$a + a = a^2$, en wat dies meer zij

H. ter Heege
SLO, Enschede

Samenvatting

Het is in het onderwijs een vaak voorkomende zaak dat kinderen stukjes stof niet begrijpen en daardoor sterk worden afgeremd in hun ontwikkeling. Als leerlingen worden geholpen – individueel – de hobbels te nemen, kan het aantal afhakers beperkt worden.
De auteur beschrijft in dit artikel hoe de hobbel $2 \times a = a^2$ genomen werd.

Summary

The explanation of certain rules in mathematics – like: $2p \times -3 = 2 \times p \times -3 = 2 \times -3 \times p = -6p$ – is often not understood by children.
The explanation is not sufficient and convincing. This often results in poorer results than necessary.
The author describes how he and his student tackled the problem $2 \times a = a^2$.

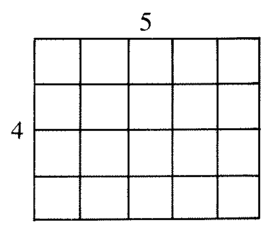
Dora, bijna 16 jaar, is zwak in wiskunde. Dat zegt ze zelf en ik ben geneigd haar te geloven. Ze zit op een IVO-MAVO en heeft in de drie-en-half jaar dat ze deze school bezoekt nog maar anderhalf boekje van de menthode A tot Z uit.
Ik vraag haar een sommetje op te schrijven die ze heel moeilijk vindt. "Tja", zegt ze. Even later weer: "tja", maar ze kan geen moeilijk sommetje bedenken. Dan vraag ik haar een sommetje op te schrijven dat ze makkelijk vindt. Na enig aarzelen schrijft ze op:
$3a \cdot 7b =$
Maar ze weet niet goed wat ze ermee moet doen. Omdat ík wel vermoed wat de bedoeling is, geef ik haar het volgende rijtje sommen op*:

$7 \times -8 =$	-56
$-2 \times a =$	$-a^2$
$p \times -4 =$	$-p^4$ of $-4p$
$-\frac{1}{4} \times -4 =$	1
$7 \times -b =$	$-7b$ of $-b^7$

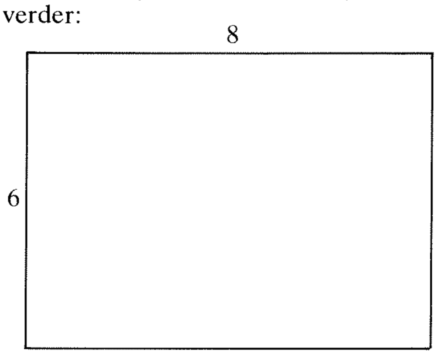
Rechts de antwoorden die Dora opschrijft.
Een interessante rij antwoorden, omdat het rekenen kennelijk geen problemen oplevert, ook niet als er met breuken moet worden gerekend. Ook de rol van het minteken levert zo te zien geen problemen op. De problemen ontstaan echter als er letters worden gebruikt. De eerste, $-2 \times a = -a^2$, wordt zeer beslist gemaakt, maar bij $p \times -4 = \ldots$ en $7 \times -b = \ldots$ rijzen de twijfels. Ik vraag dan ook waarom $-2 \times a = a^2$ is.
Ze aarzelt, begint dan te grinniken en zegt: "Het kan ook $-2a$ zijn. Ik weet het niet."
Het lijkt op dit moment noodzakelijk dat Dora leert wat zij fout heeft gedaan. Deze eenvoudige sommetjes en dan nog deze fouten. Ik hoor het vele collega's denken. Een uitleg zoals plaatsvindt in de methode Moderne Wiskunde is zó gegeven:

$$
\begin{array}{lll}
-2 & \times -a & = 2a \\
2p & \times -3 & = 2 \times p \times -3 = 2 \times -3 \times p = -6p \\
a^3 & \times a^2 & = a \times a \times a \times a \times a = a^5 \\
2d & \times 5d & = 2 \times d \times 5 \times d = 2 \times 5 \times d \times d = 10d^2 \\
-3c & \times 2d & = -3 \times c \times 2 \times d = -3 \times 2 \times c \times d = -6cd
\end{array}
$$

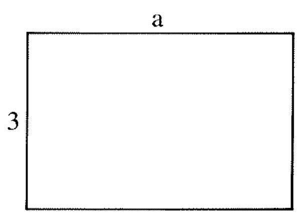
Zo dat is dat.
Ik heb echter enige twijfels aan deze uitleg en vooral aan de veronderstelling dat deze uitleg voor Dora voldoende en overtuigend zou zijn. De uitleg van de methode vertrekt mijns inziens van een te hoog niveau voor haar. Om deze uitleg te begrijpen moet je bijvoorbeeld weten wat vermenigvuldigen is; je moet inzien dat binnen deze operatie de commutatieve eigenschap geldt; je moet kennis hebben van allerlei notatie-afspraken, zoals $6 \times p = 6p$ en $a \times a = a^2$; en dergelijke.
Gewoonlijk geen opzienbare zaken, maar voor Dora misschien wel.
Daarom wil ik een poging wagen Dora inzicht in deze problematiek bij te brengen door met haar te beginnen vanuit de lagere-school-stof van klas 2 à 3. Ik teken:



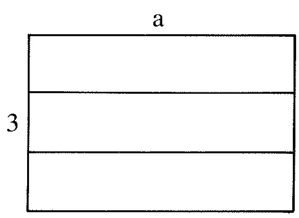
waarbij de getalletjes aangeven hoeveel hokjes er aan de rand geteld kunnen worden. Dan vraag ik Dora hoeveel hokjes er in de hele figuur zitten. Ze antwoordt prompt 20 en op mijn vraag hoe ze dit zo snel weet zegt ze: "Gewoon lengte keer breedte is oppervlakte". Dora telt het aantal hokjes niet. Ze ziet direkt de vermenigvuldigingstructuur achter de opgave. Maar de regel "$1 \times b = 0$" functioneert alleen verbaal. Als ik haar uitleg dat er vier rijen van 5 hokjes zijn, ervaart ze dat als een nieuw gezichtspunt en als ik haar bovendien laat zien dat ook vijf rijen van 4 hokjes in de figuur zijn aan te geven, is ze duidelijk verrast.
Ik ga verder:



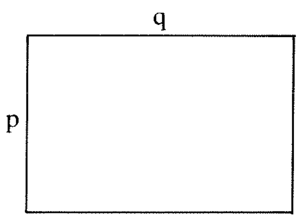
Dora antwoordt direkt met 48. Dan teken ik:



Problemen. "Dat weet ik niet, want ik weet niet wat a is".
Ik teken vervolgens:



Hoeveel hokjes in de eerste rij? En in de tweede? En in de derde? Ik laat het erachter schrijven. Dan opnieuw de vraag:
"Hoeveel hokjes?" Als ik naar 4×5 (vier rijen van 5 hokjes: 5 en 5 is 10 en 5 is 15, enz.) wijs, breekt plotseling het inzicht door. Ze zegt: "a en a en a, dat is drie a". Ik laat haar dit opschrijven: $a + a + a = 3a$.
Dan wil ik opeens veel te veel:



Het gaat niet door. Ik las daarom een oefenfase in, om het geleerde te consolideren.
Dora schrijft op:

$2 \times a = \ldots$
$a + a = 2a$
$6 \times b = \ldots$
$b + b + b + b + b + b = 6b$

En er tussendoor, om te reflecteren op bestaande kennis:

$8 \times 7 = \ldots$
$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 56$

Het model dat hierbij steeds op de achtergrond aanwezig is, is het rechthoeksmodel met de verwoording van de oplossing, bijvoorbeeld: vier rijen van elk 5 hokjes is 20 hokjes.
Het is Dora nu duidelijk dat $4 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$.
Ik schrijf daaronder: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = \ldots$. Dora rekent dat met enige moeite uit. Ik hernieuw de afspraak over de schrijfwijze hiervan: 2^4. Na enige analoge oefeningen laat ik Dora een aantal sommen maken, waaronder:

$-a \times -a =$	a^2
$p^4 \times p^3 =$	p^{12} of p^7

Rechts weer de antwoorden van Dora. De opgaven van het type $4 \times p = 4p$ doet ze nu goed.
Ik besluit, omdat ik zo gauw geen betere kan verzinnen, de uitleg van het boek te volgen:

$p^3 = p \times p \times p$
$p^4 = p \times p \times p \times p$
dus $p^3 \times p^4 = (p \times p \times p) \times (p \times p \times p \times p)$ deze regel laat het boek m.i. ten onrechte weg.
$= p \times p \times p \times p \times p \times p \times p = p^7$.

Ik laat Dora nu een aantal oefenopgaven maken. De antwoorden van haarzelf zet ik erachter.

$2 \times 3a = 5a$, een vergissing of een terugval?
$-5b \times b = -5b^2$
$p \times -2q = -2pq$

En:

$a^5 \times a^5 = a^{10}$
$b^7 \times b = b^8$
$7^2 \times 7^8 = 7^{10}$, dit antwoord rekenen we op de Casio fx 80 uit. We moeten dit afronden.

En:

$7a^2b \times 2ab^3 = 14a^3b^4$
$a^3b \times 5a^2b = 5a^5b^2$
$4xy^2 \times 3x^2y^2 = 12x^3y^4$
$(2a^3)^2 = \ldots$

Hier stokt Dora. Ik zeg: "Schrijf p^2 eens anders". Ze weet het nog: $p^2 = p \times p$. Ik vervolg: "Hier staat geen p^2, maar $(2a^3)^2$. Schrijf dat eens anders".
Dora schrijft op:
$(2a^3)^2 = 2a^3 \times 2a^3 = 4a^6$
Ze gaat verder:
$(xy^2)^3 = xy^6$
Ik herhaal: Schrijf dat eens anders".
Dora: $xy^2 \times xy^2 \times xy^2 = x^3y^6$, waarbij we af moeten spreken dat we de x zó schrijven x. Meer van dit type opgaven gaan daarna foutloos, waarna ik dit gesprek

afbreek. We zijn ongeveer 40 minuten bezig geweest. Mijn conclusie na dit gesprek is dat Dora aanvankelijk wellicht wat problemen had, maar dat ze in zeer vlot tempo tot het niveau komt waarop ze geacht wordt te werken. Ze leert in de situatie die ik met haar creëer vlot en ik betwijfel of ze wel zo'n slechte wiskundeleerling zou behoeven te zijn als ze zelf vermoedt. Er blijven een aantal vraagtekens. In de eerste plaats heeft Dora veel te weinig aan wiskunde gedaan: in drie-en-half jaar anderhalf boekje is te weinig. Ten tweede heeft ze er de indruk van overgehouden dat wiskunde te moeilijk voor haar is. Als ik haar na afloop van het gesprek vraag hoe ze het vond, zegt ze: "Wel leuk, nou snap ik het tenminste". De moed leek haar in de schoenen gezonken, maar ze hervindt zichzelf weer een beetje.
Het ging om fundamentele stof en fundamentele afspraken, die Dora slecht begreep. Het is zelfs mogelijk dat het gebrek aan inzicht en vaardigheid in deze zaken Dora steeds parten speelde. Het belemmerde haar om vlotter door de stof te gaan.
Het is in het onderwijs een vaak voorkomende zaak dat kinderen stukjes stof niet begrijpen en daardoor eigenlijk sterk worden afgeremd in hun ontwikkeling. Het is dan nodig eerst deze belemmeringen op te ruimen voor er nieuwe stof wordt aangeboden ter verwerking. In een strikt klassikale situatie levert dit wel eens problemen op. Men moet verder, de methode dwingt en het examen dreigt. Kinderen die dreigen af te haken kunnen daarvan het slachtoffer worden. Om dit te voorkomen is het nodig steeds alert te zijn op blokkeringen in de ontwikkeling van het kind. Dit levert uiteindelijk zelfs de meeste tijdwinst op.
Dora dacht aanvankelijk dat $2 \times a = a^2$ was. Dat is zo'n blokkering. Dora kan de fout zelfs nog rationaliseren, plausibel maken. Ze zegt: "Je hebt toch twee a-tjes". Dat is juist: $a + a = 2 \times a = 2a$. Twee a-tjes, je hebt er twee van. Net als bij $a \times a = a^2$. Het lijkt dat er ook twee van zijn: $a \times a$. Maar de onderliggende vermenigvuldigingstructuur wordt dan niet echt begrepen. Met het rechthoeksmodel wordt het duidelijker:

$2 \times a$: 2 rijen van a hokjes
$a \times a$: a rijen van a hokjes.

Dat Dora in een vlot tempo het geleerde toepassen kon, geeft vertrouwen in de toekomst. Dora kan mijns inziens best wiskunde leren, maar onder voorwaarde dat ze geholpen wordt hobbels te nemen.

*Uit: Moderne Wiskunde, deel 3 hm H1§1.

Vrouw & Wiskunde

Op zaterdag 8 oktober wordt de vijfde landelijke dag van de groep "Vrouwen en Wiskunde" gehouden in "de Kargadoor", Oude Gracht 36bis in Utrecht.
Aanvang: 10 uur. Het thema van de dag is: "Wiskunde in de Markt". We zullen zowel bestaand als zelfgemaakt materiaal over één of meerdere onderwerpen bekijken, bespreken en uitproberen.
Verdere informatie: Conny Gaykema, tel. 020-822611.