

Zeker in wis-kunde

Haaien in de Noordzee

Rijkje Dekker

RU Utrecht

Summary

What is confidence in and outside mathematics?

The author discusses with two people their ways of verifying: a girl that has just started using IOWO workbook at school, and a young researcher, who works in a new mathematic field. Both of them explore their areas in virtually the same way. All they know and believe to know is used to support their ideas.

Een van de laatste tentamens voor m'n doctoraal was functietheorie. Ik had het, omdat ik er geen zin in had, helemaal opgeschoven tot het eind.

Het viel me tegen.

Ik wilde de theorie, die me, eenmaal bezig, was gaan boeien, in m'n vingers krijgen, maar dat scheen niet de bedoeling te zijn.

"Je moet gewoon de trucs leren, want het gaat er alleen maar om dat je ze goed kan toepassen."

Ja, alles goed en wel, maar ik wil het begrijpen. Niet alleen heb ik een hekel aan trucs, maar ik word er ook heel onzeker van als ik dingen moet gebruiken die ik niet echt snap. Ik onthoud ze dan ook niet goed.

"Je moet niet die theorie je eigen willen maken. Dan wil je je iets eigen maken wat door heel wat wiskundigen over een behoorlijk lange tijd is ontwikkeld. Onbegonnen werk."

Daar zat wat in. Sommen oefenen dan maar, met de trucs en proberen om toch een globaal beeld te krijgen van de theorie. Voor het houvast.

Wat anders was dat, toen ik voor het eerst in aanraking kwam met een vak als intuïtionisme. Daar werd gerammeld aan de heilige grondvesten van de wiskunde, aan de klassieke logische principes. Onbetrouwbaar werden die genoemd.

Alles is waar of niet waar?

Onzin! Dat is in het gewone leven toch ook niet zo? Je hebt toch niet altijd een overzicht over het geheel? Weet jij of er tien zevens achter elkaar in de reeksontwikkeling van het getal pi voorkomen?

Nou dan!

En als je iets wilt bewijzen of iets wilt maken in de wiskunde en je wilt dat ik daarin met je meega, zeg dan goed, welke constructies je gebruikt, welke weg je gaat. Wiskunde is constructief, creatief. En zekerheden zoek je maar ergens anders. In de achterliggende ideeën misschien.

Zo stimulerend als het intuïtionisme voor de ontwikkeling van de wiskunde was, zo was het ook voor mij. Ik voelde me eindelijk een beetje thuis in de wiskunde. In m'n gewone leven ben ik over een heleboel dingen niet zo zeker. Als mensen iets stellig beweren heb ik de neiging dat te bekritisieren, te relativieren, dóór te vragen. Sommige mensen vinden dat prettig, anderen lastig. Maar zo vorm ik me globale ideeën, pas ze aan en scherp ze aan. Mijn zekerheden dat zijn een paar heel globale ideeën. Over wat goed is. Hoe de wereld eruit zou kunnen zien. En dat is toch wel weer gek, want zo kan het gebeuren dat ik eigen ervaringen die niet kloppen met de ideeën vergoelijk, relativeer en driftig argumenten zoek om maar te tonen dat ze in strijd zijn met m'n idealen. Maar eigen ervaringen die m'n ideeën ondersteunen die blaas ik fel op; gebruik ze als onomstotelijk bewijs naar anderen toe en naar mezelf. Heeft "zeker weten" te maken met "willen weten"? Wat is er zo zeker in wiskunde en daarbuiten? Laat ik er maar eens met een paar anderen over praten. Die een beetje met hun benen op de grond staan.

Eva Soutendijk

12 jaar.

1e klas van een middenschool;

begint net het terrein van de wiskunde te verkennen.

Ik: "Je bent nu bezig met het pakketje 'Verpakkingen' van het IOWO. Heb je al zelf modellen gemaakt?"

Eva: "Ja, van een kubus en van een piramide."

Ik: "Zoek je zelf veel uit of legt Kees, je leraar, vaak dingen uit?"

Eva: "Ik wil veel zelf uitzoeken, dan begrijp ik het goed."

Ik: "Maar als je nu ergens niet uitkomt?"

- Eva: "Dan vraag ik het wel aan Kees, die weet er wel meer van. Hij heeft ervoor geleerd. Maar dan moet ik wel het gevoel hebben dat het klopt wat hij zegt. Anders ga ik het zelf nog wel even na, op een kladje of zo.
Kees legde mij een keer uit hoe je een kubusuitslag kan vouwen tot een kubus. Dat stelde ik me voor in m'n hoofd en toen wist ik dat het klopte. Toen heb ik ook in m'n hoofd bedacht hoe je een piramide kan vouwen. Hoe zo'n uitslag er dan uit moest zien en waar ik plakrandjes moest maken."
- Ik: "Heb je dat dan nog gecontroleerd?"
- Eva: "Ik heb de piramide wel gemaakt omdat ik dat leuk vond. Maar ik wist al zeker dat het zou lukken."
- Ik: "Vertelt Kees wel eens dingen die helemaal nieuw voor je zijn?"
- Eva: "Soms, maar dan heb ik het toch al eens gezien, of weet ik het van iets anders, dan kan ik het vergelijken en dan wil ik het wel aannemen."
- Ik: "Leggen andere kinderen je wel eens wat uit bij wiskunde? Neem je wel eens wat van ze aan?"
- Eva: "Kinderen die ik niet vertrouw daar ga ik niet op af. Een paar wel, maar dan moet ik zelf wel het gevoel hebben dat het klopt. Zoals Kitty. Maar laatst bij volleyballen zei Kitty dat ik m'n handen zo moest houden en Luiz, onze gymleraar, zei dat het precies andersom moest. Toen heb ik toch maar gedaan wat Luiz zei. Ik weet er zelf helemaal niks vanaf. Ik vind volleyballen niet leuk."
- Ik: "Gebruik je wel eens trucjes bij wiskunde die je niet echt begrijpt? Of bij rekenen?"
- Eva: "Ja, bij staartdelen heb je zo'n truc om te controleren of het goed is. Maar ik weet niet meer hoe dat zat. Ik houd niet van rekenen. De tafels weet ik ook niet goed. Dan ga ik maar optellen, maar dat gaat weer zo langzaam. En breuken, op de lagere school kon ik al die sommetjes maken, maar nu snap ik het niet meer."
- Ik: "Vind je dat je bij wiskunde veel dingen moet aannemen?"
- Eva: "Nee, je moet juist alles zelf uitzoeken. Daarom vind ik het ook zo leuk."
- Ik: "En in je gewone leven, vind je dat je dan veel dingen moet aannemen?"
- Eva: "Ja, maar ik wil wel zelf veel uitzoeken."
- Ik: "Neem je veel van je ouders aan?"
- Eva: "Ja. Ik weet eigenlijk niet waarom."
- Ik: "En van andere kinderen?"
- Eva: "Als ik ze vertrouw, als ze niet liegen. Nou ja, iets kleins dat mag wel, als niemand er last van heeft. Maar je moet andere kinderen toch wel vertrouwen. En als ik weet dat iemand iets zegt dat volgens mij niet waar is, dan ga ik naar diegene toe. Dan wil ik weten waarom die dat zegt."
- Ik: "Hoor je wel eens dingen die je niet wilt geloven?"
- Eva: "Ja, als ze gemene dingen over Surinamers zeggen. Dat vind ik gemeen! Surinamers zijn toch niet anders? En als ze zouden zeggen dat Anjouska me niet aardig vindt. Dat wil ik niet geloven."
- Ik: "Geloof je het als ze zeggen dat er haaien in de Noordzee zwemmen?"
- Eva: "Nee, dat geloof ik niet."
- Ik: "Maar ga je dat dan niet navragen bij andere mensen?"
- Eva: "Dat heeft geen zin. De een gelooft zoiets wel en de ander niet."
- Ik: "En als het 's avonds op het journaal is?"
- Eva: "Zo'n filmpje kan je overal maken. Het klopt gewoon niet."
- Ik: "Waarom niet?"
- Eva: "Nou, toen ik klein was gingen we naar Joegoslavië. Daar was het heel warm en daar waren heel soms haaien en ook dolfijnen. Dolfijnen leggen hun jongen op het strand, geloof ik. Maar dat weet ik niet zeker. Maar het zijn wel zoogdieren en haaien niet."
- Ik: "Je weet dus al heel wat van haaien af?"
- Eva: "Ja."
- Ik: "Maar als je nu iets hoort waar je niks vanaf weet?"
- Eva: "Nee, dat komt niet voor, denk ik. Je weet er toch altijd wel iets vanaf."
- Ik: "Ik vind je een echte onderzoeker. Eva."
- Eva: "Ja. Ik ga nu zelf moccasins maken van leer. Ik weet nog niet precies hoe dat moet."

Ieke Moerdijk

24 jaar.
wiskundige;
verkent nieuw terrein: topstheorie.

- Ik: "Als ik het goed begrepen heb dan heb je pas een topologisch model gebouwd waarvan de inwendige structuur interessant is voor het intuïtionisme?"
- Ieke: "Ja, samen met Gerrit van der Hoeven. Gerrit weet veel van intuïtionisme en ik van topstheorie en dat hebben we gekoppeld. Het artikel daarover moet nog verschijnen."
- Ik: "Maar je hebt er toch wel al praatjes over gehouden?"
- Ieke: "Ja, in Duitsland, Engeland en Canada. Ik weet niet of ze er altijd iets van snapt. Wel heb ik bij het laatste praatje in Canada geprobeerd het globale idee van ons werk zo helder mogelijk uit te leggen. Het publiek had daar de meeste voorkennis."
- Ik: "Zijn er voor jou nu nog autoriteiten op je vakgebied?"
- Ieke: "Jawel, Joyal en Hyland, daar oriënteer ik me op. Als Joyal aangeeft welke vragen er op m'n vakgebied belangrijk zijn om aan te werken, dan ga ik daar wel op af."
- Ik: "Waarom zij?"
- Ieke: "Omdat zij in vakliteratuur vaak genoemd worden. Joyal publiceert nauwelijks, maar naar zijn stellingen wordt regelmatig verwezen en Hyland heb ik een aantal keren op congressen gesproken."
- Ik: "Als er nieuwe informatie op je afkomt op je vakgebied, slik je dat dan als zoete koek, of trek je alles na?"
- Ieke: "Als van een artikel of een praatje het idee dui-

delijk is en voor m'n gevoel wel klopt wil ik het wel aannemen. Ik ben dan niet zo kritisch op bewijzen en uitwerkingen. Die kan ik zelf ook wel leveren.

Als de eindresultaten van een artikel me erg boeien dan ga ik zo'n bewijs wel helemaal na. Dat interesseert me. Vooral hoe het bewijs in elkaar zit, welke constructies er gebruikt zijn. Ik denk dat ik daar veel van kan leren, dat het me een betere kijk op m'n vak geeft."

- Ik: "En als het globale idee nu niet duidelijk is?"
- Ieke: "Dan ga ik het stap voor stap na, in de hoop dat het duidelijk wordt. Ik ben nu bezig met een artikel van Joyal en Tierney van 90 bladzijden lang, waar ik de grote lijn niet goed van zie. Dat werk ik bladzij voor bladzij door."
- Ik: "Gebruik je wel eens trucs of hints die je niet helemaal begrijpt?"
- Ieke: "Als ik ze gebruiken kan wel, ja. Daar heb ik geen morele bezwaren tegen. Dat kan ik later nog wel eens precies natrekken."
- Ik: "Wat doe je nu met stellingen of zo, die volgens je gevoel niet kloppen?"
- Ieke: "Dan ga ik de bewijzen heel kritisch bekijken en probeer fouten te zoeken. Het overkomt me regelmatig dat ik iets bewijs wat voor m'n gevoel niet kan. Daar lig ik dan wakker van."
- Ik: "Hoe zit dat nu in je gewone leven, buiten de wiskunde bedoel ik. Hoe verifieer je dan?"
- Ieke: "Daar heb ik eigenlijk geen mensen op wie ik af kan gaan. Geen autoriteiten zoals op m'n vakgebied, want die kan ik niet bepalen omdat ik vind dat ik van veel zaken te weinig afweet. Bijvoorbeeld van kernenergie. Ik weet niet precies hoe dat zit met voor- en nadelen, dat zou ik heel goed moeten uitzoeken. Maar dat zo'n anti-kernenergiebeweging af en toe met berichten komt waar dan niets van blijkt te kloppen, daar erger ik me aan."
- Ik: "En dan is zo'n hele beweging voor jou ook niet meer aannemelijk?"
- Ieke: "Ja, nee, in elk geval moeilijk aannemelijk. Hoewel ik nou ook niet kan zeggen dat ik absoluut vóór kernenergie ben. Maar, zoals ik net al heb gezegd, als ik me over dat soort zaken echt een goed idee wil vormen, dan zou ik het helemaal gaan uitzoeken. Net zoals op m'n vakgebied."
- Ik: "Geloof jij het als ze zeggen dat er haaien in de Noorzee zwemmen?"
- Ieke: "Jawel. Als het bijvoorbeeld in de krant staat of op het journaal komt, dan ga ik daar wel op af. Dat zijn toch makkelijk verifieerbare feiten! Hoewel, als ze zouden zeggen dat twee Egmondse vanaf een duintop een paar haaienvinnen hebben gezien, dan geloof ik dat niet direct. En helemaal niet als ik zeker zou weten dat zoiets niet kan, biologisch gezien. Je laat het me toch wel vantevoren lezen, hè?"

Citaten

"Gezien-hebben is geen weten. En verwachten-te-zullen-zien evenmin. Maar die herinnering en die ver-

wachting in onmiddellijk evenwicht is onmiddellijke wetenschap, dat is waarneming die boven gewaarwording uit is."

G. Mannoury, *Mathesis en Mystiek*, 1924.

"Het bewijs is voor alles een gevoel, in de beste gevallen een gedeeld gevoel."

P. Berloquin.

"A good proof is one which makes us wiser."

Yu. I. Manin, *A Course on Mathematical Logic*, 1977.

"Indeed every mathematician knows that a proof has not been 'understood' if one has done nothing more than verify step by step the correctness of the deductions of which it is composed and has not tried to gain a clear insight into the ideas which have led to the construction of this particular chain of deductions in preference to every other one."

N. Bourbaki.

"As we learn from our mistakes our knowledge grows, even though we may never know – that is, know for certain. Since our knowledge can grow, there can be no reason here for despair of reason. And since we can never know for certain, there can be no authority here for any claim to authority, for conceit over our knowledge, or for smugness."

K.R. Popper, *Conjectures and Refutations*, 1969.

"It has not yet been sufficiently realised that present mathematical and scientific education is a hotbed of authoritarianism and is the worst enemy of independent and critical thought."

I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, 1976.

En tenslotte weer Mannoury die de grote Brouwer, bezig met het ontwikkelen van het Intuitionisme, vriendelijk op de vingers tikt:

"De wiskunde is een menselijk maaksel, een menselijk bedenkfel, waarin geen andere waarheid ligt, dan die betrekkelijk is tot menselijke taal, bedoeling en samenleving. Uw boek is een daad van denkmoed en een uitvloeisel van verkregen hooger inzicht, doch die denkmoed en dat inzicht, ... ze zijn "onaf"! Maak u los (maar geheel los) van alle conventie en afspraak, van alle taal en alle woordenbouwels, en ik ben er zeker van, dat gij zult komen tot de erkentenis (die de eenig-ware grondslag is van de mathesis): er is geen onveranderlijke waarheid en geen onveranderlijke maat voor de waarheid, er is geen absolute eenheid, geen absolute ruimte en geen absolute tijd, er is geen wiskunde."

G. Mannoury, *Boekbeoordelingen*, De Beweging, jaargang 3, deel 3, 1907.

School

In de Nieuwe Wiskrant van maart 1981 schreef G. Schoemaker een stukje over verifiëren bij wiskunde onder de titel: "Lange termijndoelstellingen op de lange baan."

De kern van z'n artikel verwoordde hij zo:

"Wiskunde – het Nederlandse woord verwijst ernaar –

heeft alles te maken met zeker willen weten, met verifiëren. Verifiëren houdt in, zelf nagaan, daarbij teruggaand naar de eigen ervaringen.”

Hij pleit verder voor een manier van onderwijs, die deze houding tot verifiëren bij leerlingen ontwikkelt. Het sprak me erg aan.

Ik denk dat in veel onderwijs de houding tot verifiëren wordt afgeleerd.:

“Vergeet wat je weet. Hier krijg je hele nieuwe dingen te horen” was mijn eerste confrontatie met de wiskunde. Axioma's, definities, stellingen, bewijzen, sommen maken en trucs toepassen, zo zag het eruit. Formalistische wiskunde. De weg naar zelf verifiëren was afgesneden, of verengd tot een controle van stappen in het bewijs. Het had niets meer met mezelf te maken.

Als ik Eva zo hoor is er hier en daar toch wel wat veranderd. Haar onderzoekshouding, die ze thuis, in de buurt en in de projecten op de lagere school heeft kunnen ontwikkelen, komt haar bij de wiskunde, die ze op de middenschool krijgt, van pas. Weer een terrein om te verkennen. Zelf uitzoeken, ze wil niets liever. Haar ervaringen met rekenen waren heel wat slechter.

Het kwam haar getrukt over. “Niet leuk.”

Verpakkingen bekijken, beschrijven. Modellen zelf ontdekken, maken, weer openknippen, van binnen bekijken. Vormen van de zijvlakken verkennen, benoemen: rechthoek, vierkant, driehoek. Dat trekt haar aan.

Ze zal wel geen keurige definities weten die ik uit m'n hoofd heb moeten leren (ik ken er geen één meer). Maar ze zal de vormen wel kunnen aanwijzen en op

haar manier eigenschappen formuleren. Die aanscherpingen komen later wel, als ze ze nodig mocht hebben, als ze preciezer gaat kijken naar de vormen en middelen zoekt om ze met andere vormen te vergelijken en van andere te onderscheiden.

Zelf kreeg ik het heel anders. Eerst lijnen, punten, dan lijnstukken. Daarna vierkanten en veel later pas, als we er echt aan toe waren, zo werd er gezegd, kubussen. Jammer, want toen pas vond ik het leuk: ik zag het. Die opbouw lijkt op formalistische wiskunde: een dood eindprodukt waar alle levende inhoud uit wegge laten is, een bolwerk van zogenaamde zekerheden op een dubieuze manier afgeleid uit nietszeggende aannames. Brouwer ging er aan het begin van deze eeuw al tegen tekeer. Maar eigenlijk is het nu, op de universiteit, vaak niet veel anders. En misschien op veel scholen ook niet.

Terrein verkennen? Ho maar!

Blind een smal paadje bewandelen achter de meester aan met alle kans op vallen of verdwalen. Nee, dan ziet wiskunde “in de maak” er wel heel wat anders uit: Globale ideeën vormen, beweringen, voorbeelden, tegenvoorbeelden, bewijzen, tegenwerpingen, verbeterde beweringen en definities. Modellen bouwen, openmaken, interne structuren bekijken en vergelijken met andere, bekendere terreinen in de wiskunde. Ieke kan ervan meepraten.

Zo zou het terrein voor kinderen, voor wie het toch ook nieuw is, ingericht kunnen worden. Ze zouden het kunnen verkennen met alles wat ze al weten en voelen, niet als last, maar als houvast.