De herkenning van wiskundige essenties in realistische probleem-situaties

A. van Streun
RU Groningen

Summary

Present-day mathematics education has trained the students in such a way that they always intent on acquiring solution procedures as soon as possible for very specific types of problems, which gives little scope to the development of productive ability and strengthen the inability in case of problems difficult to recognize at once. In applied problem-solving our students have big difficulties in recognizing the mathematical structure of the given problems. The author states, that teachers have to develop the ability of our pupils to actively extract from the given terms of a problem the information maximally useful for its solution. Heuristic methods, like trying examples of numbers, drawing a figure and other translation skills, could be helpful.

Realistische probleemsituaties

Claude Janvier (1) heeft in zijn promotie-onderzoek de moeilijkheden van leerlingen bestudeerd bij de interpretatie van grafieken van realistische situaties, zoals de plaats-snelheid grafiek van een racecircuit, de groeikrommen van meisjes en jongens, de ontwikkeling van de omvang van een populatie microben e.d.
In zijn conclusies waarschuwt hij de leerplanontwikkelaars, dat realistische situaties niet mogen worden opgevat als *de* aangewezen concretiseringen van abstracte begrippen. Naar zijn mening is het nog een open vraag welke rol realistische situaties in het wiskundeonderwijs kunnen vervullen. De *herkenning* van wiskundige begrippen in realistische probleemsituaties vraagt een vermogen tot *abstraheren* van de wiskundige essenties, dat slechts geleidelijk kan worden ontwikkeld. Het *heen en weer* kunnen switchen van de oorspronkelijke situatie naar een grafische of symbolische weergave kan volgens Janvier wel eens samenhangen met wat traditioneel de intelligentie wordt genoemd. In dat veronderstelde geval doen dergelijke realistische probleemsituaties een sterk beroep op de aanwezige verhaal-abstracte intelligentie van leerlingen.
Ook in de studie van het OW en OC "Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas" (2) wordt gediscussieerd over de plaats en de functie van contextproblemen, nu in relatie tot de opbouw van algoritmen. De (enkelvoudige) contextopgaven voor vermenigvuldigen en delen dienen zó te worden gekozen, dat te veel ruis wordt voorkomen èn in de voor de hand liggende kinderlijke oplossingsmethoden de te leren algoritme-procedures kunnen worden herkend. Aldus de auteurs.
Het is mijn bedoeling om in dit artikel aan de hand van enkele leservaringen in 4 VWO in te gaan op die *herkenning* van wiskundige essenties in realistische probleemsituaties. Wat is dat, die herkenning? Hoe belangrijk is dat? Valt het te leren?

De autokosten en de gasrekeningen

Enkele lessen zijn de leerlingen van het Andreas College (Drachten) bezig geweest met de autokosten van de wiskundeleraar van het Ichthus College (Drachten), Henk Meijer. Het benzineverbruik, de gemiddelde literprijs, het functievoorschrift voor de benzinekosten, de variabele kosten (onderhouds- en reparatiekosten) en het functievoorschrift voor de totale autokosten voor 1982 worden besproken en gekoppeld aan de grafieken voor 1982. (figuur 1 en figuur 2).

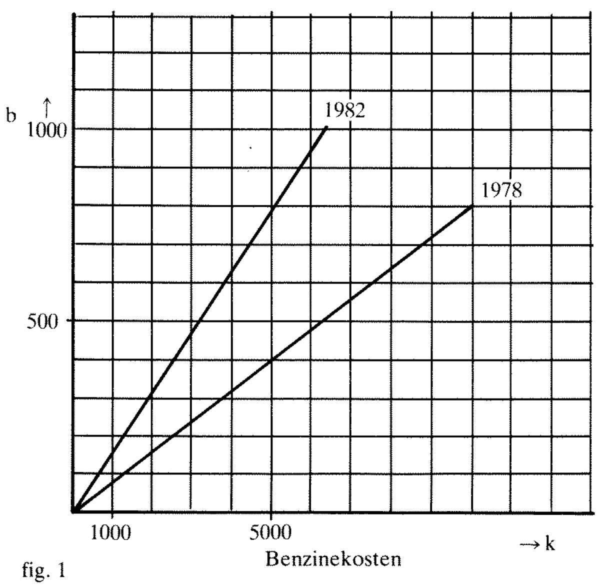

fig. 1

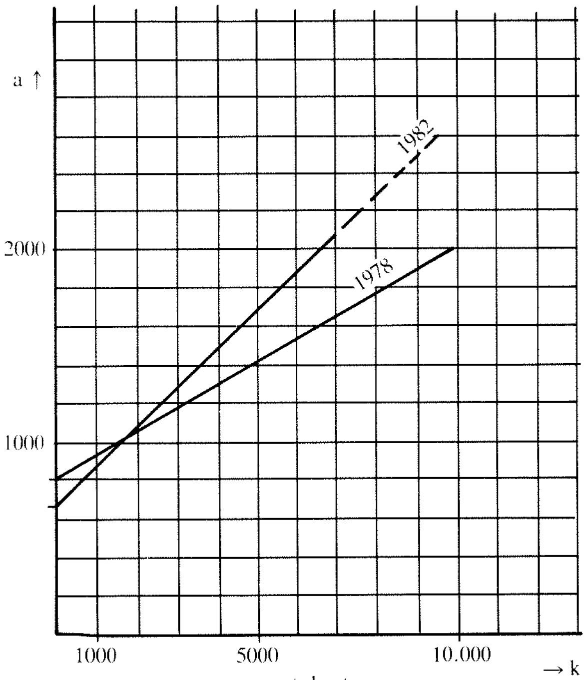

fig. 2

Met behulp van de grafieken gaan de leerlingen dezelfde vragen voor 1978 na. Vervolgens wordt de stap naar de eerstegraadsfunctie f(x) = mx + n en de vergelijking van de lijn y = mx + n gemaakt (figuur 3).

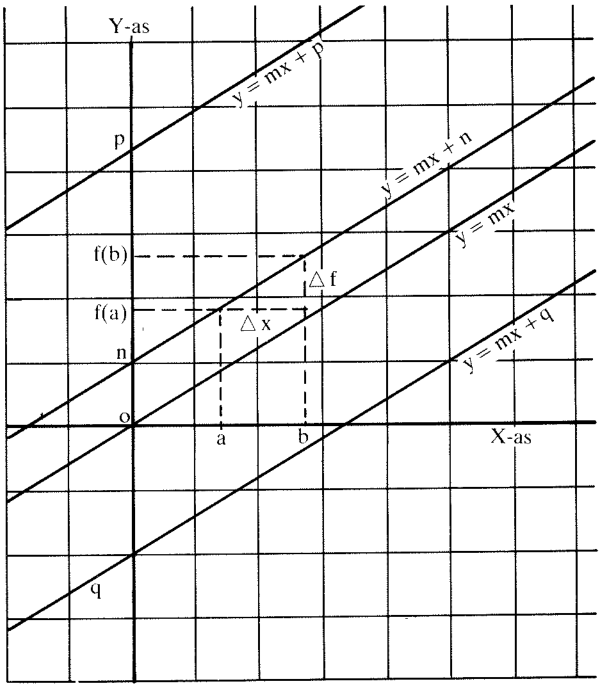

fig. 3

Om de vaardigheid in het opstellen van het functievoorschrift van eerstegraadsfuncties nog even te oefenen, maken de leerlingen nog een viertal "kale" opgaven. (De punten (18,60) en (8,7) van de grafiek zijn gegeven, enz.). Dat gaat vlot.
Dan volgt probleem 2:

In 1981 gebruikten wij voor koken en verwarming 5867 m³ gas, waarvoor ik in totaal f 2821,– betaalde. Onze buren verbruikten 5345 m³ gas en dat kostte hen f 2575,–.

Ik veronderstel, dat in beide gevallen hetzelfde tarief was toegepast, maar ik weet niet meer de prijs per m³ en het verschuldigde bedrag aan vastrecht.
- *Kun jij daar uit komen?*
- *Stel het functievoorschrift op.*

Even luisteren bij de groepen

In mijn klas hebben de groepjes als huiswerk o.a. het maken van probleem 2 afgesproken. De uitwerkingen, die voor in de klas liggen, worden (gelukkig?) totaal genegeerd. Er ontstaan in de groepen hevige discussies. Het merendeel van de leerlingen heeft thuis het bedrag van de gasrekening rechtstreeks gedeeld door het aantal verbruikte kubieke meter gas. Daardoor komen ze op twee verschillende prijzen per kubieke meter gas uit. Enkele leerlingen vinden dat wel wat vreemd en ronden zodanig af, dat er toch dezelfde prijs uitkomt. In de groepjes proberen de leerlingen elkaar te overtuigen *in termen van vastrecht en prijs per kubieke meter*. Na ruim een kwartier komen alle groepen toch tot het functievoorschrift k(g) ≃ 0,47 g + 63 of iets dergelijks.

De herkenning

Nadat alle groepjes aan de volgende paragraaf ("Groeikrommen") zijn begonnen, wandel ik belangstellend bij de verschillende groepjes langs.
"Lukte het wat met die gasrekening?"
"Ja hoor. Zie maar."
"Hebben jullie ook een verband gezien met de oefenopgaven en met de autokosten?"
Over die samenhang hebben ze nog niet nagedacht. Maar als we erover praten, *achteraf*, is er de *herkenning*. Oh, ja!
Twee lessen later hoor ik Anke (vanaf de geluidsopname) aan haar groepje uitleggen hoe het functievoorschrift eruitziet van de lineaire functie, die de groei van Klaas (figuur 4) benadert.

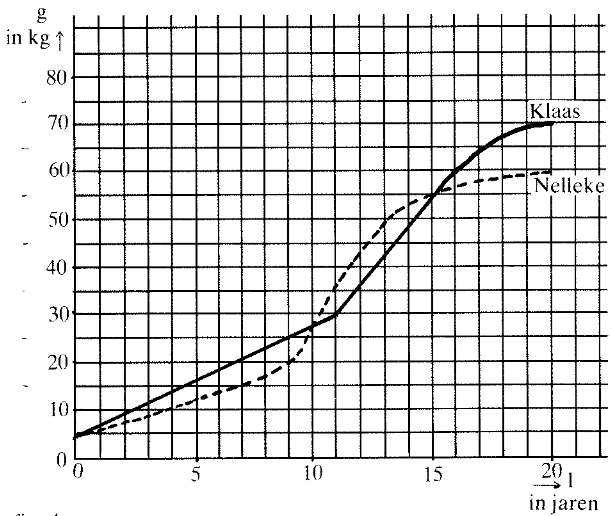

fig. 4

Anke: *"Kijk, je tekent de lijn en neemt gewoon twee punten (0,5) en (20,70). Dan kun je het functievoorschrift g(l) = m.l + n maken. De richtingscoëfficiënt is m, dan deel je (70 – 5) door (20 – 0)."*

Aaldert is nog niet zover. Hij zit met de m, l en n in de knoop. Ook de hulp van Anke is niet voldoende.

Anke: *"De leeftijd is gewoon l. Je ontwikkelt een formule."*

Aaldert: *"Je weet de leeftijd toch wel?"*

Anke: *"Jawel. Maar je wilt het voor elke leeftijd kunnen invullen. Je zet gewoon l. Als ze een bepaalde leeftijd hebben, dan kun je het gewicht berekenen."*

Keimpe gaat even terug naar de bekende notaties en dat leidt tot *herkenning*.

Keimpe: *"Het is net als met* $f(x) = 3x + 5$. *Dan weet je x ook niet. Daar kun je wat voor invullen. Je weet dat bij de leeftijd* $l = 20$ *het gewicht* $g = 70$.*"*

Bij de latere benadering van de groei van Nelleke door een functie, die wordt opgebouwd uit drie lineaire functies, *tekent* de groep drie lijnstukjes en slaat direct aan het rekenen met de gekozen twee *punten* per groeitraject.

Wat is dat, die "herkenning"?

Iedere leraar kent, denk ik, wel het verschijnsel dat sommige leerlingen onmiddellijk in een nieuwe opgave de *essentie "herkennen"*, die deze opgave met anderen gemeen heeft. Het klassieke rekenonderwijs kende de zogenaamde "arbeidsommen" en "kranensommen".

"Arbeider A doet 9 dagen over het werk, arbeider B 12 dagen. Hoe lang doen ze er samen over?"

"De ene kraan vult de olietank in 9 uur, de andere kraan in 12 uur. Als ze allebei open staan, hoe lang duurt het vullen dan?"

Sommige leerlingen klassificeren deze opgaven als behorend tot hetzelfde type. Voor anderen (de meesten?) betekende elke *nieuwe "verpakking"* weer een heel *nieuw probleem*.

De Russische psycholoog Krutetskii heeft gedurende tien jaar leerlingen in het wiskunde-onderwijs gevolgd in hun ontwikkeling, om de verschillen op te sporen tussen de leerlingen die meer en die minder goede resultaten boeken. Een belangrijk verschilpunt tussen beide groepen leerlingen is te herleiden tot het meer of minder goed kunnen "herkennen" van het *algemene* (b.v. van $(\square + \triangle)^2$) in het *concrete* (b.v. in $(6ax + \frac{1}{2}by)^2$). De "kale *verbanden* tussen de onderdelen, die het probleem of de wiskundige uitdrukking karakteriseren als behorende tot een bepaald type, blijven over. "Zwakke" leerlingen blijven steken in de waarneming van de geïsoleerde gegevens van het probleem. En stranden dan ook bij het merendeel van de *redactieopgaven* over snelheden, leeftijden, inhouden enz. enz. (3).

Als van leerlingen wordt verwacht, dat zij b.v. in de natuurkundeles (of bij scheikunde of in de techniek of bij een economisch vak) wiskunde gaan gebruiken, dan duikt onmiddellijk het probleem van de "herkenning" op. En "knappe bollebozen" onder onze leerlingen herkennen de *essentie* (gewoon een eerstegraadsvergelijking, alleen niet in x en y maar in u en v), terwijl "zwakkere" leerlingen b.v. voor elke chemische berekening een nieuw algoritme proberen in te prenten. Zoals wij ook zo vaak zien gebeuren in ons wiskunde-onderwijs. (Zie b.v. "Heuristisch wiskunde-onderwijs" (4).

Hoe kunnen wij die "herkenning" bevorderen?

In de gangbare schoolboeken van het MAVO-HAVO-VWO en in de lespraktijk van elke dag wordt de moeilijkheid van de "herkenning" veelal vermeden door het *opsplitsen* van de leerstof in heel kleine eenheden van typen opgaven, waarvoor de type-oplossing wordt ingetraind. "Zwakke" leerlingen kunnen die specifieke oplossingsmethode voor dat specifieke type opgave uit het hoofd leren en op het proefwerk reproduceren. Daarna volgt een nieuwe paragraaf met een ander type opgaven, terwijl de vorige specifieke oplossingsmethode wordt vergeten. Met als gevolg dat leerlingen geen samenhang vasthouden en voortdurend opnieuw in de eens geleerde technieken en begrippen moeten worden onderwezen. "Herkenning" buiten de bewuste paragraaf komt binnen de wiskunde al nauwelijks tot stand, laat staan daarbuiten.

Ga je in het wiskunde-onderwijs over op het aanbieden van allerlei min of meer realistische probleemsituaties, die op het oog nauwelijks iets met elkaar gemeen hebben, dan wordt het *leren* herkennen van de (wiskundige) essentie van zo'n situatie erg belangrijk. (Als je tenminste niet op voorhand leerlingen, die de overeenkomsten niet *zien*, als dom of ongeschikt wilt afvoeren.) Zo kom je op het terrein van de meer algemeen toepasbare methoden, *de probleem-aanpakmethoden, de wiskundige activiteiten* of *de heuristische methoden*. Zijn die te onderwijzen? Kunnen we zo voor "zwakkere" leerlingen meer structuur aanbrengen, zonder dat dit ten koste gaat van de toepasbaarheid van hun wiskundige kennis en vaardigheden?

In het project "Heuristisch wiskunde-onderwijs" (5) wordt systematisch aandacht besteed aan de *"vertaalvaardigheden"*, waaraan Janvier grote waarde toekent bij het gebruiken van realistische situaties in het wiskunde-onderwijs. Het betreft het kunnen omzetten van de ene manier van beschrijven van een probleemsituatie in een andere. Psychologisch gezien kan zo'n vertaling worden opgevat als een transformatie van het probleem, die tot herkenning van een wiskundige aanpak of een wiskundig begrip kan leiden. De vertaalvaardigheden, die volgens Janvier meer systematisch moeten worden onderwezen, zijn o.a.:

- rechtstreeks plotten vanuit een vergelijking of een functievoorschrift;
- rechtstreeks tekenen vanuit de beschrijving van een situatie;
- een vergelijking/functievoorschrift uit een grafiek afleiden;
- een verschijnsel rechtstreeks uit een grafiek beschrijven;
- het gebruik van grafische methoden als globale benaderingen.

In een didactiek van wiskunde-onderwijs, waarin uitgegaan wordt van realistische situaties en waarin het kunnen gebruiken van wiskundige begrippen en methoden buiten de wiskundelessen een belangrijk leerdoel is, zal de ontwikkeling van deze "vertaalvaardigheden" en van soortgelijke vaardigheden (b.v. het

kunnen geven van een voorbeeld) veel aandacht moeten krijgen. Niet alleen omdat deze vaardigheden op zich al waardevolle leerdoelen betekenen, maar ook omdat leerlingen die deze vaardigheden hebben leren gebruiken, daardoor beter in staat zijn in nieuwe probleemsituaties de essentie eruit te lichten en het probleem aan te pakken.
In het hoofdstuk over toepassingen van de differentiaalrekening komt de volgende opgave uit "Differentiëren 1" (6) voor:

Een supermarkt verkoopt potjes vruchtenyoghurt (inhoud 1/2 l) tegen de adviesprijs van f 1,80.
Er worden wekelijks zo'n 1000 van die potjes omgezet. Dat betekent dus een opbrengst van f 1800,–.
De bedrijfsleider schat, dat elk dubbeltje prijsverlaging een omzetverhoging van 100 potjes tot gevolg heeft.
De laagst mogelijke prijs is f 1,20; dat is namelijk de prijs waartegen de potjes worden ingekocht.

► *17. De bedrijfsleider heeft een wiskundig model gekozen.*
Stel: p = de verkoopprijs in centen en q = de omzet.
Beschrijf het model van de bedrijfsleider met een algebra-formule die het verband vastlegt tussen p en q.

De vorige lessen hebben de leerlingen in tweetallen aan dergelijke opgaven gewerkt, terwijl ze voor deze les thuis de laatste opgaven hebben afgemaakt.
"Meneer, hoe stel je nu zo'n functievoorschrift op?" De oplossingspogingen worden geïnventariseerd. In het lesmateriaal en in de vorige lessen is erop geattendeerd dat het wel eens handig is om eerst wat *getallenvoorbeelden* te zoeken of een *tabel* te maken. Dit om een idee te krijgen van wat er eigenlijk aan de hand is. Alle leerlingen hebben dat nu ook gedaan.

Klaas: *"Dat* zie *je zo. Het maximum is 1600 en daar trek je 10(p – 120) vanaf, want het verschil is steeds 10 cent."*
De klas valt stil in verbijstering, zij *zien* het niet.
Jelmer: *"Uit het tabelletje zie ik dat het 2800 – 10p is. Even puzzelen."*

Nog twee leerlingen kwamen er zo uit. Bij het laatste "werkstuk van de maand" hebben ze op die manier de formules voor rijen opgespoord. De echte puzzelaars van de klas hebben we nu gehad.

Ewout: *"Ik heb eerst maar eens een grafiekje getekend. En toen zag ik dat het een lijn werd, dus een eerstegraadsfunctie."*

De klas veert nu op, meer leerlingen hebben het zo gedaan. Anderen herkennen nu de aanpak (met een grafiek) en weten nu hoe het verder kan. Ewout werkt de opgave verder uit met de richtingscoëfficiënt ($\triangle$p en $\triangle$q) en nog een punt, terwijl anderen de methode uit de economieles toepassen, twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Het bakje

Bij de toepassingen van de differentiaalrekening behoren natuurlijk een aantal maximum/minimumproblemen, die in een situatiebeschrijving worden aangeboden. Evenals bij de klassieke ingeklede vergelijkingen bezorgt het opstellen van een functievoorschrift veel leerlingen hoofdbrekens. In het werkstuk van de maand oktober wordt dat voorbereid met het bekende probleem van het vouwen van een bakje uit een vierkant of rechthoekig stuk karton.

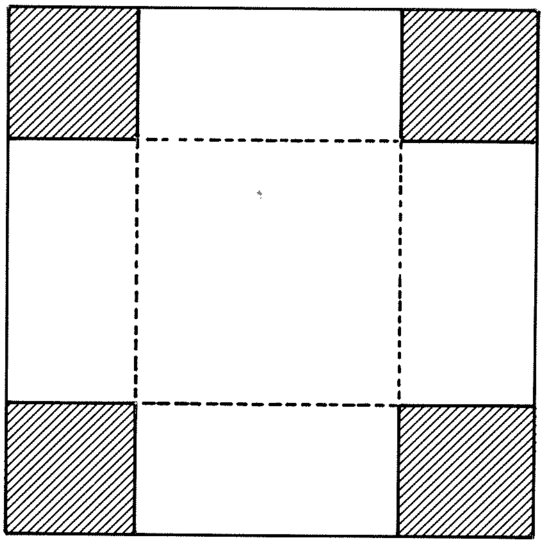

fig. 5

Dan nog zonder differentiaalrekening door het proefondervindelijk laten uitzoeken, het opstellen van een tabel, het tekenen van een grafiek en tenslotte de vraag naar het functievoorschrift. Diezelfde heuristische aanpak wordt gevolgd bij de maximum/minimumsituaties, als toepassing van de differentiaalrekening. Eerst maar eens een *getallenvoorbeeld uitproberen* en een *tabelletje* maken. Dan wordt de structuur van de situatie duidelijk, waarna de variabele grootheid x (of p of l of ...) kan worden gesteld. Een algemene benadering voor dergelijke problemen die middelmatige en zwakkere leerlingen helpt bij de *herkenning* van de essenties in de situatie. De knappe bollebozen hebben na enige tijd zo'n aanpak niet nodig. Zoals Klaas opmerkte: "Meneer, die sommen zijn toch allemaal hetzelfde. Dat zie je toch meteen."

Wiskunde bij andere vakken?

Wie kent niet de klacht van de docenten natuurwetenschappen, economie e.a. over het niet-functioneren van wiskundige kennis in hun lessen? Dat heeft te maken met systeemscheiding in het geheugen van de leerlingen. Dat heeft te maken met de verknochtheid aan de x en de y in veel wiskunde-boeken. En met de moeilijkheid om te door*zien*, dat de wiskundige essentie in totaal verschillende situaties bij de natuurkunde of de economie of de biologie dezelfde is.
Onze ervaringen met een *geïntegreerde* start van de differentiaalrekening in één projectklas zijn illustratief. In de natuurkundelessen werkten de leerlingen een practicum door met tijd- en afstandmetingen van rijdende karretjes, waarbij de snelheid op een tijdstip als limiet van gemiddelde snelheden intuïtief werd ontwikkeld. In de wiskundelessen van de projectklas werd dezelfde opbouw gevolgd, maar nu ook met groei-

functies, kostenfuncties e.d. Aanvankelijk verwarrend voor deze B-leerlingen, want in de natuurkundelessen werd gewerkt met s(t), $\triangle$s en $\triangle$t, in de wiskundelessen met g(l), a(t), k(h) enz. Na een aantal weken kwam de doorbraak. "Die snelheid bij natuurkunde is een speciaal geval van de snelheid van verandering bij de wiskunde!" Die *herkenning* van de gemeenschappelijke essentie in op het oog zo heel verschillende zaken wordt weer bevorderd door de *verbinding*, die de grafische voorstellingen (de steilheid van de grafiek als maat voor de snelheid van verandering) vormen.

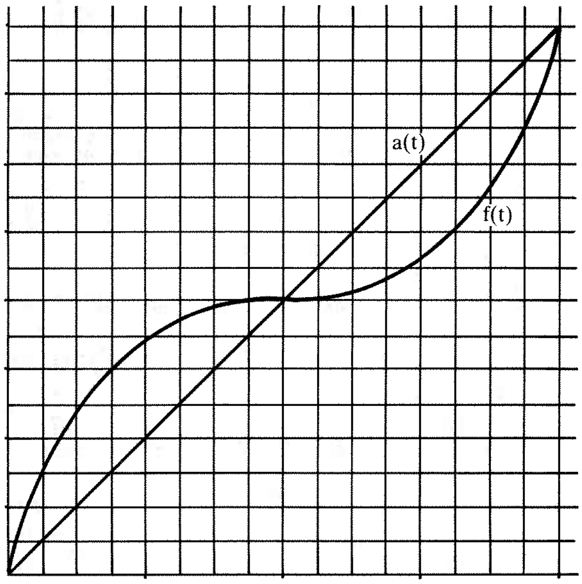

fig. 6

Zo kan figuur 6 de grafieken voorstellen van de plaats als functie van de tijd bij een verhaaltje over twee race-wagens, maar ook is figuur 6 mogelijk de grafische weergave van kosten- en opbrengstfuncties bij een in woorden beschreven situatie. In beide gevallen ben je mogelijk geïnteresseerd in de snelheid van verandering op verschillende momenten. "Wanneer hebben beide race-wagens dezelfde snelheid?"
"Bij welke produktie is de snelheid waarmee de kosten toenemen gelijk aan de snelheid waarmee de opbrengst toeneemt?" Beide vraagstellingen zijn om te zetten naar vragen over steilheden van grafieken.

Tot besluit

Het gebruik van contextproblemen bij de aanvankelijke begripsvorming en bij de verwerking vraagt om een zorgvuldige analyse van de te bevorderen denkactiviteiten van de leerlingen. De onvermijdelijke ruis in de situatie, die wordt aangeboden, vraagt van de leerlingen problem-solving bekwaamheid bij de aanpak van die situatie. Het vermogen tot abstraheren uit verschillende probleemsituaties (het herkennen van de wiskundige essentie) hangt nauw samen met verbaal-abstracte intelligentie. Om te voorkomen dat "zwakke" leerlingen onder uit gaan zal veel meer dan in het gebruikelijke wiskunde-onderwijs door de docenten en de leerplanontwikkelaars aandacht moeten worden besteed aan het methodische aspect van het leren aanpakken van (realistische) probleemsituaties. In dit artikel heb ik geprobeerd de functie van die heuristische methoden te verduidelijken.
Zowel door mijn werk als lerarenopleider, als door ons onderzoek bij eerstejaars studenten, is de geringe status van de bedoelde wiskundige activiteiten, tenminste in HAVO-VWO, mij opgevallen. "Je moet het zien." "Het moet algemeen. Met een voorbeeld begin je niets." "Tekenen? Dat doe ik nooit." "Met grafieken kun je toch niets bewijzen." Opvattingen, die een blokkade vormen bij het aanpakken van problemen, waarvan ze de oplossing niet meteen zien. (7) Waardoor deze bollebozen uit het VWO bij hun universitaire studie wiskunde voor dezelfde moeilijkheden komen te staan, als veel leerlingen die ook niet direct zien wat ze nu weer met die opgave moeten beginnen. Het "imitatieleren" waar veel leerlingen zich een tijdje mee weten te redden, blokkeert toepassing van die kennis in andere situaties. Docenten en schoolboekenauteurs doen toch vaak een beroep op dat leren door imiteren van voorbeelden, want dan "leren ze toch wat". Wiskunde-onderwijs dat gebruik maakt van een sterke variatie in (realistische) probleemsituaties vraagt niet alleen een ander leerproces van veel leerlingen, maar ook een andere didactiek van veel docenten. Het welslagen van experimenten als "Wiskunde-A" hangt af van de mate waarin het lukt die didactiek te verwoorden en docenten van de waarde ervan te overtuigen.

(1) Janvier, E., *Use of situations in mathematics education*. Educational Studies in Mathematics, 12 (1981), 113–122.
(2) Dekker, A., H. ter Heege, A. Treffers. *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*. Publicatie nr. 1 uit de reeks "Onderzoek wiskunde-onderwijs" van het OW en OC.
(3) Krutetskii, V.A. *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. The University of Chicago Press, Chicago.
(4) Van Streun, A., *Heuristisch wiskunde-onderwijs*. Pedagogische Studiën, jaargang 59, no. 718, juli/augustus 1982.
(5) Van Streun, A., *Het project "Heuristisch wiskunde-onderwijs"*. Mathematisch Instituut RU Groningen.
(6) Kindt, M., *Differentiëren* 1. IVIO Lelystad.
(7) Doornbos, W.C. en A. van Streun, *Het oplossen van wiskundige problemen in het aanvangsonderwijs analyse voor wiskundestudenten*. Mathematisch Instituut RU Groningen.