Enkele gedachten over procentrekening in het V.O.

A. Treffers / H. Verhage
OW & OC, R.U. Utrecht

Samenvatting

Aan de hand van enkele nogal negatieve ervaringen met procentrekening in 5 VWO (!) worden enkele aspecten van dit veelal verwaarloosde rekenonderdeel belicht. Het blijkt dat veel leerlingen kiezen voor de additieve aanpak die tot grote moeilijkheden leidt. De leerlingen vinden de multiplicatieve aanpak minder "duidelijk", maar het rekenen met procenten op de multiplicatieve manier is wel veel doorzichtiger.

Summary

Percentage-arithmetic has always been very difficult, even at pre-university level. This was proven once more when, during a mathematics lesson, attention was paid to inflation. The problems occurred because children prefer the additive approach.
In this case – and in many others the multiplicative approach leads much faster to the desired result, but the students are very unfamiliar with this approach.

Stel u wordt voor de volgende keuze geplaatst:

Een produkt kopen met eerst de 5-procent korting en vervolgens over het dan verkregen bedrag 18 procent b.t.w. betalen, ofwel eerst de b.t.w. betalen en op dat "nieuwe" bedrag de korting van 5 procent toepassen.

Welke mogelijkheid zou u kiezen?
Als u dit probleem voorlegt aan mensen uit uw omgeving, zult u merken dat het echt een probleem is!

Een HEWET probleem

In het HEWET-pakket "Grafische Verwerking"[1] staat de nevenstaande opgave, waarvan de onderdelen a. en b. besproken zullen worden.

In de door ons geobserveerde 5-VWO-klas gaf onderdeel a. betrekkelijk weinig moeilijkheden. Kenmerkend was de volgende *additieve* aanpak welke vrij algemeen werd gevolgd en bijvoorbeeld zo genoteerd:

'80		100,00
'81		110,00
'82	110 + 10%	121,00
'83	121 + 10%	133,10
'84	133,10 + 10%	146,41
'85	146,41 + 10%	161,05
'86	161,05 + 10%	177,16

≫ 10. Een ijverig meisje werkt één avond in de week in een disco en verdient daarmee in 1980 100 gulden per avond. Met de eigenaar is afgesproken dat ze de komende jaren dit bedrag zal blijven verdienen, maar dat het voor inflatie gecorrigeerd zal worden. In 1981 verdient Anneke dan ook 110 gulden, want de inflatie was 10%. In "1980 guldens" is dit nog steeds 100 gulden.

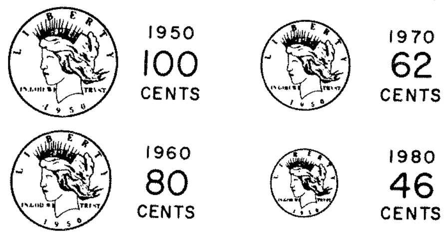
a. Bereken het bedrag dat Anneke in 1986 ongeveer moet krijgen om nog steeds 100 "1980 guldens" te verdienen.

Het discowezen bloeit enorm in de jaren 80, met als gunstig gevolg voor Anneke, dat ze 10 gulden per jaar 'echte' salarisverhoging krijgt. Dus in 1985 verdient ze 150 "1980 guldens".

b. Teken de grafiek die Anneke's inkomen uit de disco weergeeft in "1980 guldens" van 1980 - 1986.
Teken in hetzelfde plaatje de grafiek die het inkomen aangeeft in werkelijke guldens.

c. Kun je aan de hand van de vorige grafiek een voorspelling doen over het bedrag dat Anneke in 1990 zal verdienen in "1980 guldens"?

De grote lijn van de ontwikkeling van de bijverdienste is duidelijk uit de grafiek - in "1980 guldens" - af te lezen.
Die grote lijn- de trend - is: 10 gulden per jaar erbij.



Dit plaatje toont de afnemende waarde van de dollar sinds 1950. Het plaatje is getekend in 1970 zodat de 46 cent voor 1980 slechts een voorspelling is. In werkelijkheid was de 1950 dollar in 1980 minder dan 40 cent!

Bij b. deden zich echter aanzienlijke problemen voor. We volgen een deel van de klassikale nabespreking.

Leraar: "Een andere oplossing is die van groep 5." Monique heeft de beurt, ze vertelt hoe ze het gedaan hebben: "(loon plus verhoging) keer 10 procent". Op het bord verschijnt:

groep 5
1980 *f* 100,–
1981 [*f* 100,– + (*f* 10,– + 10%] + 10% =
[*f* 100,– + *f* 11,–] + 10% =
f 111,– + *f* 10,10 = *f* 122,10

Hierna vertelt Saskia het antwoord van groep 1. Op het bord verschijnt:

groep 1
1980 *f* 100,–
1981 [*f* 100,– + *f* 10,–] + 10% = *f* 110,– + *f* 11,–
= *f* 121,–
1982 [*f* 121,– + *f* 10,–] + 10%

Leraar: "We hebben nu twee verschillende berekeningen, dus minstens één moet fout zijn. Wie heeft er opmerkingen?"
Servaas heeft kritiek op het antwoord van groep 5.
Leraar stelt voor 1982 er nog bij te nemen voor groep 5.
Han krijgt de beurt. Hij zegt o.a.: "Er komt een 81-tientje bij op."
Op het bord verschijnt:

groep 5
1982 [*f* 122,10 + *f* 10,– · $1{,}1^2$] + 10%

Nu heeft Suzan commentaar: "Je rekent twee keer inflatie over hetzelfde bedrag."
Leraar: "Maurice, dit is een heftige aanval op jou."
Maurice antwoordt dat hij het met dit groeps-antwoord ook niet eens was: "Ik heb het hem vorige keer geprobeerd duidelijk te maken, maar hij luisterde niet." (hij bedoelt Han)
Leraar: "Hoe heb je dat uitgevochten."
Maurice: "Ik heb me er bij neergelegd."
De leraar vraagt aan Monique hoe zij dit beleefd heeft. Ze antwoordt: "Ik heb niet anders gehoord dan dat hij het er mee eens was."
Leraar: "Je kunt er iets van leren." Hij duidt aan dat het bij het groepswerk om "keiharde argumenten" gaat. Vervolgens gaat de leraar over naar groep 1: "Wie heeft commentaar bij groep 1?"
De klas denkt na.
Riëtte twijfelt (hetgeen het begin van wetenschap heet te zijn).
De leraar legt uit dat het antwoord te laag uit komt.
Marc merkt op: "Dus de inflatie zit maar één keer in het tientje verwerkt."
De conclusie is, dat alle antwoorden fout zijn.
Han zegt dat zijn groep het wel goed bedoeld had, maar dat het verkeerd op het bord staat.
Leraar: "Han krijgt een kans op revanche."
Op het bord verschijnt:

1980 100,–
1981 (100,– + 10) · 1,1

Martine: "Je kunt er makkelijker + 10% bij zetten."
Leraar: "+ 10% is hetzelfde als vermenigvuldigen met 1,1"
Martine: "Maar + 10% is duidelijker."
De leraar verandert het:

1981 (100,– + 10,–) + 10%
1982 (121,– + 10%) + (11,– + 10%) =
121,– + 12,10 + 11,– + 1,10 =
123,10 + 12,10 = 145,20
1983 (145,20 + 10%) + (12,10 + 10%) = 173,30

De leraar stelt voor het nog eens anders op te schrijven, wel met 1,1. Misschien komt er dan een regelmaat te voorschijn. Martine krijgt de beurt.
Op het bord verschijnt:

Anders opgeschreven
1980 100
1981 100.1,1 + 10.1,1 = 110.1,1
1982 110.1,1.1,1 + 10.1,1^2 =
110.1,1^2 + 10.1,1^2 = 120.1,1^2

Martine heeft moeite met "twee keer de factor 1,1": "Dat zal wel 2,2 zijn."
De leraar vraagt aan Marc of hij al enige regelmaat ziet. Marc geeft dan de antwoorden voor 1983 en 1984.
Op het bord verschijnt:

1983 120.1,1^3 + 10.1,1^3 = 130.1,1^3
1984 140.1,1^4

De berekening wordt nog eens uitgevoerd voor 1997 en tenslotte wordt de algemene formule op het bord gezet (Astrid heeft de beurt):

1997 (100 + 170).1,1^{17}
na n jaar:

$\boxed{(100 + n.10).1{,}1^n}$

Hierna wordt de grafiek getekend en tenslotte wordt een schatting gepleegd voor 1988 (zowel door aflezen uit de grafiek als door berekening).

Commentaar

Ook hier zit de problematiek in de *additieve* werkwijze: + 10% is "duidelijker" dan vermenigvuldigen met 1,1, zegt Martine.
Het is mede om deze reden dat de informatie die in de tekst van de opgave staat ("Dus in 1985 verdient ze 150 '1980 guldens' ") niet opgepakt wordt – al blijft 't natuurlijk wel de vraag of de leerlingen via 10.a niet enigszins op 't verkeerde been gezet worden. Hoe het ook zij, vast staat wel dat het merendeel van de leerlingen zich veiliger voelt bij een additieve aanpak van dit soort problemen. En dat eenvoudig omdat ze nooit geleerd hebben om procentuele kortings- en toeslagopgaven multiplicatief te beschouwen, dus "plus 18 procent" als een factor 1,18 en "min 5 procent" als een factor 0,95.

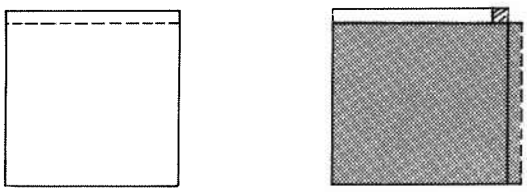
Eerste toevoeging

De vraag is nu op welke wijze en in welk leerjaar dergelijke rente-groei-opgaven het best gesteld kunnen worden. Welnu, zoals bekend, vormt samengestelde

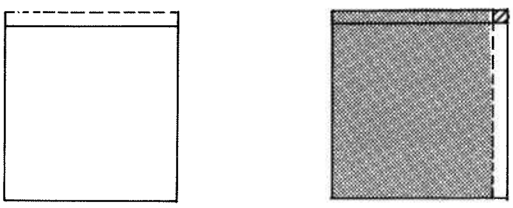
interest al sinds lang geen verplichte leerstof meer voor het basisonderwijs. En ook in het voortgezet onderwijs wordt er, behoudens bij een bepaalde pakketkeuze, geen systematische aandacht aan besteed. Toch zou het naar onze mening aanbeveling verdienen het bestaande leerplan in dit opzicht te herzien, en samengestelde interest met soortgelijke onderwerpen over exponentiële groei wel nadrukkelijk in het wiskunde onderwijs van het voortgezet onderwijs te plaatsen – temeer daar de kinderen over zakrekenmachientjes beschikken.
Als geschikt instap-probleem zou de b.t.w.-opgave kunnen dienen of bijvoorbeeld de volgende variant:

De prijzen van winkelier Albert in stad A. waren vóór 1 januari precies even hoog als die van winkelier Simon in stad S.
Op 1 januari verhoogt Albert z'n prijzen met 5%, terwijl Simon ze dan juist met 5% verlaagt.
Per 1 februari gebeurt vervolgens het omgekeerde: Albert verlaagt zijn dan gangbare prijzen met 5% en Simon verhoogt ze met 5%.
De vraag is wie er na 1 februari het goedkoopst is. Of zijn de prijzen van Albert en Simon dan weer even hoog?
Zijn (bepaalde) prijzen na 1 februari per saldo gestegen, gelijk gebleven of gedaald, vergeleken met de periode vóór 1 januari? Bepaal bij verandering hoeveel het is en licht het antwoord toe.

Zoals we zojuist gezien hebben bij de HEWET-opgave, zal dit proberen *inductief* en *additief* opgelost worden: er wordt één voorbeeld genomen (als representant van alle prijzen, meestal is dit *f* 100,–), dan wordt er gerekend, opgeteld, afgetrokken en gegeneraliseerd.
In de nabespreking kunnen de volgende plaatjes gebruikt worden:



−5% en daarna +5%



+5% en daarna −5%

Daaruit wordt duidelijk dat er een "hoekje" van 5 bij 5 uit het vierkant van 100 bij 100 genomen is, dus een vermindering van 25 op 10000 is opgetreden, ofwel van 0,25%.
Belangrijker is echter het schokeffect dat optreedt als getoond wordt hoe via een multiplicatieve aanpak bewezen kan worden dat de uitkomsten gelijk moeten zijn: $p \times 1{,}05 \times 0{,}95 = p \times 0{,}95 \times 1{,}05$.

Als eerste vervolg hierop kunnen toepassingen over geld, bevolkingsgroei e.d. gebruikt worden welke men onder meer in de pakketten "Exponenten en Logaritmen" en "Groei" kan aantreffen.
Er is echter ook nog een tweede vervolg.

Tweede toevoeging

Naast en in samenhang met dergelijke samengestelde groei-opgaven zou ook de belangrijke *vuistregel voor verdubbeling* een plaats in het onderwijs dienen te krijgen, te weten die van $\frac{70}{p}$ waarbij p het gedurige groeipercentage is (p kleiner dan 10%).
"BOVO-kinderen" zouden die regel eerst zelf met behulp van de rekenmachine kunnen opsporen via de volgende vraagstelling:

Hoe lang duurt het voordat een bedrag verdubbeld is bij een jaarlijkse rente (steeds over 't nieuwe bedrag) van:
1% ...
2% ...
3% ...
4% ...
5% ...
6% ...
7% ...
8% ...
9% ...
10% ...
(11% ...)
(12% ...)
(13% ...)
(14% ...)

Welke regelmaat ontdek je in de eerste tien gevallen?
Nadat de vuistregel ontdekt is kan voor bepaalde groeipercentages naar de tijd voor verviervoudiging, verachtvoudiging e.d. gevraagd worden. Vraagstukken als "na 6 jaar treedt een verdubbeling op bij een bepaald groeipercentage, hoe is de stand van zaken na 3 jaar", waarbij wortels te pas komen brengt ons nog verder in het voortgezette onderwijs.
Dat is ook het geval als we naar 't "bewijs" van de vuistregel $\frac{70}{p}$ vragen.

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^x = 2\ ;\ x \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \ln 2$$

$$x \approx \frac{0{,}70}{\ln(1+\frac{p}{100})}\ ; \quad x \approx \frac{0{,}70}{\frac{p}{100}}\ ; \quad x \approx \frac{70}{p}$$

Maar zoals gezegd kan de verdubbelingsregel met eenvoudige toepassingen, samen met de groeifactor-aanpak wel degelijk veel eerder in het voortgezet onderwijs geplaatst worden.

Toepassingen

- Welke berekenings- en redeneerfouten staan er in het volgende fragment van "De prijs van ons aardgas" (Vrij Nederland, 12 febr. 1983).
- Hoe komt men tot een daling van 35% sinds 1980?

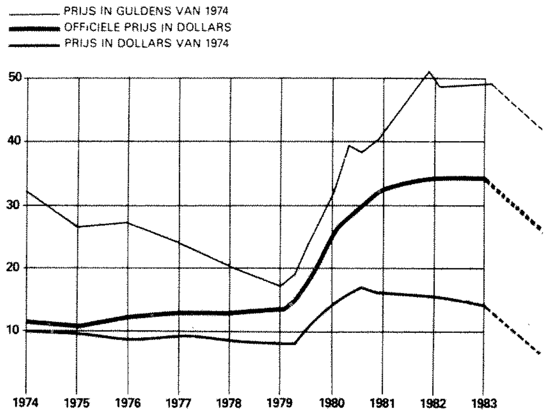
(1) Gezien de ervaringen met deze versie is deze opgave in de huidige versie vervangen.

Vrijwel elk kwartaal worden, nu al tien jaar lang, legioenen dagbladlezers opgeschrikt door steeds stijgende olieprijzen: januari 1974 11,65 dollar per vat, januari 1979 13,34 dollar per vat, juli 1979 achttien dollar, november 1979 vierentwintig dollar, april 1980 achtentwintig dollar, augustus 1980 dertig dollar, november 1981 vierendertig dollar per vat.
Een stijging van tweehonderd procent in tien jaar tijd! De, wat genoemd wordt, tweede oliecrisis brak uit na de opstand en machtswisseling in Iran – waar het ene terreurbewind vervangen werd door het andere – en aan de vooravond van de oorlog die Irak begon tegen het wankele Iran. De wereldolieproduktie kelderde plotseling met zes procent. De prijs van olie steeg – tot ergernis van Saoedi-Arabië, Koeweit en de Verenigde Arabische Emiraten die bevreesd waren voor nieuwe stagnatie van de wereldeconomie en hun westerse beleggingen bedreigd zagen; bovendien moesten zij de oorlogsinspanningen van Irak financieren met leningen die eind 1982 waren opgelopen tot zo'n vijfentwintig miljard dollar.
Is het juist dat de olieprijzen in tien jaar tijd met tweehonderd procent zijn gestegen?
Ja – als je naar de dollar kijkt.
Maar hoe groot is de werkelijke prijsstijging als je de inflatie van de laatste tien jaar in de beschouwing betrekt? En wat is de prijsstijging als je ook nog rekening houdt met de wisselende koers van de dollar?
Het antwoord op die vragen geeft een totaal ander beeld van de werkelijkheid dan het populaire beeld.
Gecorrigeerd voor inflatie maakte de olieprijs een veel geleidelijker ontwikkeling door. Van het voorlopig hoogtepunt in januari 1974 (11,65 dollar) bereikte de olieprijs in augustus 1980 een nieuw hoogtepunt: dertig dollar per vat. Zo stond het in de kranten. Maar dat blijkt, gecorrigeerd voor inflatie, niet meer te zijn dan 16,92 dollar per vat.
Een stijging, in zes jaar tijd, van vijfenveertig procent. Sindsdien blijkt de olieprijs in feite niet meer te stijgen, maar te dalen, want de vierendertig dollar van 1981 blijkt een – voor inflatie gecorrigeerde – waarde te vertegenwoordigen van 14,30 dollar. Een daling van bijna zestien procent.
Bovendien betaalt Nederland niet de officiële richtprijs van vierendertig dollar voor alle geïmporteerde olie, maar gemiddeld zo'n eenendertig dollar. En dat levert sinds augustus 1980 een daling op van vijfendertig procent (tot 11,04 dollar).
Conclusie: *de olieprijzen zijn sinds 1974 niet met tweehonderd procent gestegen, maar met vijf procent gedááld – als de geldontwaarding wordt verrekend.*
Als bovendien rekening wordt gehouden met de wisselende koers van de dollar ontstaat weer een iets ander beeld. Dan blijkt een vat ruwe olie in januari 1974 *f* 31,92 te kosten. Nu, volgens de Opec-richtprijs van vierendertig dollar, kost een vat *f* 48,73, maar bij de gemiddeld betaalde prijs van eenendertig dollar kost een vat ruwe olie in feite *f* 44,43 (gecorrigeerd voor inflatie én dollarkoers).
Conclusie: *de prijs van olie is sinds 1974 gestegen met tweehonderd procent, maar gecorrigeerd voor inflatie dáálde de olieprijs (gerekend in dollars) met vijf procent. En na verwerking van de wisselkoers van de dollar blijkt de olieprijs in guldens nu negenendertig procent hoger uit te vallen dan in 1973.*

Dat laatste percentage geeft de ware olieprijsstijging voor Nederland weer. Het ligt ver onder de algemeen veronderstelde prijsstijging.

De olieprijs, de inflatie en de dollar koers

De dollarprijs van een vat Arabian Light, de prijs in dollars van 1974 (gecorrigeerd voor inflatie) en de prijs in guldens van 1974.



De olieprijs *in dollars* is na de eerste oliecrisis van 1973 weinig gestegen – tenminste, wanneer we de dollar corrigeren voor inflatie. In nominale dollars ging de prijs van een vat standaard-olie (159 liter Arabian Light) omhoog van $11,65 per 1 januari 1974 naar $34,– per 1 november 1981. Gecorrigeerd voor de Amerikaanse inflatie steeg de prijs reëel tot $16,93 per 1 augustus 1980, om daarna weer te dalen tot $14,30 per 1 januari 1983. (Let op: in deze grafiek verlagen we de prijzen na 1974 met het inflatiepercentage van de jaren erna; in de grafieken "De ware olieprijzen" en "De ware benzineprijzen" drukten we de prijzen van vroeger uit in guldens van nu).
In deze grafiek brengen we ook de prijs *in guldens* in beeld, gecorrigeerd voor de Nederlandse inflatie. We zien dat de prijs in guldens sterker omhoogging dan de prijs in dollars. Dit komt door de waarde van de dollar, die tussen 1 juli 1979 en nu omhoogging van *f* 1,95 naar *f* 2,62 (plus 34 procent).
Uiterst rechts brengen we de feitelijke gemiddelde prijs in beeld van een vat olie. Dan blijkt dat de olie tegenwoordig zelfs iets goedkoper is dan negen jaar geleden, althans in dollars; vanwege de geringere geldontwaarding (in de VS was de inflatie groter dan in Nederland) en de stijgende dollarkoers ging de prijs in guldens omgerekend wél omhoog (van *f* 31,92 per vat in 1974 naar ongeveer *f* 40,– nu).

De grafiek is gebaseerd op een opgave van Shell Nederland BV, januari 1983, van de dollarprijs, de voor inflatie gecorrigeerde dollarprijs, de nominale guldensprijs tegen wisselkoers en de guldensprijs gecorrigeerd voor inflatie. (Shell maakte gebruik van Oeso- en CBS-gegevens en van de passagekoers).
Uiterst rechts, waar de recente ontwikkeling wordt weergegeven, is niet de *officiële* Opec-prijs in beeld gebracht, maar de *werkelijke* olieprijs die de oliemaatschappijen naar schatting op dit moment gemiddeld moeten betalen aan de olieproducenten. Die laatste gegevens zijn niet afkomstig van Shell.