Grafieken inhoud geven

L. Streefland
OW & OC, R.U. Utrecht

Samenvating

Grafieken spreken hun eigen taal. Om deze echt te laten verstaan zullen de leerlingen ook zelf grafieken moeten construeren, een activiteit die nogal eens verontachtzaamd wordt en wellicht ook onnodig lijkt. Zonder dat kunnen de leerlingen immers ook wel een grafiek lezen? In dit artikel gaat het om meer. Bedoelde constructie omvat namelijk heel wat meer dan alleen lezen en interpreteren. Grafieken kunnen ook in dienst staan van de begripsverwerving, of kunnen worden toegepast om problemen op te lossen. Inhoud staat daarbij centraal.

Summary

The language of graphics is specific. In order to understand this language mathematics education should offer the opportunity to the pupils to construct different types of graphs. An activity of this kind is often disregarded, maybe due to the probable unneccessariness. Are not the pupils capable to read and to interpret graphs without having them constructed.
This contribution offers a broader view. The intended construction implies much more than reading and interpreting graphs. For instance graphs can serve concept attainment and problem-solving. Volume is the leading idea in this contribution.

Inleiding

Dat grafieken een belangrijk wiskundig werktuig zijn zal niemand willen tegenspreken. Zo bevatte de tweede jaargang van de Nieuwe Wiskrant bijvoorbeeld tenminste een tiental bijdragen waarin grafieken de boventoon voerden, dan wel tenminste een rol van enige betekenis speelden.
Enkele artikelen richtten zich vooral op het *verstaan* van grafiekentaal (1). In enkele bijdragen zal ik wat suggesties geven met het oog op het leren *spreken* van grafiekentaal (2). Deze bijdragen moeten beschouwd worden als een aanvulling op de artikelen van Krabbendam en Speelpenning, waarnaar in (1) verwezen werd. Deels ook zijn het kritische kanttekeningen bij die artikelen, omdat er m.i. teveel wordt verondersteld door genoemde auteurs t.a.v. grafiekentaal.
Aan het leren interpreteren van, betekenis verlenen aan en toepassen van grafieken, dient het zelf samenstellen door de leerlingen, de eigen constructie van grafiekenmateriaal – op alle niveau's in het leerproces – vooraf te gaan. Vooral de eigen ervaring, het zelf voortgebrachte wiskundig produkt, dient aanleiding te zijn tot verder nadenken en reflectie.
Wat de grafieken aangaat, deze vormen vanzelfsprekend geen doel in zichzelf. Met grafieken kunnen hogere doelen gediend worden, zoals het ondersteunen van de verwerving van bepaalde begrippen door de leerlingen, of in dienst van het oplossen van problemen. Beide aspecten zullen centraal staan in twee bijdragen over volume resp. inhoud en twee bijdragen over het begrip snelheid. Ik zal me daarbij baseren op materiaal, zoals dat destijds in het Wiskobasproject van het IOWO is ontwikkeld.

Wie tot dusver de indruk krijgt dat we de breuken (en hun "verwanten" zoals kommagetallen e.d.) de rug hebben toegekeerd, zit ernaast. De aangedragen suggesties blijken zich juist voor te doen als rijke toepassingsgebieden. Dat is dus mooi meegenomen.
Wat deze eerste bijdrage aangaat beperken we ons tot de volgende zaken: inhoud (volume), het schatten van inhouden, een maatsysteem voor inhouden e.d. Waarom deze zaken? Wel, we zijn van mening, dat de periode in ons reken-/wiskunde-onderwijs nog steeds niet voorbij is, dat inhoud geïdentificeerd wordt met "lengte × breedte × hoogte" of "grondvlak × hoogte"? We willen laten zien, dat inhoud een bredere interpretatie behoeft en dat grafieken daarbij nuttige instrumenten kunnen zijn.
Om enkele aspecten te noemen:
Als het genoemde rekenrecept ($l \times b \times h$) juist is, dan is dat zo, omdat inhoud evenredig is met de lengte bij constante breedte en hoogte, of evenredig met de breedte bij... etc.
Uit onderzoek blijkt dat het jaren kost om de noties van kinderen over inhoud tot volwaardig begrip te laten rijpen (3). Nadruk krijgen echter vooral het voorspellen en grafisch weergeven van het hoogteverloop van het water, waarmee gegeven (glazen) vaten "eenheidsgewijs" gevuld worden en verder een (snelheids) taal die daarbij ontwikkeld wordt om genoemd proces te beschrijven en het beargumenteerd kiezen van een passend vat bij een grafisch gegeven hoogteverloop.
In een volgende bijdrage staan, bij wijze van vervolg, lineaire verbanden in het brandpunt van de belangstelling en worden activiteiten beschreven, waarin enkele van zulke voorbeelden tot *geformuleerde betrekkingen*

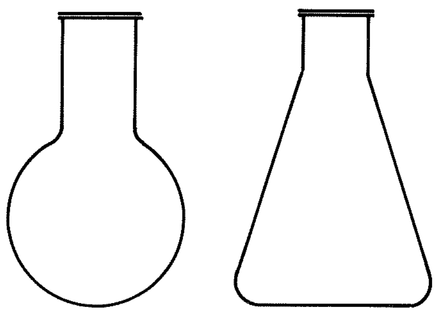
worden beknopt.
Het geheel is bedoeld voor de leeftijdscategorie van 11-13 jaar. De activiteiten worden dichtbij het onderwijs beschreven.

Volume inhoud geven, een sfeertekening vooraf

De onderwijsgevende heeft een belangwekkende collectie glazen potten, flessen, vaten e.d. om zich heen verzameld. De kinderen zitten in een kring rondom dit laboratorium om de betrokkenheid bij wat komen gaat te vergroten (die betrokkenheid eist, dat je als leerling kunt zien wat er gebeurt).

O :*"Wie zegt er eens iets van de flessen?"*
Ll: *"Ze zijn allemaal verschillend van vorm".*
Ll: *"Niet allemaal. Die twee maatbekers lijken veel op elkaar. Ze zijn verschillend van grootte, van inhoud".*
O: *"Wat versta je onder inhoud?"*
Ll: *"Wat er in zit of wat er in kan".*
O: *"Waaraan denk je dan als je zegt 'wat er in kan?"*
Ll: *"Aan een vloeistof,... water".*
O: *(Laat een blok teakhout zien) "Hier kun je niets instoppen. Heeft dit nu ook een inhoud?"*
Ll: *"Ja, maar je kunt er niets indoen, 't zit er al in".*

Het gesprek komt op massief en leeg en van daaruit op het onderscheid tussen inhoud en volume.
Inhoud heeft betrekking op "kan *bevatten*" en *Volume* op de hoeveelheid stof, waaruit een object *"bestaat"*.
We ordenen de glazen eens naar inhoud:
- een bolvormige kolf(inhoud ≈ 11,5 l);
- een erlenmeyer (inhoud ≈ 5,5 l);



- een grote maatbeker (2 l);
- twee maatglazen (0,1 l en 0,25 l).

De vraag is probleemloos. Je ziet het immers maar zó. We proberen hetzelfde met de vier beschikbare cilinders die nog zo'n belangrijke rol in het vervolg zullen gaan spelen.
Het betreft vier perspex cilinders met vierkante en circulaire doorsnede en waarvan de manteloppervlakte telkens gelijk is aan die van een A4-blaadje.
Nu is het al lastiger. De leerlingen kiezen bijvoorbeeld beide 21 cm hoge cilinders, maar twijfelen aan de gelijkheid van hun inhouden. Hoe zou je dit kunnen controleren?
Vullen en overgieten blijken voor de hand liggende middelen en ook de keuze van de gegeven maatbeker (2 l) als intermediair. (We voeren dit echter niet uit in verband met het vervolg. Het blijft bij gissen!).

N.B. In de hele opbouw slaan we in feite de stappen "samenstellen" (glas a kan evenveel bevatten als de glazen b en c samen) en het meten met een natuurlijke maat (glas a kan 5 glazen b bevatten en glas c drie glazen b) over. We gaan er nu maar vanuit dat in voorgaande jaren voldoende aandacht is besteed aan het begrip inhoud. De leerlingen kunnen bovendien "terugvallen" op praktische ervaringen met de grootheid inhoud. We vervolgen met de standaardmaat en decimale verfijningen daarvan.
Vervolgens wordt een fles gevuld met water; overgieten in de maatbeker. (Klopt 't?) Hoeveel kleine maatglazen kunnen er in? (van 0,1 l).
Schatten, controleren. 1 l = 10 kleine maatglazen;
1 klein maatglas $=\frac{1}{10}$l (0,1 l).
Naar analogie van de verfijning van de meter "bedenken" we een nieuwe naam *deciliter.*
Regels: 1 l = 10 dl en 1 dl = 0,1 l.
Hoeveel grote maatglazen (0,25 l) kunnen er in 1 l?
Schatten, controleren. 1 l = 4 grote maatglazen;
1 groot maatglas $=\frac{1}{4}$l. Kommagetal?
Het 0,1 dl maatglas wordt te hulp geroepen:
- hoeveel hele liters in het grote maatglas? (0)
- hoeveel kleine maatglazen? (deciliters, tienden)
  We proberen 2, dat geef ons 0,2 l.
  Wat kan er nu nog bij? De helft van$\frac{1}{10}$l). Hoeveel is dat?

Ziedaar een sfeertekening van de lessen, waarin een aantal zaken m.b.t. inhoud op een rij gezet resp. verscherpt werden. Hetzelfde geschiedde m.b.t. volume, waarbij teakhouten blokken van allerlei afmetingen gebruikt werden.
Het verband tussen inhoud en volume kwam eveneens in de aandacht. Als sleutel tot overgang van een maatsysteem voor de een naar een maatsysteem voor de ander werd de gelijkheid van 1 liter en 1 dm^3 "ontdekt".

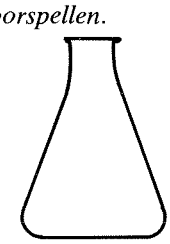
Inhouden bepalen

Van enkele van de beschikbare vaten (bolvormige kolf en erlenmeyer bijvoorbeeld) schatten we de inhouden. Vervolgens worden die bepaald door het telkens bijvoegen van een te voren gekozen eenheid.
We bereiden daarbij een komende gedacht experiment al voor, door:
- te letten op de stijging;
- te pogen die stijging te beschrijven;
- de stijging ook een aantal malen daadwerkelijk te (laten) meten.

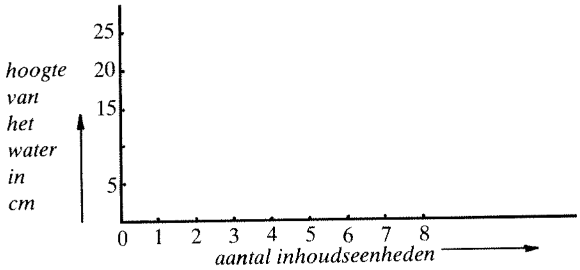
N.B.
1. De inhoud van enkele vaten:
   - de bolvormige kolf: ≈ 11,5 l (hoeveel dm^3 is dat nu?);
   - de erlenmeyer : ≈ 5,5 l.
2. Op sommige vaten is de inhoud aangegeven.

Een gedacht experiment; grafiek voorspellen.

We gaan uit van een beschikbare fles en stellen, wat we ermee willen gaan doen:

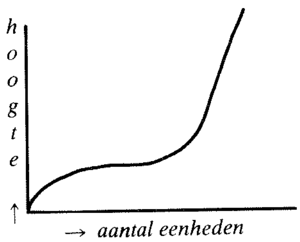


Telkens dezelfde hoeveelheid (eenheid) water erbij doen. Iedere keer meten we de hoogte van het water (in gedachten). We maken een grafiek waarin je kunt aflezen hoe hoog het water zal staan na een bepaald aantal eenheden.
Evenwel: we voeren het experiment niet echt uit, maar proberen te beredeneren hoe de grafiek er zal gaan uitzien. Dat hoeft niet precies.

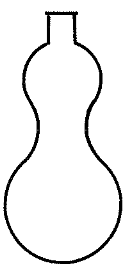


Wie kan vertellen hoe dit zal gaan bij onze eerste fles? We denken daarbij eerst alleen aan het stijgen en daarna pas aan de grafiek, dus hoe zal dat gaan met het stijgende water bij onze eerste fles?

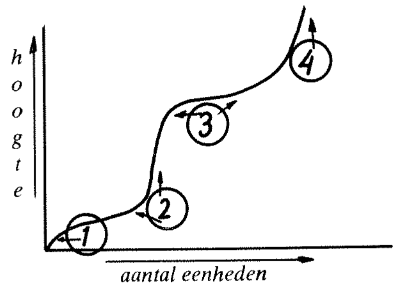
Redenering: In het begin wordt de fles wijder, dus het water stijgt daar telkens iets minder, daarna wordt de fles naar boven toe steeds nauwer, per eenheid zal het water dus telkens iets meer stijgen. Wie kan nu een grafiek maken die bij deze redenering past?



Als de grafiek op het bord staat, vragen we ons af of deze wel juist is. (Nee, in feite zou je een stippengrafiek moeten krijgen). Hoe zou je ervoor kunnen zorgen dat we zo'n krommelijngrafiek krijgen? (Héél kleine eenheden bijvoegen; de fles onder een druppende kraan zetten en na elke druppel meten. Wanneer krijg je pas echt een doorlopende grafiek?).
We proberen nog eens een andere fles:



Redenering: In het begin (onderaan) wordt de fles eerst wijder, dus per eenheid zal het water telkens wat minder stijgen, totdat het wijdste punt bereikt is, daarna wordt de fles nauwer, het water stijgt telkens wat meer (wat sneller) per eenheid, totdat het nauwste punt bereikt is etc.

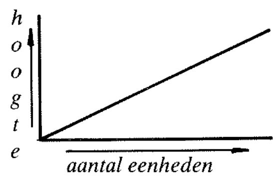


In de grafiek:
1 de fles wordt wijder, dus het water stijgt langzamer, de grafiek "buigt af".
2 de fles wordt nauwer, het water stijgt meer per eenheid (gaat sneller stijgen), de grafiek wordt steiler.
3/4 als respectievelijk 1 en 2.

Het zal duidelijk zijn dat door het vestigen van de aandacht van de leerlingen op de stijging, zij op de veranderende doorsnede van een gegeven vat zullen moeten gaan letten. Hierdoor wordt bijgedragen aan de verwerving van het begrip "inhoud", doordat alle drie dimensies zo in de beschouwingen worden betrokken.

Nog een gedacht experiment; fles voorspellen.

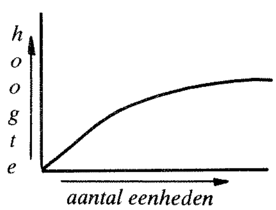
We bekijken ook eens enkele voorbeelden, waarbij we het omgekeerde van de leerlingen vragen, dus: gegeven een grafiek, gevraagd welke fles hoort erbij?



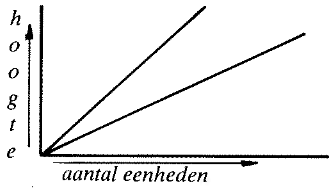
We laten de leerlingen aan de hand van de gegeven grafiek eerst de stijging van het water beschrijven, voordat we ons bekommeren om de vorm van het bijbehorende vat (In dit geval: het water stijgt constant (of met constante snelheid)).
We kunnen bij dergelijke vragen met het oog op differentiatie verschillendsoortige reacties van de leerlingen uitlokken. Een leerling wie zo'n vraag verbaal boven het hoofd groeit, kan bijvoorbeeld met een tekeningetje best bewijzen, te weten hoe het zit.

O: "Welke fles hoort bij deze grafiek"?
Hij geeft een leerling de beurt, die geen enkele reactie vertoont.
O: "Kom het maar tekenen".
Ll: (tekent)

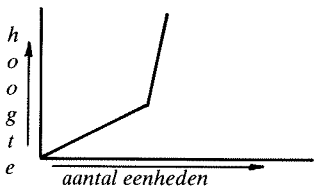
In een eerdere situatie werd door een leerling van "een gelijke fles" gesproken, waarmee eveneens een cilinder bedoeld werd. Dit constante stijgen van het water betekent voor de fles: hij wordt nergens wijder of nauwer, dus is het een cilinder.
In de geest van het voorgaande doen we nog enkele suggesties:



Het water stijgt telkens iets minder snel. De bijbehorende vaas wordt dus kennelijk wijder.
N.B. Men zou eventueel enkele overwegingen kunnen inlassen, bijvoorbeeld: het toevoegen van een eenheid water aan een zwembad (geen zichtbare stijging waarneembaar (horizontale grafiek) of toevoeging van een eenheid aan een heel nauw vat (de grafiek is bijna verticaal).



Dit is "natuurlijk" een grafiek voor twee verschillende cilinders. In de ene stijgt het water sneller dan in de andere. (Waarom? De grafiek is steiler. Dus? De ene cilinder is nauwer dan de ander. Of: de doorsnede van de ene cilinder is kleiner dan die van de andere). Stel dat beide grafieken voor één en dezelfde cilinder zijn, wat is er dan aan de hand? Er is "met twee maten gemeten".



En wat is hier aan de hand?
Kennelijk een vat dat uit twee cilindergedeelten bestaat: 
Hoe weet je dat het bovenste gedeelte het nauwst is? (Grafiek steiler).

De bolle fles, een kolf naar onze inhoud.

Terug naar de bolvormige kolf van het begin. Die bleek 11,5 l water te kunnen bevatten. Stel we zouden die fles vullen. Hoe zou de grafiek er dan uit gaan zien? Als in de voorgaande gedacht experimenten beredeneren we met elkaar het verloop van de grafiek.
Nu kijken we eens wat preciezer.
Stel we doen telkens 1 l water in deze bol, dan gebeurt het volgende. Na 1 l water staat het water 5,2 cm hoog. Hoe groot is dan de stijging? We bouwen zo met elkaar de volgende tabel op (tot en met 6 l), waarbij we telkens alleen informatie verschaffen over de hoogte van het water. (De leerlingen bepalen om beurten de volgende stijging, verschil in kommagetallen!) en de volgende stip in de grafiek:

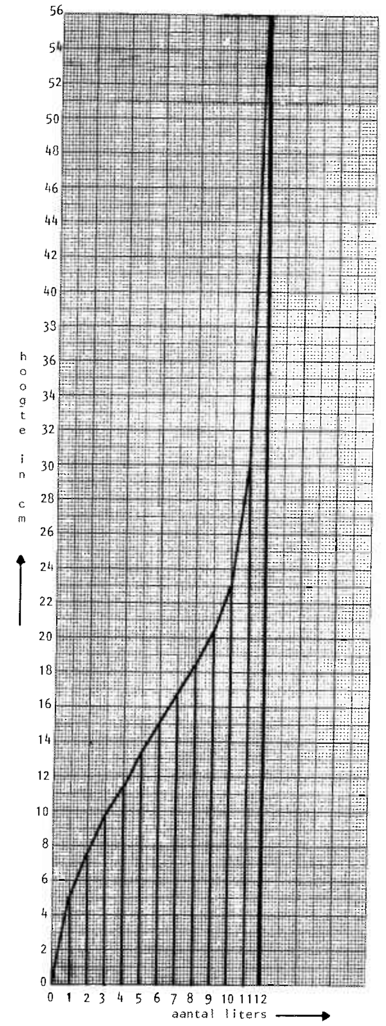
aantal liters	*hoogte*	*stijging*
0 l	*0 cm*	*0 cm*
1 l	*5,2 cm*	*5,2 cm*
2 l	*7,7 cm*	*2,5 cm*
3 l	*9,7 cm*	*2 cm*
4 l	*11,5 cm*	*1,8 cm*
5 l	*13,2 cm*	*1,7 cm*
6 l	*14,9 cm*	*1,7 cm*

Wie vertelt (zonder meten) waar het water nu in de fles zou staan? (Ongeveer in het midden, want 6 l is ruim de helft van 11,5 l òf beide laatste keren steeg met maar 1,7 cm; we "zitten" dus nu in het wijdste gedeelte van de fles).

Wie kan nu voorspellen hoe het verder zal gaan? De symmetrie in de bol blijkt een rol te gaan spelen, getuige de volgende tabel.

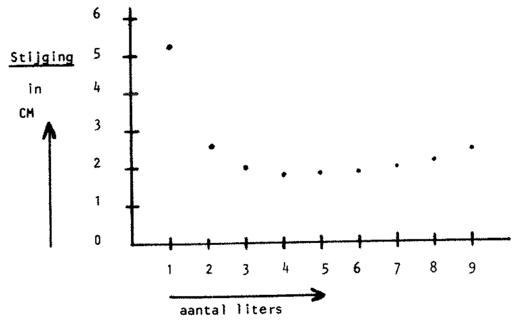
aantal liters	*hoogte*	*stijging*
0 l	*0 cm*	*0 cm*
1 l	*5,2 cm*	*5,2 cm*
2 l	*7,7 cm*	*2,5 cm*
3 l	*9,7 cm*	*2 cm*
4 l	*11,5 cm*	*1,8 cm*
5 l	*13,2 cm*	*1,7 cm*
6 l	*14,9 cm*	*1,7 cm*
7 l	*16,6 cm*	*1,7 cm*
8 l	*18,4 cm*	*1,8 cm*
9 l	*20,4 cm*	*2 cm*
10 l	*22,9 cm*	*2,5 cm*
11 l	*30 cm*	*7,1 cm*
12 l	*?*	*?*

Hoe is de symmetrie in de grafiek terug te vinden? (ruwweg: "de grafiek tot en met de 6 l" draaien over 180°).
Eventuele vragen naar aanleiding van de grafiek: "waar" zit de "evenaar" van de bol? (buigpunt in de grafiek); "waar" zitten even grote doorsnijdingscirkels, klopt de inhoud van de bolkap met onze waarnemingen?
Hoe ziet het laatste gedeelte van de grafiek eruit? (Lineair vanwege de cilindrische hals van de kolf).
N.B. Kies op de horizontale as (op het bord) als eenheid 1 dm en op de verticale as als eenheid 1 cm.



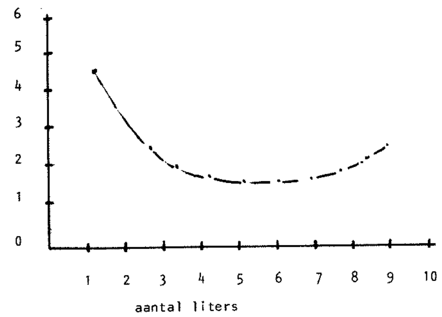
We brengen de stijging, die we bij het vullen van de bol waargenomen hebben nog eens in grafiek (zie de tabellen).
De eerder geconstateerde symmetrie komt (uiteraard) in de grafiek prachtig tot uitdrukking.

▶ *Kunnen we er geen grafiek voor de "stijgsnelheid" van maken?*

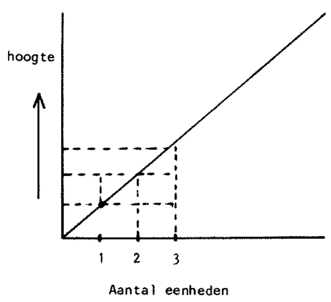


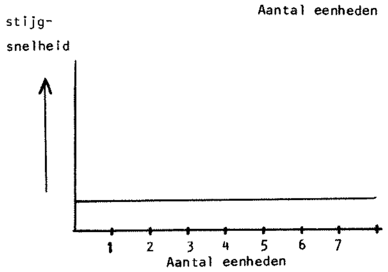
We nemen de redenering bij de hoogtegrafiek (bord) er nog eens bij. De bol wordt in het begin wijder, daardoor zal het water in het begin minder snel stijgen, totdat de bol half vol is, daarna stijgt het water telkens weer wat sneller door het nauwer worden van de bol. Maar dat klopt precies met onze stijgsnelheidsgrafiek:

▶ *Hoe zouden we kunnen zorgen voor een doorlopende grafiek?*



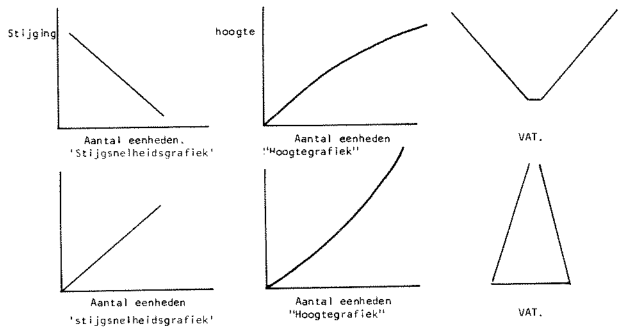
Tenslotte worden nog enkele andere stijgingsgrafieken bekeken.
Voor een cilinder zag de "hoogtegrafiek" er zó uit:





▶ *Wie bedenkt de stijgsnelheidsgrafiek erbij?*

Eventueel kunnen we ook de volgende voorbeelden nog bekijken.



Besluit

Hoogte- en stijgingsgrafieken speelden in dit gedeelte een belangrijke rol. Ze zijn voorbeeldig met betrekking tot afstand-, tijd- en snelheidsgrafieken en vormen daarop een belangrijke voorbereiding. Vooral het beheersbare in de experimentjes maakt tussentijds beschouwen en nadenken steeds mogelijk. De variabele "tijd" is als het ware gevangen in het eenhedenverloop, dat naar believen gemanipuleerd kan worden.
Tenslotte is de bijdrage aan de begripsverwerving (inhoud) onmiskenbaar en met betrekking tot het grafisch beschrijven en het interpreteren van grafieken, vormt het voorafgaande verhaal een onmisbare schakel (3).
Een belangrijke tussenstap van verschijnsel naar grafiek was steeds het verhaal, in dit geval over stijgsnelheid. Grafieken verbeelden zulke verhalen zonder franje; in het verhaal wordt de constructie van de grafiek voorbereid, de weg ertoe (deels) geëffend. In de grafiek wordt het begrip dat centraal staat geobjectiveerd. (4).

(1) Zij bijvoorbeeld:
Krabbendam, H., *De taal van grafieken*, Nieuwe Wiskrant jrg. 2 nr. 4, 1983, 35-41.
Speelpenning, J., *Over microcomputers, watermeters, badkuipen en couveuses*, Nieuwe Wiskrant jrg. 2 nr. 4, 1983, 39.
(2) Voor enkele eerder gepubliceerde ideeën verwijzen we naar:
Freudenthal, H. e.a., *Five Years IOWO, IOWO Snapshots*, Educational Studies in Mathematics, 7, 3, 1976, 190-367.
Streefland, L., *Zon zien*, Wiskobasbulletin, 4, 2, 1975, 168 e.v.
Streefland, L., *Afstand-tijd-grafieken*, Wiskobasbulletin 4, 3/4, 1976. 432 e.v.
(3) Vergnaud, G., *Why is an epistemological perspective a necessity for research in mathematics education*.
Bergeron, J.C. en N. Herscovics (eds), *PME-NA*, vol. I. Montreal, 1983, 2-21.
(4) Zie bijvoorbeeld:
Streefland, L., *Zoals eenvoudig valt in te zien*, Nieuwe Wiskrant, proefnummer, 1981, 3-8.