Met getallen kun je blijven spelen, maar ook ....

H.G.B. Broekman
P.D.I., R.U. Utrecht

Samenvatting

Het zoeken naar een structuur is vaak van groot belang bij het spelen met getallen. Maar dan moet er wel voor gezorgd worden dat er ook werkelijk wat te onderzoeken is; dus geen structuren laten zoeken die de leerlingen niet kunnen vinden, geen problemen aanbieden waarbij de structuur te dik opgelegd is en de leerling het gevoel geven dat hij serieus wordt genomen.

Summary

Looking for a structure is an important aspect when "playing" with numbers. Sometimes children never find this structure; in this case the structure is imposed onto the children. In other cases the problem leaves no real opening: there is no way to avoid the proper answer. When playing with numbers we should try to stimulate students with real problems and the student should be able to work at his own level.

Inleiding

Wezenlijk bij veel wiskundig bezig zijn is het zoeken naar structuur. Het zien van structuur en het omgaan ermee kan o.a. geleerd worden door de manier waarop we leerlingen laten spelen met getallen. Aan dat "spelen" zitten wiskundige én gevoelsmatige aspecten die ik via een aantal voorbeelden zal illustreren.
Voor de lezer zijn een aantal tussenvragen opgenomen, die overgeslagen kunnen worden zonder de voortgang in het lezen te bemoeilijken. Deze tussenvragen – in een ander lettertype afgedrukt – zou ik zeker stellen bij een bijeenkomst/workshop over dit onderwerp.

I Het gevoel serieus genomen te worden

Opdracht 1

Reken uit: $37 \times 3 = \ldots$ $37 \times 12 = \ldots$
$37 \times 6 = \ldots$ $37 \times 15 = \ldots$
$37 \times 9 = \ldots$ $37 \times 18 = \ldots$

Vraag 1: Enig idee hoeveel 37×21 zal zijn(is)? Hoe controleer je dat?
Vraag 2: Enig idee hoeveel 37×27 zal zijn(is)? Hoe controleer je dat?
Vraag 3: Hoeveel is 37×30? En 37×33? En 37×36?
Vraag 4: Heb je enig idee hoeveel 37×48 zal zijn(is)?
Vraag 5: ? ? ?

En die 5e vraag, daar gaat het vaak om. Het is meestal een vraag naar een onderliggende structuur, waarvan we hopen dat een leerling die zal ontdekken. En als "de" leerlingen die structuur níet ontdekken? Dan vertellen we het maar omdat ze verder moeten met het resultaat, of omdat we zelf het resultaat zo mooi vinden.
In de praktijk blijkt dan vaak dat een aantal leerlingen zeggen "Oh, is dát wat u bedoelde! Ja, dát snap ik ook wel!", of juist iets anders: "Ja, dat zal wel; dat kan ik zelf toch nooit vinden." Al deze leerlingen zullen zich knap beduveld voelen.

Vraag:
Wie heeft zelf een formule bedacht voor de in opdracht 1 gesuggereerde regelmaat? Op welk moment deed u dat? Zijn er meerdere formules mogelijk?

Extra vraag:
Heeft iemand gezocht naar een niet-rekenkundige interpretatie?

Het verder moeten met het resultaat maakt vaak dat we onze opdracht zo maken, dat de leerlingen de regelmaat wel moeten vinden (denk maar aan $a^2 \times a^3 = a^5$, etc.). Dit kan zijn door de voorkennis die leerlingen al hebben, of door de context van de opdracht (het hoofdstuk of de paragraaf). Door de uitdaging eruit te halen, lopen we een zeer grote kans dat de gevonden structuur minder sterk verankerd wordt in het geheugen; het is immers niets bijzonders. Bovendien zullen opnieuw een aantal leerlingen het gevoel hebben beduveld te worden, niet serieus genomen te worden.
Er is nog een andere mogelijkheid: de regelmaat, de structuur wordt wel ontdekt, maar er wordt verder

niets mee gedaan. Als dat vaak voorkomt, ontstaat er het vervelende idee van: "ze zetten je maar wat voor!" Ook dit levert het gevoel niet serieus genomen te worden.

II Uitdaging. Het zoeken van een redenering moet opgeroepen worden

Opdracht 2

"Hoe denk je dat deze rij voortgezet kan worden?"

$2 \times 3 = 6$
$1 \times 3 = 3$
$0 \times 3 = 0$
$-1 \times 3 =$
$-2 \times 3 =$

Opdracht 3

Ganzen kosten *f* 10,– per stuk, eenden *f* 5,– per stuk en kuikens *f* 1,– per stuk.
Een handelaar koopt 50 dieren voor *f* 100,–.
Hoeveel van elk soort koopt hij?

De opdrachten 2 en 3 hebben gemeenschappelijk dat ze precies één goede oplossing hebben. Toch zijn ze verschillend; alleen al door het feit dat er in opdracht 2 gezocht moet worden naar de regelmaat in een rij getallen en in opdracht 3 naar een oplossingsmethode.
Er is nog een ander verschil; het verschil tussen géén probleem zijn en wél een probleem zijn. Dit verschil komt voort uit het feit dat ik als leraar al heel lang weet dat er bij opdracht 2 negatief drie, resp. negatief zes moet komen. Bij opdracht 3 ken ik het antwoord niet bij voorbaat. Dat maakt dat ik daar geneigd ben een mogelijk antwoord te zoeken en zodra ik dat heb, te kijken of er soms meer zijn.
Een volgende stap, die soms samenvalt met de vorige, is het zoeken van een redenering waaruit blijkt dat er – zoals in dit geval – echt niet meer oplossingen zijn.
Dit zoeken, proberen en redeneren *is* wiskundig bezig zijn en dat wil ik de leerlingen graag leren. Daarvoor is het dan wel nodig dat ze problemen voorgezet krijgen die door hen als open ervaren kunnen worden. Dat betekent in ieder geval dat we ervoor moeten waken ze bij voorbaat de pas af te snijden door de suggestie dat wij het enig juiste antwoord al lang klaar hebben.

Vraag:
Denkt u ook dat opdracht 2 als een serieuze vraag opgepakt kan worden? Bijvoorbeeld door de manier waarop we allerlei mogelijke, redelijke(?) antwoorden laten verzinnen die we daarna serieus gaan onderzoeken?

Vraag:
Denkt u ook dat opdracht 3 als een serieuze vraag aangepakt kan worden door allerlei verschillende aanpakken (oplossingswegen) serieus te vergelijken?

III Waar gaat het om? Om de regelmaat of om het zoeken?

Opdracht 4

Nadat je de eerste drie opgaven van dit rijtje hebt gemaakt, moet je de volgende kunnen maken zónder de vermenigvuldiging uit te voeren.

$$1 \times 1 =$$
$$11 \times 11 =$$
$$111 \times 111 =$$
$$1111 \times 1111 =$$
$$11111 \times 11111 =$$
$$111111 \times 111111 =$$

Veel volwassenen, maar ook leerlingen, hebben bij dit soort opgaven het gevoel bij de neus genomen te worden. Ze zien vrij snel de regelmaat, maar denken dan dat er wel iets fout zal lopen. Dit kan de aanzet zijn tot het zoeken van een redenering.
De ervaring leert echter dat veel leerlingen de regelmaat niet kunnen ontdekken, ook niet als deze opdracht volgt op opdracht 1 of soortgelijke opdrachten. Een gevolg daarvan is dat we nogal eens geneigd zijn dit soort opgaven te verwijzen naar de puzzelrubriek. Een andere – betere – mogelijkheid is dat we dit soort opgaven meer kans geven om de leerlingen te helpen met het leren zoeken, het leren onderkennen van structuur.
Essentieel bij dat zoeken is het lef-hebben-om-eens-iets-te-proberen (het kunnen en willen werken vanuit een hypothese), het systematisch werken, het bereid en in staat zijn doodlopende wegen te verlaten. Essentieel is tevens het – indien nodig – onderzoeken waarom een weg doodloopt, om daardoor te leren andere wegen te bewandelen.
Dit alles kost zeker tijd, maar het is geen verloren tijd.

Vraag 1:
Wie onderzoekt met zijn leerlingen wel eens de volgende "bekende" optellingen?

$$\begin{array}{r} \textit{send} \\ \underline{\textit{more}} \; + \\ \textit{money} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \textit{gauss} \\ \underline{\textit{riese}} \; + \\ \textit{euklid} \end{array}$$

Vraag 2:
Wie laat z'n leerlingen wel eens opgaven maken, zoals de volgende?
Plaats de haakjes die vergeten zijn:

$a + 2 - 3a + 5 = -5a + 10$
$2a^2 - a + b + 2a^2b = 2a^2 - a + 2b$
$75 - 15 + 5 = 55$

Vraag 3:
Wie vindt de volgende opgave de moeite van het bespreken waard?
Plaats de vergeten +, –, × en : tekens.

$$1\frac{3}{4} \;?\; \frac{13}{9} = \frac{169}{36} \qquad \frac{3}{5} \;?\; \frac{3}{8} = \frac{9}{40}$$

$$\frac{169}{30} \;?\; \frac{13}{15} = \frac{13}{2} \qquad \frac{121}{28} \;?\; \frac{11}{7} = \frac{11}{4}$$

IV Plezier beleven aan spelen, zoeken én vinden

Opdracht 5

De eerste drie opgaven van de volgende serie zijn al voor je gemaakt. Neem de opgaven over en maak de rest af zonder "uit te rekenen". Controleer daarna je antwoorden door te "rekenen".

$$
\begin{array}{ll}
1 & = 1 = 1 \times 1 \\
1 + 3 & = 4 = 2 \times 2 \\
1 + 3 + 5 & = 9 = 3 \times 3 \\
1 + 3 + 5 + 7 & = \quad = \\
1 + 3 + 5 + 7 + ? & = \quad = \\
1 + 3 + 5 + 7 + ? + ? & = \\
1 + 3 + 5 + 7 + ? + ? + ? & =
\end{array}
$$

Zoals de opdracht hier gesteld is zullen maar weinig leerlingen er echt plezier aan beleven. De te vinden structuur ligt er duimendik bovenop en er is maar één goed antwoord mogelijk, nl. dat wat wij als leraar willen horen.
Is het dan niet heerlijk als een leerling vertelt nog iets anders te zien en dat beloond wordt met tijd en aandacht?

Vraag:
Wat zou u doen met een leerling die het volgende opschrijft?

$1 + 3 + 5 \qquad 1 + 5 = 6$ *en* $6 = 2 \times 3$

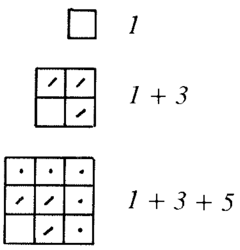
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 \qquad 1 + 9 = 10,\ 3 + 7 = 10$ *en* $10 = 2 \times 5$

$1 + 3 + 5 + 7 = 8 + 8 = 16$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 12 + 12 + 12 = 36$

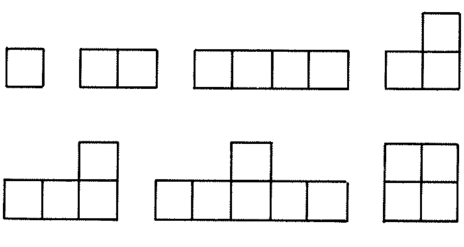
En daarna zegt: "Zo kun je er ook komen".

Vraag:
Waarom zouden veel meer leerlingen plezier aan de opgave beleven als hij gegeven wordt in de volgende vorm?



Het plezier van het spelen, zoeken én vinden blijkt voor veel leerlingen – behalve van het enthousiasme van de leraar – af te hangen van het gevoel serieus genomen te worden, hetgeen ondermeer inhoudt dat de te vinden structuur er niet te dik op moet liggen. Verder is het afhankelijk van de manier waarop de leerlingen uitgedaagd worden én de kans krijgen om halve of hele redeneringen te berde te brengen, en de kans krijgen om te leren zoeken. Voor veel leerlingen geldt tevens dat de inbedding van de vraagstelling van groot belang kan zijn. Het is mede daarom dat ik er van overtuigd ben dat we meer opdrachten zullen moeten benutten als de volgende:

Opdracht 6



a. Leg met behulp van de 7 puzzelstukjes een rechthoek. Teken deze na op roosterpapier en bepaal de oppervlakte.
b. Leg met behulp van dezelfde stukjes een andere rechthoek. Teken ook deze na en bepaal de oppervlakte.
c. Probeer nog andere rechthoeken te leggen.
d. Geef commentaar op hetgeen je in a., b. en c. gevonden hebt.
e. Kun je van deze stukjes een vierkant leggen? Verklaar je antwoord.

Vraag:
Bij welk onderwerp zou u deze vraag gebruiken?

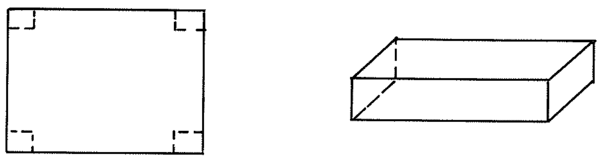
Opdracht 7

Een commandant van de BB, in het dagelijks leven wiskundige, moest de sterkte van zijn compagnie opgeven.
Hij meldde: "Als ik mijn manschappen in rijen van twee, van drie, van vier, van vijf, van zes laat aantreden, blijft op het eind altijd dat kleine mannetje alleen over. Pas als ik ze in rijen van zeven laat aantreden zijn alle rijen volledig gevuld. In totaal heb ik minder dan 500 man." Hoeveel manschappen telt de compagnie?

En tot slot een opgave, waarmee ook 5e jaars natuurkunde-studenten moeilijkheden hadden, tot ze ... gingen denken.

Opdracht 8

Neem een vel A4 papier van 29,8 × 21 cm. Knip van de 4 hoekjes een vierkantje af. Vouw het papier tot een open bakje.



Hoeveel is de inhoud van dit bakje? Knip ook kleinere resp. grotere hoekjes af. Hoeveel is telkens de inhoud? Wanneer is de inhoud maximaal? Maakt het veel verschil als je de lengte 30 cm neemt in plaats van 29,8 cm?

Vraag:
Heeft u ook brugklassers die denken dat het hoogste bakje de grootste inhoud heeft? En 6 VWO-ers die braaf gaan knippen en raar opkijken als ze een ander een derdegraads functie zien differentiëren?

V Slot

Wezenlijk voor het wiskundig bezig zijn is het kunnen spelen. Spelen in de zin van zoeken naar een structuur. Dit kan gestimuleerd worden door het enthousiasme van de leraar. Noodzakelijk daarbij is dat de leerling, zowel door de vraagstelling als door de manier waarop omgegaan wordt met zijn halve en hele redeneringen, het gevoel heeft serieus genomen te worden en de kans krijgt het spelen te leren.