

Wiskunde-onderwijs 10 tot 14

E.W.A. de Moor

SOL, Utrecht

Samenvatting

De praktijk wijst uit dat het rekenonderwijs van de lagere school in het geheel niet aansluit op de wiskundestart van het voortgezet onderwijs.

Om deze aansluitingsproblematiek op te lossen, zal er heel wat moeten veranderen. Een eerste stap in die richting zou gedaan kunnen worden door: o.a. in het basisonderwijs meer aandacht te besteden aan het inzichtelijk aanleren van rekenvaardigheden, aan het gebruiken van algoritmen in toepassingen, aan begripsvormende activiteiten en het ontwikkelen van een wiskundige attitude, aan het werken met visualiseringen en modellen. Ook het V.O. zou haar steentje bij kunnen dragen door meer aandacht aan het rekenen te besteden.

Wil men de aansluiting echt plaats doen vinden, dan zijn goede samenwerkingsverbanden noodzakelijk.

Inleiding

Bij de aansluitingsproblematiek "Basisonderwijs-Voortgezet Onderwijs" (BOVO), stuit men vanzelf op de kwestie van de eindtermen voor het B.O. en de daarbij behorende toetsingsproblematiek. In het kader van de BOVO-cursus te Amersfoort werden daartoe de zogenoemde voortgangstoetsen voor rekenen (dit zijn toetsen die gedurende het vijfde en zesde leerjaar worden afgenomen) bestudeerd. Ik deed iets, wat niet mag. Ik maakte één van de enveloppen open, waarin het werk van de kinderen van 1980 zat. Daarna analyseerde ik de opgaven, maar vooral de gemaakte fouten van die ene leerling, die ik voor het gemak Peter noem. Nadat Peter een blad vol breukensommen, zoals

$$16\frac{1}{4} + 1\frac{2}{3} \times 6\frac{3}{4} - 7\frac{1}{2} : 3$$

redelijk goed had uitgewerkt, mocht hij nog een aantal redactiesommen trachten op te lossen.

Het eerste vraagstuk luidde:

Een auto rijdt met een snelheid van 72 km per uur.

Hoe lang rijdt deze auto over een afstand van 18 km?

Peters antwoord luidde: 4 minuten(!).

De andere vraagstukken, die ook alle oplossingen te zien gaven, waarbij maar iets met de gegeven getallen gedaan werd, laat ik nu achterwege. Het vraagstuk werd door verschillende deelnemers van de werkgroep in de klaspraktijk herhaald. Het resultaat was ontvullend en teleurstellend.

In één klas kwamen 24 van de 30 leerlingen met foute

Summary

There is a gap between teaching arithmetic at primary school and teaching mathematics at secondary school. At secondary level one often assumes that children know their arithmetic, and no further attention is paid to it.

On the other hand the teaching of arithmetic at elementary level suffers from time pressure, and hardly ever surpasses the level of the learning of simple algorithms. The article offers some suggestions how to bridge the gap.

antwoorden, zoals: 4 minuten, 4 uur en 1296 (72×18) minuten of uren(!).

De ontsteltenis onder de werkgroepsleden, onderwijsgenenden uit B.O. en V.O., was groot. De klachten van de V.O.-docenten dat er te weinig aandacht zou bestaan in het B.O. voor de rekenvaardigheid, verbleekten toen men de rijen en rijen sommen zag waarmee de kinderen dag in dag uit oefenen.

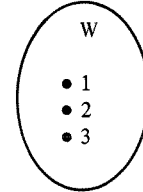
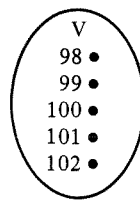
Maar ook de B.O.-docenten waren verbaasd dat hun eindeloze inspanningen de kinderen het rekenen bij te brengen zo weinig effect bleken te hebben, wanneer er een eenvoudige toepassing werd gevraagd. Dit ene voorbeeld tijdens bedoelde BOVO-cursus gaf meer reden om over vorm en inhoud van het reken/wiskunde-onderwijs na te denken dan theoretische uiteenzettingen over doelstellingen, eindtermen, leertheorieën, etc.

Ik zal proberen deze realistische aanpak, ook hierna, te blijven volgen.

Het aansluitprobleem

Voor rekenen/wiskunde is het aansluitprobleem levensgroot. Er gaapt een immens gat tussen het rekenen op de lagere school en de wiskunde van de brugklas. Er valt geen enkele continuïteit te ontdekken tussen die sommen over procenten, breuken, decimale getallen en verhoudingen op de lagere school en de wiskundestart in het V.O. met verzamelingen, letterrekenen en spiegelen. Op vele scholen voor V.O. wordt op het rekenen niet teruggekomen. In feite wordt verondersteld dat "de lagere schoolstof" afge-

rond is, door de leerlingen gekend wordt en niet verge-
ten. Op z'n vroegst wordt op rekenen pas weer een be-
roep gedaan aan het eind van de brugklas, wanneer li-
neaire vergelijkingen met gebroken coëfficiënten aan
de orde komen. Dan worden vaak klachten gehoord
als: "de leerlingen hebben geen rekenvaardigheid, een
gebrekig getalbegrip en te gering inzicht in de bewer-
kingen." Nog sterker wordt gebrek aan rekenvaardig-
heid ervaren bij de natuurkundelessen in het tweede
leerjaar en bij andere vakken, waar gerekend moet
worden, zoals bij handelskennis en aardrijkskunde.



... wordt geschreven met ... cijfers

"V.O.: Maak pijldiagrammen van relaties van V naar W. Zijn de relaties functies?"

Rekenen is ook wiskunde

Er wordt veelal een onderscheid gemaakt tussen reke-
nen en wiskunde. Vooral in Nederland wordt deze
tweedeling benadrukt. Op de Universiteit of Nieuwe
Lerarenopleiding word je opgeleid tot wiskundele-
raar. Op de Pedagogische Academie kun je onderwij-
zer, zoals dat nu nog steeds heet, worden en daar leer
je dan ook hoe je rekenen moet onderwijzen. Dit on-
danks het feit dat men op de meeste PA's al sinds jaren
over wiskunde en didactiek spreekt.

De wiskundeleraar heeft in zijn opleiding over het al-
gemeen weinig of niets van rekendidactiek gezien.
Maar hij/zij wordt door de onderwijzer van de basis-
school, die meestal weinig van de wiskunde van het
V.O. weet, wel als de expert gezien, die weet te bepa-
len wat de kinderen allemaal moeten kennen en kun-
nen om tot het echte werk toegelaten te kunnen wor-
den. Rekenen wordt daarbij vaak beschouwd als iets
dat je even onder de knie moet krijgen, dus zoiets als
fietsen en autorijden.

Dit komt voort uit de gedachte dat rekenen slechts een
verzameling van een aantal blinde algoritmen¹⁾ zou
zijn.

Dit is een misvatting, waarvan men zou kunnen hopen
dat ook onderwijsgevend en uit het B.O. hem zouden
kunnen bestrijden. De wiskunde begint bij het getal.
De mens is zo inventief geweest om voor het noteren
en rekenen met getallen een slim systeem te bedenken.
Dit systeem, ook wel tientallig positiestelsel genoemd,
is gebaseerd op twee principes:

1. telkens worden groepjes van tien gebundeld en als
volgt ingewisseld:
tien eenheden ----- één tiental
tien tientallen ----- één honderdtal, etc.
2. het toekennen van een waarde aan een plaats (posi-
tie) van een cijfer in een getal

$$723 = 700 + 20 + 3 \quad \begin{array}{c|c|c} H & T & E \\ \hline 7 & 2 & 3 \end{array}$$

De 3 geeft door z'n positie de eenheden (E) aan, de
2 de tientallen (T) en de 7 de honderdtallen (H).

Dit positiesysteem, dat ook de kommagetallen om-
vat, is de basis van ons getallen- en rekensysteem.
Hierin inzicht te verwerven, maar ook het inzichtel-
ijk leren opereren in dit systeem, leidt tot echte
mathematische activiteiten.

(1) Een algoritme is een vast voorschrift, dat altijd tot het gewen-
ste resultaat leidt en dat ook zonder begrip uitgevoerd kan
worden. Denk bijvoorbeeld aan de staartdeling.

- 1 *Vermenigvuldigen.*

0,125	0,375	3,875	3,056	1,009
3 x	2 x	4 x	5 x	9 x
2,6	4,7	0,27	0,345	8,375
16 x	12 x	15 x	18 x	24 x
- 2 *Onder elkaar.*

$3 \times 1,37 =$	$8 \times 7,7 =$	$12 \times 0,25 =$	$16 \times 3,465 =$
$5 \times 8,25 =$	$6 \times 0,045 =$	$16 \times 3,16 =$	$45 \times 4,9 =$
$8 \times 9,7 =$	$9 \times 2,862 =$	$25 \times 7,275 =$	$215 \times 8,15 =$
$7 \times 0,345 =$	$7 \times 0,24 =$	$38 \times 0,006 =$	$24 \times 9,765 =$
- 3 *Onder elkaar.*

$f \ 14,37 \div f \ 182$	$\div f \ 0,75 =$	$21,8 - 3,456 =$
$f \ 8,05 \div f \ 10,10$	$\div f \ 25 =$	$375 - 0,375 =$
$f \ 0,83 \div f \ 2,75$	$\div f \ 200 =$	$9,7 - 3,458 =$
$f \ 219,58 \div f \ 5,07$	$\div f \ 0,05 =$	$162,5 - 1,625 =$

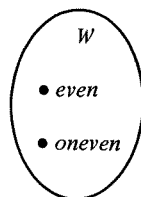
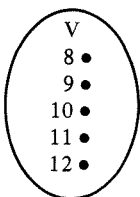
"B.O.: Rekenen!"



...grenst aan...
fig. 4a

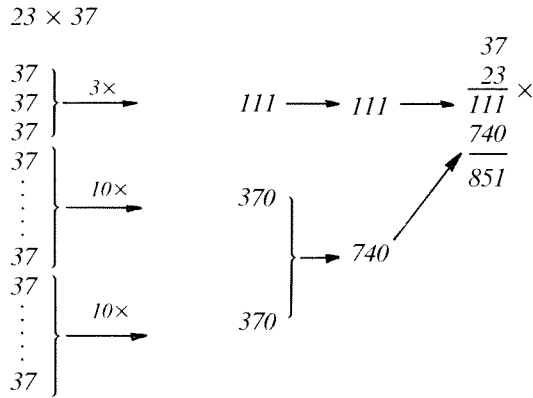


...grenst aan...
fig. 4b



...noemen we...

Zo kan de beschouwing van de vermenigvuldiging 23×37 vanuit de oorspronkelijke betekenis $37 + 37 + 37 + \dots + 37$ (23 maal) via steeds verdergaande verkortingen het inzicht in het standaard-algoritme (her)bewust maken. Let hierbij vooral op de belangrijke $\times 10$ eigenschap, waardoor de cijfers in positie naar links verschuiven en een nul op de plaats van de eenheden verschijnt.



“Van herhaald optellen naar standaardalgoritme”

Naast het cijferen is het toepassen van het rekenen, zoals bij de redactie-opgaven maar ook bij het meten en het maken van grafieken, een stapje hoger in de wiskunde.

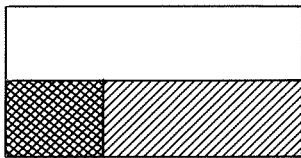
Inzicht en vaardigheid

Opnieuw een BOVO-vraag:

Kleur de helft.

Arceer daarvan $\frac{1}{3}$ deel.

Vul in: $\frac{1}{3}$ deel van $\frac{1}{2}$ deel = ... deel.



Een brugklasleerling (havo/vwo) doet dit foutloos. Als hem daarna gevraagd wordt $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ uit te rekenen, gaat dit als volgt:

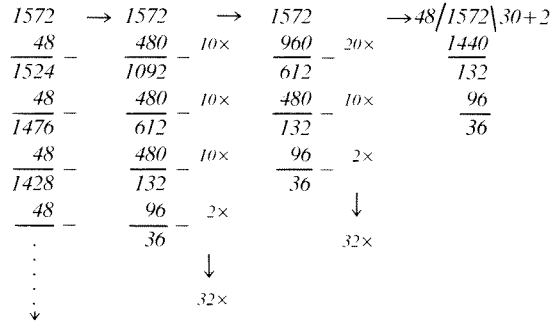
$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1(!).$$

En de vraag of hij overeenkomst ziet tussen het verdeelvraagstuk en het breukensommetje, levert als antwoord op: “Het gaat allebei over breuken”.(!)

Dergelijke kleine steekproeven in de brugklas over de kennis van het rekenen leiden tot de conclusie dat de klachten hierover niet altijd onterecht zijn. In een ideaal reken/wiskundeprogramma zou inzicht voorop moeten staan. Wanneer de kinderen een bepaalde vaardigheid inzichtelijk hebben verworven, zou deze ook verder inzichtelijk geoefend moeten worden. Dit betekent niet, dat er op een bepaald moment niet automatisch gecijferd zou kunnen worden, maar in principe zou men altijd naar de bron van het inzicht moeten kunnen terugkeren.

Zo zou men zich kunnen voorstellen dat de staartdeling aan de hand van een context inzichtelijk aangeleerd wordt, dus werkelijk als herhaalde aftrekking, waarbij we een aantal niveau's van verkortingen kunnen onderscheiden:

Er gaan 1572 supporters mee naar Ajax-Anderlecht. In elke bus gaan 48 personen.



Van herhaald aftrekken naar standaardalgoritme

Deze verkortingen kunnen langzamerhand door de kinderen zelf verworven worden. Steeds hou je in de gaten wat het delen precies betekent. En het gaat tenslotte niet meer om het delen op zich, elke staartdeling kan tenslotte met een zakrekenmachine uitgevoerd worden. Belangrijk daarbij is nu juist, dat je het antwoord vooraf kunt schatten en weet wat het delen betekent. In dit geval: $32 \times 48 + 36 = 1572$.

Nu is het aantal aan te leren vaardigheden voor het basisonderwijs vrij groot. En men werkt met heterogene groepen, waarin de zwakkere leerlingen maar voort moeten om alle eindtermen te halen. En juist die zwakkere leerling komt vaak niet verder dan de staartdeling. Kommagetallen, breuken en procenten worden op die manier èn voor leerling èn voor onderwijsgevende een martelgang.

Toch rekent men er in het V.O. nog steeds op dat alle kinderen *alles* gehad hebben en beheersen. Dit legt een fikse druk op het basisonderwijs. Als gevolg wordt tegen het einde van de basisschool hoofdzakelijk gewerkt op het aanleren van blinde algoritmen. Vooral de breukenleergang is dan meestal niet meer dan een labyrint van onbegrepen recepten. Soms levert dit nog wel enkele schijnresultaten op, maar helaas worden dan in een later stadium, vooral door de zwakkere leerlingen, allerlei regels door elkaar gehaald.

Rekenen, een algoritmische aanpak

Als gevolg van de scheiding van rekenen (B.O.) en wiskunde (V.O.) blijft de leerstof een dwingend harnas voor het B.O. Daar komt nog eens bij, dat differentiatie en individualisering een hoge prioriteit in de onderwijsorganisatie genieten, zodat het begrijpelijk is dat er naar methoden wordt gezocht de leerstof in zo overzichtelijk mogelijke leerstappen te ordenen.

Nu lijkt rekenen daar bij uitstek geschikt voor. Logisch-wiskundig is dat juist. De samenhang tussen optellen en aftrekken laat de ene operatie uit de andere volgen. Uit herhaald optellen volgt vermenigvuldigen, delen is niets anders dan herhaald aftrekken.

Zo simpel is dat.

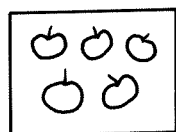
Maar wat logisch-wiskundig zo gestructureerd is, hoeft in psychologische zin niet aan dezelfde wetten te gehoorzamen. Bekijk bijvoorbeeld eens de twee volgende vraagstukjes:

Een doosje bevat 5 appels. Hoeveel in 2 dozen?

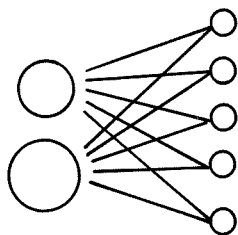
Een sportfiets heeft voor 2 bladen, achter 5 raderen. Hoeveel verschillende versnellingen?

Het appelvraagstukje levert 5×2 appels op. Je ziet ze zo voor je.

Maar bij het tellen van het aantal versnellingen ligt de vermenigvuldigingsstructuur in het geheel niet zo voor de hand:



" 2×5 appels"



" 2×5 versnellingen"

Toch zou men nog kunnen geloven dat ook al dergelijke toepassingsvraagstukjes te systematiseren zijn. En dan gebeurt wat zich in een groot deel van onze scholen afspeelt. De leerstof wordt in vraagstukken soort bij soort opgedeeld, steeds verder gefragmenteerd en ... het onderwijs, zo men daar nog van kan spreken, voltrekt zich hoofdzakelijk schriftelijk.

De kinderen krijgen aldoor maar pagina's vol met dezelfde sommen voorgeschoteld. Vrijwel steeds wordt zo snel mogelijk op een algoritme, dat succes op korte termijn kan verzekeren, aangestuurd. Er is een dwingende werkwijze, welke elk eigen initiatief tegengaat. Een flexibele houding kan zo niet ontstaan, zelfs bevordert deze aanpak a-wiskundige attitude. De kinderen worden systeemafhankelijk en blijken het geleerde in een andere setting niet te kunnen toepassen.

De onderwijsgevende wordt tot administrateur gedegradeerd. Bij de zwakkere leerlingen kan hij/zij essentiële fouten niet meteen boven water halen, omdat de kinderen op grond van hun te geringe scores volgens het organisatiemodel meteen naar een lager niveau worden gedirigeerd. En doordat de leerlingen aldoor maar schriftelijk in lussen door de stof gestuurd worden en al maar op dezelfde sommen oefenen, kan het zijn dat sommige leerlingen vanaf een bepaald punt nooit meer verder komen. De motivatie tot rekenen is dan meestal wel helemaal tot nul gereduceerd.

Wiskunde: voordoen, nadoen

Na het basisonderwijs worden de kinderen in hun hokjes geplaatst. *LBO, MAVO, HAVO/VWO*. Op al die scholen wordt wiskunde gegeven, soms nog wat rekenen.

Ook in het V.O. bestaat er een grote belangstelling voor gedifferentieerd onderwijs met de bijbehorende individuele werkvormen. Ook dat gebeurt grotendeels schriftelijk.

Helaas geven die schoolboeken, die rekenboeken heten te zijn voor het V.O., weinig hoop dat er naar een zinvoller reken/wiskunde-onderwijs toegewerkt wordt.

Staan er gehele getallen voor de breuk, dan deze eerst eruit halen.

$$\frac{3}{8} : 2\frac{1}{4} \times \frac{3}{8} : \frac{9}{4} = \frac{3}{8} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$$

Maak de sommen volgens voorbeeld.

$$\frac{5}{8} : 3\frac{3}{4} =$$

$$\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{8} : 3\frac{3}{4} =$$

$$\frac{1}{3} : 1\frac{7}{9} =$$

$$\frac{7}{8} : 1\frac{1}{4} =$$

Ook hier treffen we weer dezelfde nadruk op algoritmische vaardigheden, die op een soortgelijke wijze worden aangeboden als in het basisonderwijs.

Waar met wiskunde gestart wordt, zien we veelal de methode voordoen en nadoen gehanteerd:

Voorbeelden

$$1 \quad (x + 5)(x + 6) = x^2 + (5 + 6)x + 30 = x^2 + 11x + 30$$

$$2 \quad (x - 3)(x + 7) = x^2 + 4x - 21, \text{ want } -3 + 7 = 4 \text{ en } -3 \cdot 7 = -21$$

$$3 \quad (a + 6)(a - 8) = a^2 - 2a - 48$$

$$4 \quad (p - 9)(p - 11) = p^2 - 20p + 99$$

$$5 \quad (x + 3y)(x - 6y) = x^2 - 3xy - 18y^2$$

Bereken:

$$1 \text{ a. } (x + 10)(x + 4) \quad \text{e. } (x + 10)(x - 8)$$

$$\text{b. } (x + 7)(x + 3) \quad \text{f. } (x - 7)(x + 9)$$

$$\text{c. } (x + 9)(x + 1) \quad \text{g. } (x + 16)(x - 5)$$

$$\text{d. } (x + 5)(x + 12) \quad \text{h. } (x + 7)(x - 8)$$

$$2 \text{ a. } (a + 4)(a - 13) \quad \text{e. } (x + 2y)(x - 3y)$$

$$\text{b. } (a - 5)(a + 19) \quad \text{f. } (x + 7y)(x + 4y)$$

$$\text{c. } (a - 15)(a - 14) \quad \text{g. } (x - 11y)(x + 6y)$$

$$\text{d. } (a - 8)(a - 9) \quad \text{h. } (x - 15y)(x - 3y)$$

De geschiedenis herhaalt zich: ook hier weer een enorme nadruk op algoritmen, die nauwelijks toegepast kunnen worden, zo ze al toe te passen zijn.

Er is één groot verschil met het B.O. Voor veel kinderen houdt deze martelgang na twee of drie jaar op, wanneer ze wiskunde kunnen laten vallen. Niet zelden komen dergelijke leerlingen later op een PA en moeten daarna zelf rekenen gaan onderwijzen.

Oorzaken discontinuïteit

Er zijn tal van oorzaken te noemen voor het ontstaan van de discontinuïteits-gap binnen B.O. en V.O. Ik som er een aantal op zonder volledig te willen zijn:

- De tijd dat kinderen tot dertien jaar schoolplichtig waren is nog niet zo lang geleden. Voor velen hield daarmee het onderwijs op, of je nu wel of geen breuken kon optellen.
- We zitten nog steeds met een traditionele leerstofordening, welke in feite berust op het oude koopmansrekenen.
- Hoewel niet door de overheid bepaald, kunnen we toch van min of meer dwingende eindtermen spreken.
- Omdat de eindtermen de inhoud van de leerboeken bepalen, verstarren deze leerboeken.
- Er is binnen B.O. en V.O. weinig kennis van elkaanders vakgebied.
- Het rekenonderwijs wordt vaak als een technische aangelegenheid gezien. Het is produktgericht: je moet alleen vlot en vaardig kunnen cijferen. Daardoor is er te weinig ruimte voor begripvormende activiteiten en vooral voor het ontwikkelen van een wiskundige attitude.
- Het wiskunde-onderwijs in het V.O. laat de mogelijkheden om aan te sluiten bij datgene waar men op de lagere school is gestopt, liggen. In het algemeen wordt er in het V.O. op een veel abstracter niveau ingestapt, waarbij de rekenkennis van het basisonderwijs ternauwernood nog een rol van betekenis speelt.
- Er wordt te geringe aandacht besteed aan de didactiek van dit gebied, zowel in de opleiding als de nascholing.
- Er is nog geen praktisch werkbaar systeem ontwikkeld om het differentiatieprobleem op te lossen.

Aanzetten tot oplossingen

Er kan – het is al eerder opgemerkt – geen forse stap tot oplossing van de aansluitproblematiek gemaakt worden, indien de leerstof voor rekenen/wiskunde (4-14-jarigen) niet opnieuw geordend wordt. Dit zou vooral nodig zijn om iets aan het differentiatieprobleem te kunnen doen. Immers, het gaat in hoofdzaak om de zwakkere leerlingen, die juist het rekenen zo nodig hebben. Tevens zouden de betere leerlingen al vroeger voor uitdagender problemen dan de afgetrapte sommenrijtjes van de meest huidige leerboeken gesteld kunnen worden.

Hoewel een dergelijke leerstofordening nog op geen enkele wijze in het verschiet ligt, kunnen er ook thans verbeteringen aangebracht worden als de reken/wiskundeproblematiek vanuit de didactische hoek aangepakt zou worden.

Ik noem hier enkele mogelijkheden, allereerst voor het rekenonderwijs *op de basisschool*:

- Er zou minder nadruk op het schriftelijk rekenen moeten komen te liggen. Zorg dat de kinderen vooral goed uit het hoofd kunnen rekenen en schattingen kunnen maken. Bevorder hun eigen reken-

wijzen, want het is maar een idee, dat het leerproces zich zou moeten voltrekken zoals wij volwassenen dat uitgedacht hebben.

Vraag hoe $48 + 35$ uitgerekend wordt en je zult verstand staan:

$$48 + 35 = 78 + 5 = 83$$

$$48 + 35 = 50 + 33 = 83$$

$$48 + 35 = 50 + 40 - 2 - 5 =$$

$$48 + 35 = 45 + 35 + 3 = \dots$$

Tracht zoveel mogelijk een flexibel rekengedrag te doen ontstaan. Dit kan alleen door de verschillende aanpakken met de kinderen te bespreken.

$$24 \times 39 = 39 \times 24 = 40 \times 24 - 24 = 960 - 24 = 936$$

$$24 \times 39 = 12 \times 78 = 6 \times 156 = 3 \times 312 = 936.$$

Dit soort rekenpraatlessen zijn geen hoofdtekenlessen in de ouderwetse zin van het woord. Het gaat om de reflecties op de verschillende oplossingsmethoden naar aanleiding van een eenvoudige rekenopgave.

Wie bijvoorbeeld bij de opgave $10 \times 2,4$ automatisch tot het onder elkaar cijferen terugvalt (dit gebeurt echt!)

$$2,4$$

$$\frac{10}{00} \times$$

$$\frac{240}{24,0}$$

zou opnieuw bewust gemaakt moeten worden van de $\times 10$ eigenschap. Wij bij $10.000 - 1$ een aftrekking onder elkaar gaat maken, zou op de ordening van de getallen gewezen kunnen worden.

De bedoeling van dit soort lessen is het ontwikkelen van een goed gevoel voor getallen en voor het opereren met getallen.

Ga ook eens van één getal uit.

Bedenk zoveel mogelijk over 72.

Het vergelijken van de verschillende vondsten van de kinderen kan een openbaring zijn:

72 is even.

$$72 = 2 \times 36 = 3 \times 24 = 8 \times 9 \dots$$

72 is deelbaar door 2; 3; 9; ...

$$72 = 70 + 2 = 36 + 36 \dots$$

etc. etc.

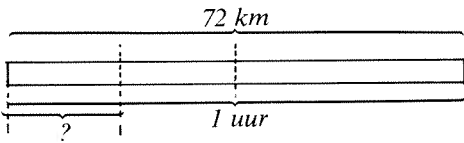
Kortom, doorbreek het systeem van het louter schriftelijk rekenen en tracht van het rekenen een meer sociale bezigheid te maken.

- Er kan veel meer aandacht besteed worden aan begripmatige zaken, alvorens tot algoritmisering over te gaan. Er zijn door het voormalige IOWO (afdeling Wiskobas) leergangen voor het cijferen ontwikkeld, die bewezen hebben dat dit mogelijk is, hoewel het niet gemakkelijk is zo'n leergang in een traditionele methode te plaatsen.
- Rekenen betekent niet dat er louter en alleen met getallen gewerkt wordt. Visualiseren en modellen zijn een krachtig hulpmiddel voor het rekenen en de wiskunde. Zij zijn als het ware een verbinding tussen de gewone taal en de formele (wiskunde-)taal. Daarom zou het gebruik van visualiseringsmiddelen, zoals de getallenlijn en het honderdveld en modellen zoals de strook en het verhoudingsblok, veel meer aandacht verdienen.

Laten we nog eens terugkeren naar het sommetje uit de inleiding:

Een auto rijdt met een snelheid van 72 km/uur.
Hoe lang rijdt hij over 18 km?

Stel, dat de leerling hierbij een strook, waaraan hij twee grootheden (afstand en tijd) kan koppelen, tot zijn beschikking had gehad:



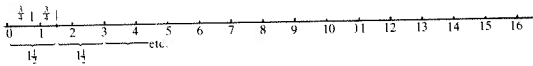
Welk een eenvoud en wat een heldere oplossingswijze!

Of beschouw de volgende context:

Telefoneren tussen twee zones kost 16 cent per $\frac{3}{4}$ minuut.

Hoeveel kost een telefoongesprek van een kwartier tussen Amsterdam en Maastricht?

Je wordt niet gedwongen tot ingewikkelde breukdelingen als je de tijdlijn ziet aflopen en daarop de $\frac{3}{4}$ minuten afpast:



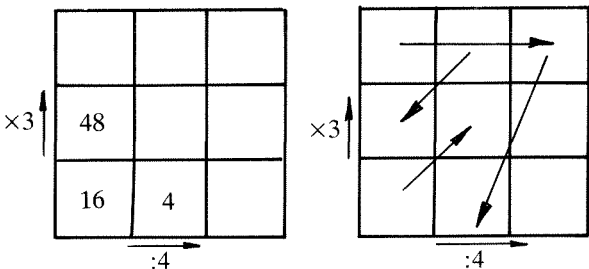
Vier $\frac{3}{4}$ minuten vullen drie minuten. Er gaat dus twintig keer een $\frac{3}{4}$ minuut in vijftien minuten. Je ziet het zo.

Verhoudingen worden in het B.O. maar magertjes en geïsoleerd aangeboden. Toch kan dit onderdeel, vooral naar de toepassingen toe, veel rijker uitgewerkt. Het verhoudingsblok is daartoe een uitermate geschikt model.

De Franse Franc kost vandaag fl. 0,40.
Hoeveel Francs krijg je voor fl. 150,-?

francs	1	10	100	200	50	250	125	275
guldens	0,4	4	40	80	20	100	50	150

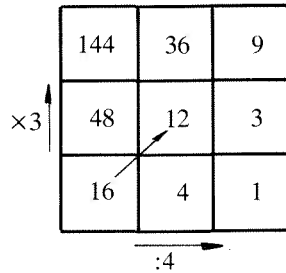
- Het oefenen kan niet alleen spelser aangeboden, de verschillende gevarieerde oefenvormen, die gedurende de laatste decennia zijn ontwikkeld, openen ook mogelijkheden tot het zien van verbanden, soms zelfs tot wiskundige activiteiten. Bekijk daartoe eens de volgende pijlendiagram-vraagstukken:



Vul in Wat betekenen de pijlen?

Het eerste diagram kan als oefening ingevuld worden. Elke stap horizontaal naar rechts betekent :4,

verticaal naar boven $\times 3$.
Aldus ontstaat de volgende invulling:



Het interessante is nu dat we via twee routes van 16 naar 12 kunnen komen:

$$16 \xrightarrow{\times 3} 48 \xrightarrow{:4} 12$$

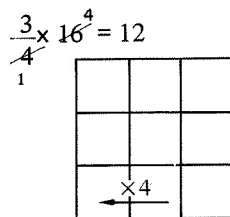
of:

$$16 \xrightarrow{:4} 4 \xrightarrow{\times 3} 12$$

We zien dus dat de volgorde van deze twee bewerkingen kennelijk niet van belang is. Vragend naar de betekenis van de schuine pijl kunnen we opmerken dat de twee bewerkingen tot één bewerking samengesteld kunnen worden:

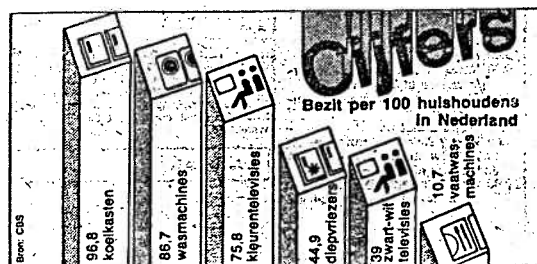
$$16 \xrightarrow{\times \frac{3}{4}} 12$$

We zien hieraan hoe het vermenigvuldigen van een geheel getal met een breuk eenvoudig opgesplitst kan worden in een vermenigvuldiging gevolgd door een deling of omgekeerd. Wellicht werpt dit een nieuw licht op de zogenoemde wegstreepregel:



Door het omkeren van een “:4 pijl” ontstaat de “ $\times 4$ pijl”. Zo wordt de samenhang tussen vermenigvuldigen en delen als elkaars omgekeerde bewerkingen aan de orde gesteld. Het zal niet moeilijk zijn nu ook de betekenissen van de andere pijlen te vinden.

- Er zou een grotere zingeving voor het rekenonderwijs kunnen ontstaan als er meer aandacht besteed werd aan toepassingen. Men kan daarbij denken aan actuele gebeurtenissen, maar ook aan meetpractica of projecten. Heel wat van dergelijke aanpakken zijn beschreven in een aantal Wiskobas-publicaties.



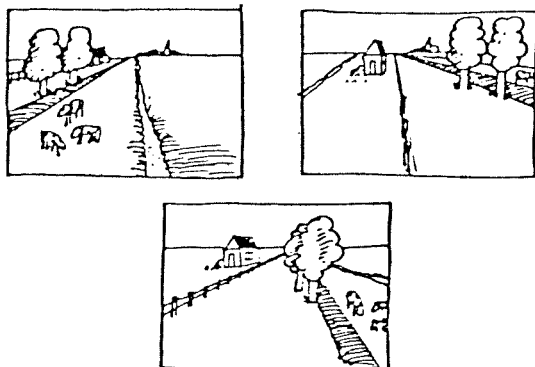
Het Parool 13-3-82

Zo is het mogelijk naar aanleiding van dit krantebericht het procentbegrip nog eens grondig aan de orde te stellen. Het procentrekenen is een bij uitstek toepasbaar onderdeel van het reken/wiskundeonderwijs (ook in het V.O.). Helaas komt dit onderwerp aan het eind van de basisschool danig in de verdrukking. Veel kinderen hebben daardoor geen idee van procenten, laat staan dat ze ermee kunnen rekenen. Juist allerlei actuele kranteberichten zijn heel geschikt om het nut van procenten te verhelderen. Bovendien bieden dergelijke berichten ook aanknopingspunten voor problemen van algemener aard.

Blijven we bij de reken/wiskunde problematiek, dan biedt dit bericht ook mogelijkheden allerlei leuke denkvragen te stellen, zoals: Kun je iets zeggen over het percentage van de huishoudens dat zowel een kleurentelevisie als een zwart-wittelevisie bezit? (tenminste 14,8%).

En hoe staat het met het percentage huishoudens waar helemaal geen televisie voorkomt? (ten hoogste 24,2%).

- Tenslotte zou het B.O. ook niet hoeven te schromen enkele wiskundige elementen aan het rekenonderwijs toe te voegen. Heel geschikt daartoe is ondermeer "Zie je wel", een pakketje informele meetkunde. De omgeving verkennend, leren de kinderen essentiële begrippen over rechte lijnen en het afbeelden van de ruimte op foto's en tekeningen. De kinderen worden daarbij uitgedaagd verschijnselen te verklaren door middel van taal:



Drie tekeningen van 't landschap gezien uit een rijdende trein.

De trein rijdt in deze richting →

Wat is de goede volgorde van de tekeningen?

Het begrijpen van de ons omringende ruimte, i.c. het veranderende beeld vanuit een rijdende trein, is aldus een voorbeeld van echte realiteitsgebonden meetkunde.

De algemene strekking van voornoemde punten kan men ook van toepassing laten zijn op het *wiskunde-onderwijs* in het V.O. Ook hier zou dienen te gelden:

- minder nadruk op schriftelijk werk, meer aandacht voor reflectie op eigen en andermans leren;
- minder nadruk op louter algoritmisch werken, meer aandacht voor begripsverwervende activiteiten;

- grotere aandacht voor visualiseringen en modelgebruik;
- meer variatie in oefeningen;
- meer aandacht voor toepassingen.

Bovendien zou het V.O. mee kunnen werken aan een aanzet tot oplossing van het aansluitingsprobleem door aandacht te schenken aan de volgende zaken:

- voortzetting van het rekenen in het V.O. Het onderhouden van de rekenvaardigheid;
- herbewustmaking van vroeger geleerde zaken (positiestelsel, vermenigvuldiging en staartdeling, samenhang breuken binnen kommagetallen en verhoudingen etc.);
- wiskundige problemen starten vanuit rekenproblemen;
- integratie met andere vakken, zoals aardrijkskunde en natuurkunde.

Nu is dit allemaal gemakkelijk neergeschreven. In de praktijk blijkt men tegen tal van praktische moeilijkheden op te lopen, zoals:

- beschikbaarheid van materiaal;
- inpassingsproblemen in het programma (onderwijstijd);
- organisatorische kwesties (docententijd).

Daarbovenop komt de noodzaak van gezamenlijke studie. Dit is ons gebleken tijdens de BOVO-cursus te Amersfoort. Op deze cursus zijn wij, allen werkzaam op het gebied van het reken/wiskundeonderwijs zowel in het B.O. als alle typen van het V.O., tot een aantal constatering gekomen welke in het voorgaande zijn neergelegd.

De bevinding dat het niveau van de leerlingen aan het eind van de basisschool enorm varieert, heeft ons ertoe gebracht ook aan het rekenen in het V.O. aandacht te blijven besteden. Er zijn thans enkele experimentele leergangetjes van een remediërend karakter ontwikkeld op het gebied van breuken, kommagetallen, procenten, verhoudingen en schaal.

Voor het B.O. zijn aanwijzingen voor de onderwijsgevende beschreven met het doel de verhoudingstabel als didactisch hulpmiddel te gaan gebruiken. De studie over verhoudingen, een onderwerp dat niet alleen vele onderwerpen van het rekenen bindt, maar ook van groot belang is voor de wiskunde, natuurkunde, scheikunde en aardrijkskunde, blijft een belangrijk item.

Naast het rekenkundige aspect, wordt ook getracht wat meer wiskundige elementen aan het basisonderwijs toe te voegen. De meetkundige onderwerpen, zoals het eerder genoemde "Zie je wel" en "Verpakkingen" blijken daartoe voor de basisschool heel geschikt. Ook wordt onderzocht in hoeverre andere werkvormen (groepswerk) uitvoerbaar zijn.

De problematiek in z'n totaliteit (naast rekenen/wiskunde zijn ook groepen voor taal, zaakvakken en expressie bezig) is nog lang niet opgelost. En dan te bedenken dat we al bijna drie jaar bezig zijn. Wij hopen nog enige tijd te kunnen doorgaan.

Wil men de aansluiting echt plaats doen vinden, dan zijn goede samenwerkingsverbanden – het liefst ondersteund door deskundigen – een eerste voorwaarde. Dit kost tijd, moeite en geld, maar het zou het ten volle waard zijn, omdat het gaat om een zo grote groep van leerlingen die in een zo kritieke fase van hun leven zijn. Leerplanmakers voor het komende voortgezet onderwijs: let op deze zaak!

Aanbevolen literatuur

- (1) Wiskobasteam, *Interlokaal*, leerplanpublicatie 4.
- (2) Wijdeveld, E., *Vierkubers*, leerplanpublicatie 5.
- (3) Wiskobasteam, *De Abacus*, leerplanpublicatie 6.
- (4) Heege, H. ter en E. de Moor, *Oppervlakte 1*, leerplanpublicatie 7.
- (5) Jong, R. de (ed.), *Oppervlakte 2*, leerplanpublicatie 9.
- (6) Treffers, A. (ed.), *Cijferend vermenigvuldigen en delen I*, leerplanpublicatie 10.
- (7) Moor, E. de, *Gevarieerd rekenen*, leerplanpublicatie 11.
- (8) Wiskobasteam, *Rapportboekje 3, overzicht van rekenmethoden anno 1980*.
- (9) Dekker, A., H. ter Heege, A. Treffers, *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*, OW & OC nr 1.
- (10) Streefland, L., *Breuken volgens Wiskobas*, OW & OC nr 3.
- (11) Sweers, W., *Op het spoor*.
- (12) Janssen, G., *Breuken*.
- (13) Schoemaker, G., *Zie je wel*.
- (14) Goddijn, A., *Lijngrafieken*.
- (15) Sweers, W., *Verpakkingen*.
- (16) Goddijn, A., *Klein en groot*.
- (17) Kindt, M., *Autowegen*.
- (18) Schoemaker, G., *Hoeken*.
- (19) Janssen, G., *Honderd procent*.
- (20) Kindt, M., *Regelmatige figuren*.
- (21) Kindt, M en W. Sweers, *De reis om de wereld in 80 dagen*.
- (22) Goddijn, A., *Schaduw en diepte*.
- (23) Kremers, W., *Belvia*.
- (24) Moor, E. de en G. Schoemaker, *De rekenkalender*.
- (25) Nieuwe Wiskrant, tijdschrift.
- (26) Sweers, W., *Rekenen en wiskunde ter overbrugging*, Zwijsen, Tilburg.
- (27) Goffree, F., *Wiskunde en Didactiek*, Wolters-Noordhoff, Groningen.

De nummers 1 t/m 25 zijn beschreven in de boekengids van OW & OC, alwaar ze ook te bestellen zijn.

Volledig adres:

Vakgroep OW & OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht,

Verschenen:

Streefland, L., *Breuken volgens Wiskobas. Ontwikkelingsonderzoek naar bouwstenen voor een nieuwe didactiek*, Utrecht, OW & OC, 1983.

(Speciaal bestemd voor onderzoekers, vakdidactici, begeleiders, opleiders, studenten, onderwijsgevenden basisonderwijs en voortgezet onderwijs (brugklas)).

Prijs: f 35,-.