Bereken hiervan de "snelheid".*
- *Maak een hellingfunctie.*
- *Wat is de stijging in het punt A? en in het punt B (berekenen)*

Uit deze toetsvragen blijkt duidelijk dat het lezen en tekenen van grafieken volgens de leerlingen een belangrijke plaats inneemt in de eerste helft van het boekje Differentiëren. Dat hebben ze goed begrepen.

Het Heymans College

Op het Heymans College moeten de grote veranderingen nog komen. De school is enkele jaren geleden van Moderne Wiskunde overgestapt op Sigma, en de docenten zien zich nu voor de taak gesteld om een soepele overgang van Sigma naar HEWET te bewerkstelligen. Bepaald geen sinecure!
De sectie heeft de gulden middenweg gekozen: in de eerste helft van het jaar worden de onderwerpen functies, differentiaalrekening en goniometrie aan de hand van een dictaat met hier en daar wat ondersteuning van het boek behandeld, gedurende de tweede helft worden de boekjes Exponenten en Logaritmen, Kansrekening en Functies van twee Variabelen gedaan. Het ziet er naar uit dat deze opzet goed loopt, maar arbeidsintensief is het wel. Op deze manier probeert de sectie een brug te slaan tussen de oude en de nieuwe situatie. Hier en daar ontstaan onvermijdelijk wat aansluitingsproblemen: zo wordt de afgeleide van $\sqrt{x}$ behandeld vóórdat de gebroken exponenten aan de orde zijn geweest. Dat wordt dan opgelost door $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ als regel te geven.
Op het moment van dit schrijven moet de grote verandering, het overgaan op pakketjes, nog beginnen. Een leerling die ik vraag wat er tot nu toe voor hen veranderd is, beperkt zijn antwoord dan ook tot de mededeling dat het uurtje wiskunde II is komen te vervallen in de vierde klas en dat in plaats daarvan aardrijkskunde verplicht geworden is. Hij vindt dit geen vooruitgang.

De leerlingen van het Heymans hebben bij de inleiding diffentiaalrekening al heel wat aan techniek gedaan, veel meer dan de leerlingen van het Strabrecht. Daar staat tegenover dat ze veel minder aan toepassingen hebben gedaan, alleen ter afsluiting van het onderwerp kregen de leerlingen van de B-klas van Dhr. Jansen enkele toegepaste opgaven voorgeschoteld, waarvan er hier één volgt:

> *De brandstofkosten van een stoomlocomotief zijn (bij benadering) evenredig met het kwadraat van de snelheid.*
> *Vele jaren geleden kostte deze brandstof per uur f 100,– bij een snelheid van 40 km per uur. De verdere kosten bedragen f 400,– per uur ongecht de snelheid.*
> *Bij welke snelheid waren de totale kosten per km minimaal?*

Er is hier sprake van een toepassing in de meest letterlijke zin van het woord: eerst wordt de (wiskundige) theorie behandeld en als "kroon" op het werk volgen de toepassingen.
Voor leerlingen die nog nauwelijks training gehad hebben in het opstellen van formules bij problemen, is dit type opgaven verre van eenvoudig. Het zal dan ook geen verbazing wekken dat het proces van mathematiseren dat bij een vraagstuk als het bovenstaande vereist is, de leerlingen veel moeite kostte.

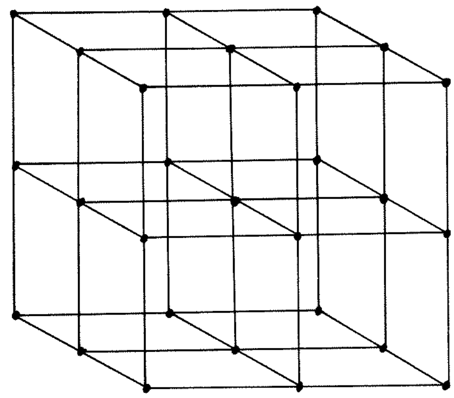
Vinger aan de pols

Ik ben nieuwsgierig waarom het Heymans College, verder niet zo'n op vernieuwing gerichte school, zich indertijd heeft opgegeven voor de experimenten. Jansen en Hegeman noemen o.a. de volgende argumenten:
- de herverkaveling is een goede zaak;
- ze hebben een leuke wiskunde sectie en wilden wel eens wat nieuws gaan doen;
- als je er vanaf het begin bij bent, kun je nog een vinger aan de pols houden bij de leerstofontwikkeling.

In de praktijk valt dit laatste niet mee, want het is moeilijk om een oordeel te vellen over materiaal waar je niet mee gewerkt hebt.
Het eerste en het laatste argument geven samen een belangrijk spanningsveld aan. Enerzijds vermoed ik dat de meeste mensen het erover eens zijn dat de herverkaveling een goede zaak is, anderzijds kan het niet anders dan dat er meerdere opvattingen bestaan over hoe de invulling van het nieuwe programma het beste uitgewerkt kan worden.
De uitwerking die er thans door het HEWET-team aan gegeven wordt, is zonder meer in de geest van het HEWET-rapport, maar het is uiteraard niet de enig mogelijke. Dhr. Jansen vindt dat de nieuwe leerstof te sterk gekoppeld wordt aan bijv. groepswerk (wat overigens zeker niet de bedoeling is van het HEWET-team, zie eerder) en hij spreekt de wens uit dat er ook een wat klassiekere benadering van de wiskunde A zal komen.

Middenschool Lelystad

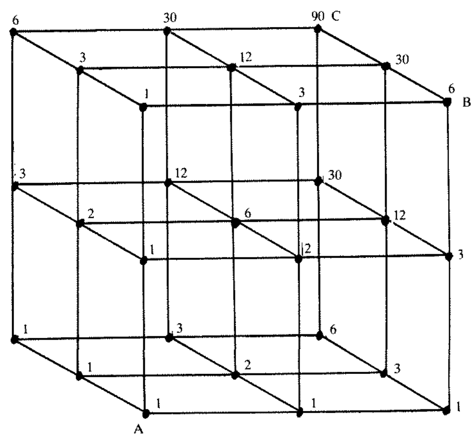
De middenschool is natuurlijk een verhaal apart, met een heel eigen problematiek. Al vóór het eerste voorlopige HEWET-rapport werd hier gewerkt aan een andere wiskunde opzet voor de eerste drie jaar, wanneer alle basisschoolverlaters heterogeen over mentorgroepen verdeeld zijn met per klas slechts enkele toekomstige VWO-leerlingen.
Er werd toen, zo'n 8 à 9 jaar geleden, gedacht over verschillende vormen van bovenschool waar de leerlingen naar door zouden stromen.
Deze eerste drie jaar wordt gewerkt met basisstof die praktisch gericht is, met veel open problemen die op verschillende niveaus aangepakt kunnen worden. Daarnaast is er bij elk leerpakketje verrijkingsstof. Er wordt veel IOWO-materiaal gebruikt, verder zelf ontwikkelde leerstof. Abstracte algebra komt hierbij weinig aan de orde.
De bovenschool is er (nog?) niet, maar de wiskunde A sluit in elk geval véél beter aan op deze middenschoolwiskundemethode dan de traditionele 4 athemeneum boeken deden. Hier geven de OW & OC pakketjes dan ook geen problemen bij de grotere gerichtheid op de werkelijkheid en de open vraagstelling. Wel moet er extra aandacht besteed worden aan het bijspijkeren van algebraïsche vaardigheden zoals het oplossen van een 1e en 2e graads vergelijking, merkwaardige produkten en het exact noteren van berekeningen.
Bij de toekomstige A-leerlingen hoeft aan dit laatste – voor hen na de middenschoolwiskunde moeilijke onderdeel – nu niet zo veel aandacht besteed te worden, en de werkelijk exact ingestelde leerlingen die wiskunde B zullen gaan doen, zijn graag bereid nu hun opgaven ook vakkundig exact te formuleren! De OW & OC pakketjes worden bijna allen, in iets gewijzigde vorm (vanwege het bovenstaande) gebruikt, verder een eigen goniowerkboek. Er werd al een paar jaar niet meer met een leerboek gewerkt.
Over één aspect van de herverkaveling voelt Mevr. Aukema zich onzeker: *"Hoe ben ik zo creatief om zelf contextrijke proefwerken en schoolonderzoeken te maken?"*
Inderdaad een probleem, als een nieuwe opgave niet langer uit een oude ontstaat door wat getalletjes te veranderen. Hier ligt ongetwijfeld een taak voor het HEWET-team en straks voor de boekenschrijvers. Daarnaast zit er niks anders op dan oren en ogen wijd open te hebben, in de hoop "de wiskunde te zien zitten". Eén voorbeeldje daarvan deed zich voor toen we, bezig aan een sightseeing Middenschool, door een open ruimte kwamen die opgesierd was met muurschilderingen van dubieuze kwaliteit.
Eén ervan had iets van een kubus en zag er zó uit:



Deze figuur riep bij mij de volgende associatie op.

Vat de figuur eens op als een steiger, bestaande uit horizontaal en vertikaal gemonteerde buizen. Het is mogelijk om over de buizen te lopen, resp. er langs omhoog te klimmen.
Vraag: Hoeveel wegen (met lengte zes buizen) zijn er van links-onder-voor-naar rechts-boven-achter?

Het probleem is niets anders dan een soort driedimensionale generalisatie van de driehoek van Pascal. Door eerst de mogelijke weggetjes te tellen in alleen het voorvlak, van links-voor-onder (A) naar rechts-voorboven (B), komt daar een stukje van de driehoek van Pascal tevoorschijn. Zo ook voor linkerzijvlak en ondervlak.

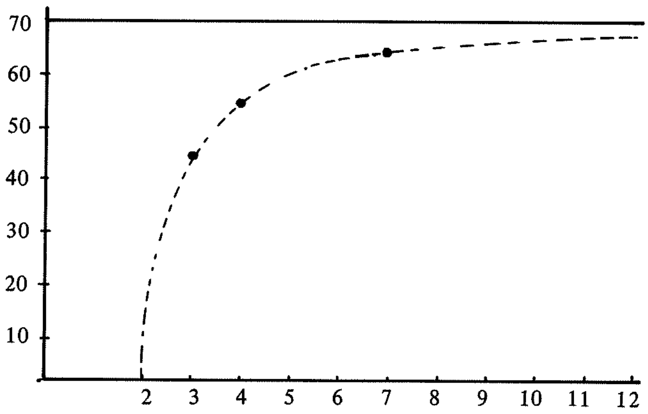


Het invullen van de rest van het patroon is dan niet moeilijk meer en het blijkt dat er maar liefst 90 weggetjes van A naar C zijn!

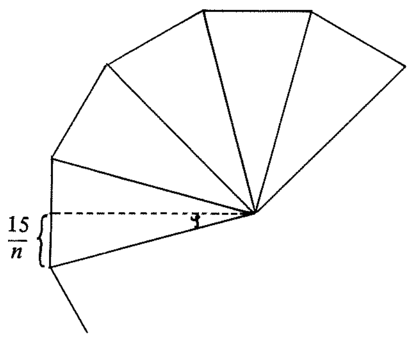
Daarnaast kan de leerstof zélf een bron van ideeën zijn: de leerstof schept als het ware haar eigen extra stof. Ik gaf al het voorbeeld van camping Mierenhoop, waar Mevr. Aukema de opdracht had gegeven om te onderzoeken welke situatie optimaal is bij een driehoekig kavel. In één van de klassen had dit voorbeeld nog een aardig staartje.

Van driehoek naar cirkel

Cyprian heeft in het kader van deze opgave ook nog uitgerekend hoe groot de oppervlakte is van een regelmatige zeshoek met een omtrek van 30 meter. Intuïtief voelt hij aan dat van de zeshoeken met vaste omtrek de regelmatige zeshoek de grootste oppervlakte heeft.
We verleggen het probleem nu naar de vraag hoe de oppervlakte van een regelmatige veelhoek met omtrek 30 samenhangt met het aantal hoekpunten. We zetten de oppervlaktes van gelijkzijdige driehoek (opp. 43.27), vierkant (56.25) en regelmatige zeshoek (64.94) eens naast elkaar en het blijkt, niet tot onze verbazing, dat de oppervlakte toeneemt met het aantal hoekpunten van de veelhoek. De limietsituatie wordt natuurlijk gevormd door een cirkel met omtrek 30 (opp. 71.64).
In een grafiek zie je de ontwikkeling heel duidelijk:



In de les komen we niet veel verder hiermee, maar thuis denk ik er nog eens over na hoe de oppervlakte van een regelmatige n-hoek met vaste omtrek uit te drukken valt als functie van n. Later vertelt mevr. Aukema me dat het probleem ook haar niet losliet en we blijken tot hetzelfde resultaat gekomen te zijn:



Een regelmatige n-hoek kan opgebouwd worden uit n driehoeken, die elk oppervlakte $\frac{15}{n} \cdot \frac{15}{n \tan \varphi}$ hebben, waarbij $\varphi = \frac{\pi}{n}$

Dus de oppervlakte van een n hoek wordt

$$A(n) = \frac{15^2}{n.\tan\frac{\pi}{n}}$$

Met behulp van de standaardlimiet $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ blijkt na enig omwerken

$$\lim_{n \to \infty} \frac{15^2}{n.\tan\frac{\pi}{n}} = \frac{15^2}{\pi}$$

En inderdaad is de oppervlakte van een cirkel met omtrek 30 gelijk aan $\frac{15^2}{\pi}$.
Zo blijkt het boekje Differentiëren ook voor de vlugge leerling of de echte B-leerling heel wat mogelijkheden in zich te hebben.

Op een rijtje gezet

Iedere school is uniek, en de bovenstaande beschrijvingen van de drie scholen kunnen dan ook niet meer dan een exemplarische functie hebben. Ik denk echter dat uit de beschrijvingen enkele tendenzen te halen zijn, die ook voor andere scholen van belang kunnen zijn. Samenvattend zou ik de volgende aspecten nog eens aan willen halen:

- De herverkaveling is noodzakelijk.
- Iedere school moet zélf het vierde klas probleem oplossen, anticiperen op wat komen gaat is een goede zaak.
- Nieuwe leerstof kan aanleiding geven om verder met het eigen onderwijs te experimenteren en bijv. de keuze van de te gebruiken werkvormen te heroverwegen.
- Teveel tegelijk veranderen heeft gevaarlijke kanten.
- De nieuwe leerstof vraagt van de leerlingen en van de leraar een andere houding, het realiseren daarvan kost tijd.
- Er dient voorkomen te worden dat potentiële wiskunde A leerlingen afknappen op A-achtige wiskunde.
- Het kunnen mathematiseren, een wiskundig model op kunnen stellen bij een probleem, is een vaardigheid apart die veel oefening vereist.
- Het nieuwe leerplan zoals omschreven in het HEWET-rapport is een eenduidig gegeven, de uitwerking ervan wordt in de experimentele fase sterk bepaald door het HEWET-team, maar op den duur zullen ook andere uitwerkingen volgen.

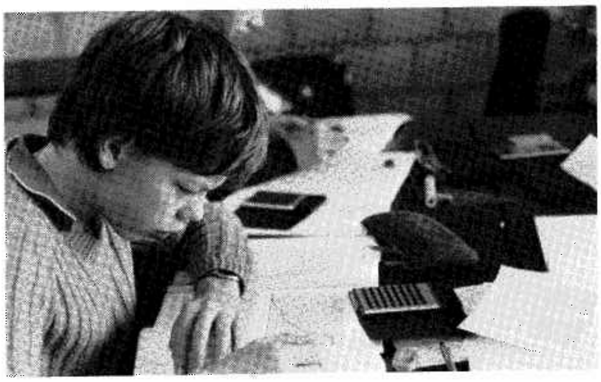
Twee belangrijke vragen heb ik laten liggen, omdat het op het moment van dit schrijven nog te vroeg is om er veel over te kunnen zeggen. De vragen zijn echter belangrijk genoeg om hier te noemen, en ze zullen in de toekomst zeker de nodige aandacht krijgen:
Welke leerlingen zullen wiskunde A gaan kiezen, welke wiskunde B en welke allebei?
Voor welke leerlingen zal het vierde klas programma eindonderwijs zijn?
Er zijn grote verschillen te constateren in de wijze waarop de drie scholen hun vierde klas programma aangepast hebben en waarop ze tegen wiskunde on-

derwijs aankijken. In dit opzicht zullen de aan het experiment deelnemende scholen wel een aardige afspiegeling vormen van de VWO-scholen in Nederland. Dat kan alleen maar een voordeel zijn.
Er is echter ook een belangrijke overeenkomst tussen de docenten van de tien scholen: een grote betrokkenheid bij het experiment en een flinke dosis enthousiasme.

Van normatief naar administratief?

Binnen de onderwijskunde wordt wel de volgende indeling gehanteerd als het gaat om veranderingsstrategieën:

- *de administratieve* benadering: het realiseren van een onderwijsvernieuwing is voornamelijk een organisatorische aangelegenheid;
- de *educatieve* benadering: voor het realiseren van een onderwijsvernieuwing is bijscholing/nascholing van de betrokken docenten een noodzakelijke voorwaarde;
- de *normatieve* benadering: voor het realiseren van een onderwijsvernieuwing is het noodzakelijk de opvattingen van de betrokken docenten over wat goed onderwijs is, te beïnvloeden.



Wat is er nu van toepassing op de HEWET?
In elk geval is er een administratieve component: de herverkaveling in wiskunde A en B zal met een grote waarschijnlijkheid worden doorgevoerd. De experimenten dienen er vooral voor, om te zorgen dat de innovatie niet alléén een administratieve kant heeft. Van de twee experimenteerscholen in Haarlem en Zevenaar kan gezegd worden dat één en ander zeer normatief is: de deelnemende docenten staan zowel innerlijk als uiterlijk achter datgene waar ze mee bezig zijn.

Op de nascholingsbijeenkomsten die thans voor de docenten van de tien tweede fase scholen gehouden worden, blijken zowel de verschillen tussen de docenten in opvattingen en interesse, als ook de gezamenlijke betrokkenheid en inzet. Gevolg is, dat de sfeer zodanig is, dat positieve en negatieve kritiek in opbouwende zin altijd gespuid kunnen worden, wat de kwaliteit van de experimenten zonder meer ten goede komt.
Mijns inziens heeft de benadering van de tien volgscholen een normatieve en een educatieve component: de nascholing zorgt voor het educatieve aspect en het enthousiasme van het HEWET-team en van de docenten zelf staan garant voor het normatieve aspect.
Voor de periode daarna wordt het echter spannend. Het lijkt me onwaarschijnlijk dat de veertig derde fase scholen even sterk betrokken zullen raken bij het experiment, gewoonweg omdat ze minder dicht bij de bron zitten. De nascholingscursussen voor deze scholen zullen verzorgd worden door de docenten van de Universitaire Lerarenopleidingen, die zelf in mindere mate bij het experiment betrokken zijn dan het HEWET-team. Ik vermoed dat de benadering van de veertig scholen daardoor vooral educatief van aard zal zijn en dat het normatieve aspect meer op de achtergrond zal raken.
Bij de landelijke invoering tenslotte (in één keer 430 scholen erbij) zal voor een aantal scholen misschien zelfs gelden dat de docenten nog nauwelijks nageschoold zijn en zich niet betrokken voelen bij de voorafgaande experimenten. Voor deze scholen zal de innovatie vooral een administratieve aangelegenheid kunne zijn, waarbij ook de educatieve component sterk verminderd is.
Het lijkt me dus waarschijnlijk dat met de vordering van het experiment de betrokkenheid van de deelnemende scholen af zal nemen. De keerzijde van deze ontwikkeling is, dat de greep die het HEWET-team op de deelnemende scholen heeft, ook af zal nemen.
Zover is het echter nog niet, maar het lijkt me een goede zaak om deze mogelijke ontwikkeling onder ogen te zien, want dat is de eerste voorwaarde om je tegen de gevaren ervan te wapenen. En dat lijkt me hard nodig, want er zijn in onderwijsland in het verleden al heel wat veranderingen doorgevoerd die uiteindelijk geen vernieuwing, laat staan een verbetering bleken te zijn...
Op de tien volgscholen zal het echter volgend jaar allemaal wel lukken, zoals het in Haarlem en Zevenaar ook heel aardig lukt. En dat dan niet in de laatste plaats dankzij de inzet en het enthousiasme van de betrokken docenten.