1808

J. de Lange Jzn
OW & OC, R.U. Utrecht

Samenvatting

Het verhaal over de theoretische bevolkingsexplosie van ratten uit een boek van Maarten 't Hart, levert een interessante mogelijkheid tot een discussie over mathematiseren. In dit geval niet gevoerd door leerlingen, maar door leraren die een voorscholingscursus Hewet volgden.
Verschillende mogelijkheden die tot modelvorming leiden, passeren in die groep de revue.

Summary

At an in-service-training course within the Hewet-project, a story about rats was presented to the teachers. This story, written by a famous Dutch biologist-author, presents the growth of a couple of two rats during one year. In one year there will be 1808 rats. This actually never happens, because of the fact that this number can only be reached under ideal conditions.
The teachers were asked to check whether the number 1808 was correct. This lead to an interesting discussion about mathematising.

Ook over de hoeveelheid nakomelingen van één rattenpaar in één jaar worden zeer verschillende getallen verstrekt. In het volgende hoofdstuk zal ik de schaarse gegevens van onderzoek over de vruchtbaarheid van ratten in de natuur bespreken, maar het is misschien aardig hier een schatting te maken van het aantal nakomelingen van één paar, uitgaande van de meest optimale omstandigheden. Daartoe gebruik ik de volgende gegevens. Gemiddeld is het aantal jongen per worp te stellen op zes; van deze zes jongen behoren er drie tot het vrouwelijk geslacht. De draagtijd is eenentwintig dagen; het zogen duurt ook eenentwintig dagen. Een vrouwtje kan echter al bevrucht worden tijdens de periode van het zogen van haar jongen, ze kan zelfs al bevrucht worden op de dag van de bevalling. Gemakshalve stel ik de periode tussen twee bevallingen op veertig dagen. Als nu een vrouwtje op 1 januari bevalt van zes jongen, is dat vrouwtje veertig dagen later opnieuw in staat om zes jongen ter wereld te brengen. De vrouwtjes van de eerste worp van zes jongen zijn zelf na honderdtwintig dagen in staat om nakomelingen voort te brengen. Als ik ervan uitga dat er bij elke worp steeds drie vrouwtjes zijn en als ik dan alle nakomelingen optel van alle vrouwtjes in één jaar kom ik op 1808 ratten op 1 januari van het volgende jaar, het oorspronkelijke paar meegerekend. Dit is een fictief getal. Er is sterfte; moeders verwerpen soms hun jongen; vrouwtjes komen soms lange tijd niet in oestrus. Niettemin geeft dit getal enig idee van het leger ratten dat na een jaar ontstaan kan zijn...

Uit: Maarten 't Hart
Ratten

Dit stuk – dat terug te vinden is in de HEWET-publicatie "Groei" – werd voorgelegd aan leraren van de twaalf scholen die dit jaar gestart zijn met het nieuwe wiskunde A en wiskunde B-programma.
De opdracht daarbij luidde: "Klopt het aantal van '1808 ratten' van Maarten 't Hart wel?"
Deze opdracht kostte nogal wat hoofdbrekens. Een groot aantal docenten bleef in eerste instantie het antwoord schuldig. Ondoorzichtigheid van de tekst, of het te snel naar een wiskundig model willen werken, waren daarbij enkele oorzaken.
Een docent die wèl binnen de gegeven twintig minuten tot het correcte antwoord kwam, gaf de volgende oplossing:

t: totaal aantal ratten

0	2	+ 6				= 8
1	2	+ 2·6				= 14
2	2	+ 3·6				= 20
3	2	+ 4·6	+ 1·18			= 44
4	2	+ 5·6	+ (1+2)·18			= 86
5	2	+ 6·6	+ (1+2+3)·18			= 146
6	2	+ 7·6	+ (1+2+3+4)·18	+ 54		= 278
7	2	+ 8·6	+ (1+ ... +5)·18	+ (1+3)·54		= 536
8	2	+ 9·6	+ (1+ ... +6)·18	+ (1+3+6)·54		= 974
9	2	+ 10·6	+ (1+ ... +7)·18	+ (1+3+6+10)·54	+ 162	= 1808

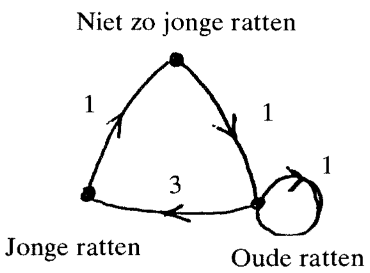
Een andere docent kwam met een wat compactere oplossing:

t	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	2	6	6	6	½·8·6= 24	½·14·6= 44	½·20·6= 60	½·44·6= 132	½·86·6= 258	½·146·6 438	½·278·6 834
T	2	8	14	20	44	86	146	278	536	974	1808

Vrijwel alle aanwezigen hadden het gevoel dat het allemaal wat wetenschappelijker c.q. wat wiskundiger moest kunnen. Er moest toch één of andere formule te vinden zijn! Let wel, er werd helemaal niet naar een formule gevraagd, maar men had gewoon de behoefte – als wiskundige – dit groeiproces in een formule te vangen.
Een week of twee later, toen de volgende bijeenkomst plaats vond, kwam er dan ook een formule te voorschijn:

$$A_{n+3} = \cancel{A_n \cdot}\, 6\, A_{n+2} + A_n \cdot 3$$

Deze recurrente betrekking bevredigde de aanwezigen in hoge mate. Men was alsnog in de wiskunde beland. Jammergenoeg is deze betrekking in het onderhavige geval helemaal niet zo mooi. Zoals 't Hart al opmerkt, is die 1808 een fictief getal. Er is sterfte; moeders verwerpen soms hun jongen; vrouwtjes komen soms lange tijd niet in oestrus.
Hoe is het in bovenstaande formule te zien als enkele factoren een rol gaan spelen?
Nee, erg doorzichtig is de mooie wiskundige formule niet.
Eén van de aanwezige docenten suggereerde nog dat Leslie- of bevolkingsvoorspellingsmatrices misschien goede diensten zouden kunnen bewijzen. Dit onderwerp – dat al was behandeld op de cursus – beschreef immers zo aardig allerlei groeiprocessen. Ondanks z'n overtuiging dat het moest kunnen, kwam hij er die middag niet uit.
Toch kan het.
Het verhaal van Maarten 't Hart kan samengevat worden met de volgende graaf:



Immers:
a. het is zeker dat "jonge ratten" zullen overgaan (na 40 dagen) naar "niet zo jonge ratten", dus de kans daarop is 1;
b. het is zeker dat "niet zo jonge ratten" zullen overgaan (na 40 dagen) naar "oude ratten", dus de kans daarop is 1;
c. oude ratten gaan – in dit model – niet dood, vandaar de lus met de 1 bij de oude ratten. En dat niet alleen: ze produceren ook nog eens drie vrouwtjes. Vandaar de 3 bij de laatste pijl.

De populatie ratten is dus ingedeeld in drie klassen:

oude ratten:	ouder dan 80 dagen
niet zo jonge ratten:	tussen 40 en 80 dagen
jonge ratten:	jonger dan 40 dagen

De gevonden graaf kan nu gemakkelijk vertaald worden naar een matrix:

$$\begin{array}{ll} & \text{VAN} \\ & \begin{array}{ccc} \text{jong} & \text{niet zo jong} & \text{oud} \end{array} \\ \text{NAAR} \begin{array}{r} \text{jong} \\ \text{niet zó jong} \\ \text{oud} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Als nu de beginpopulatie wordt voorgesteld door $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

zal $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ de populatie na 40 dagen opleveren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Door herhaalde vermenigvuldiging krijgen we zo de gevraagde 1808 ratten, keurig uitgesplitst naar leeftijdsklasse.
Dit model is wèl doorzichtig:
- Er is sterfte: de énen in de matrix moeten verlaagd worden.
- Moeders verwerpen hun jongen; vrouwtjes komen niet in oestrus: de drie in de matrix moet verlaagd worden.

En het effect van dergelijke veranderingen kan zeer snel zichtbaar gemaakt worden, doordat er binnen het kader van de automatische gegevensverwerking een standaardprogramma "Lesliematrices" is.
Figuur 1 geeft aan wat de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}9 \end{pmatrix} \quad \text{na}$$

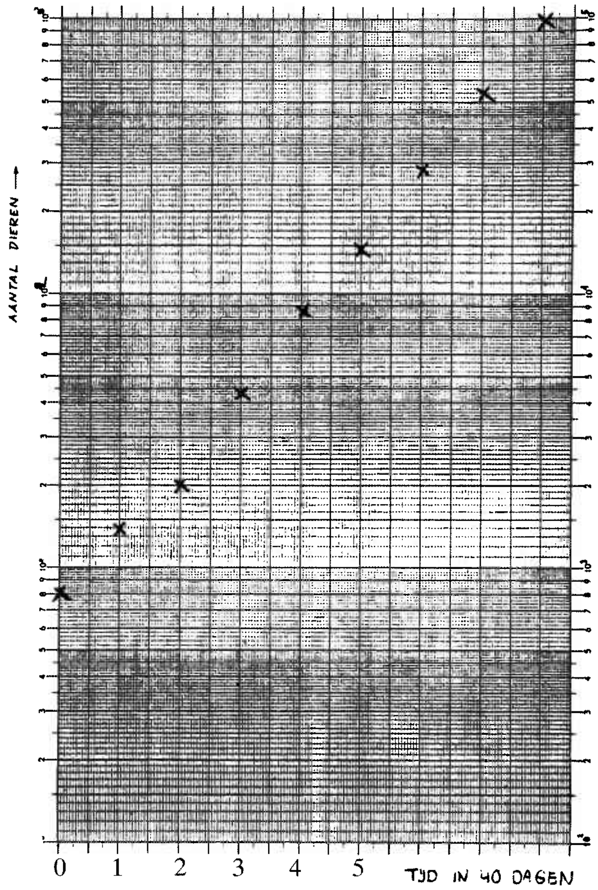
verwerking oplevert.

In plaats van 1808 zijn er nu 121 ratten!

Tenslotte kan de vraag nog gesteld worden of hier sprake is van exponentiële groei. Voor de toekomstige leerlingen wiskunde A zijn er twee mogelijkheden om dat te verifiëren: kijken of er een constante groeifactor is, of een grafiek op logaritmisch papier. Dat laatste geeft als resultaat figuur 2.

```
                    R E S U L T A A T

                                  * inlezen gegevens *
orde? 3
rij 1    0 0 2
kental  2 0,6
rij 3    0 0.9 0.9
aanvangspopulatie 0 0 2

bevolgingsopbouw herleiden tot percentages? (ja/nee) nee


                                  * afdrukken lesliematrix *
 0.000 0.000 2.000
 0.600 0.000 0.000
 0.000 0.900 0.900
                                  * afdrukken kolommatrix *
     0     0     2
       totaal:      2
druk return om door te gaan, anders stop gevolgd door return
                                  * volgende kolommatrix berekenen *
                                  * afdrukken kolommatrix *
     4     0     2
       totaal:      6

                                  * volgende kolommatrix berekenen *
                                  * afdrukken kolommatrix *
     4     2     2
       totaal:      8

                                  * volgende kol
                                  * afdrukk

                                              erekenen *
                                              trix *
    29    12    20
       totaal:     60

                                  * volgende kolommatrix berekenen *
                                  * afdrukken kolommatrix *
    40    17    28
       totaal:     85

                                  * volgende kolommatrix berekenen *
                                  * afdrukken kolommatrix *
    57    24    41
       totaal:    121
```

figuur 1



figuur 2

Kortom, afgezien van wat beginmoeilijkheden, ziet het geheel er zeer exponentieel uit. Een functievoorschrift is nu redelijk nauwkeurig te geven, en voor hen die dat wensen: het is te bewijzen – niet op leerlingniveau – dat een Lesliematrix vaak exponentiële groei oplevert.

Het verhaal van Maarten 't Hart levert op deze wijze fraaie mathematisering op. Op verschillend niveau en vanuit verschillende invalshoek. Fraai blijkt daarbij, dat het niet altijd waar is dat uitgaan van de ideale situatie tot ondoorzichtigheid en onechtheid leidt. In dit geval kon op eenvoudige wijze de ideale situatie eenvoudig worden vervangen door een iets realistischere.