Zekerheid in wiskunde?

S.L. Kemme
RU Groningen

Samenvatting

In de vorige Nieuwe Wiskrant introduceerde Bram Lagerwerf drie niveaus van zekerheid bij wiskunde. Dat was een reactie op een artikel over "je zeker voelen" bij wiskunde van Rijkje Dekker (mei '83).
Lagerwerf onderscheidt drie niveaus van zekerheid: het vanzelfsprekendheidsniveau, het tussenniveau en het bewijsniveau.
Dit artikel illustreert aan de hand van een denkbeeldige dialoog dat er géén zekerheid in wiskunde is en dat die er ook nooit geweest is.

Summary

This article is a reaction on three articles about confidence and certainty. In our issue of december 1983 Lagerwerf introduced and discussed three different levels of certainty: the self-evident level, the in-between level and the level of proof.
The present author disagrees completely with Lagerwerf. He states that there is no certainty at all in mathematics, and that there never has been any certainty. Mathematics is just like life: one moment you feel confident and certain, the next moment everything seems different.

Rijkje Dekker is er over begonnen in de Wiskrant van mei 1983, Bram Lagerwerf ging er in de laatste Wiskrant mee door. Onafhankelijk daarvan deed Van Dalen in Euclides een aantal opvallende uitspraken over zekerheid in de wiskunde naar aanleiding van het boek Morris Kline: "The loss of Certainty." Ook ik kan er niet van afblijven, maar dan in het negatieve: er is geen zekerheid in de wiskunde en die is er ook nooit geweest. Wiskunde is als het leven zelf: je denkt dat je het weet en het volgende ogenblik is alles weer anders. Daarover gaat dit verhaal.

De som van de hoeken in een driehoek

Laat ik beginnen met een eigenschap waarover we het allemaal eens zijn: in een driehoek is de som van de hoeken 180°. In een denkbeeldige dialoog tussen twee personen A en B zal ik proberen aan te geven welke zekerheid een dergelijke uitspraak kan hebben.

A: Je vroeg me om een voorbeeld te geven van een bewering waar ik absoluut zeker van ben. De eigenschap dat de som van de hoeken in een driehoek 180° is vind ik wel één van de mooiste.

B: Oh ja?

A: Ja, meet maar na. Ik heb dat voor een aantal gedaan, er komt iedere keer ongeveer 180° uit.

B: Komt er precies 180° uit?

A: Nee, natuurlijk niet, maar dat ligt aan de onnauwkeurigheid van de meting.

B: Je wilt erg graag dat er 180° uitkomt, daarom ben je al gelukkig als je 179 of 181 hebt gevonden en vat je dat op als een bevestiging van je bewering. Je interpreteert deze getallen als een afwijking van 180°, maar waarom de ene niet als een afwijking van 178.5 en de andere als een afwijking van 181.3. Waarom zou in de ene driehoek die som niet gewoon 178.5 kunnen zijn en in de andere 181.3?

A: Hm, je hebt eigenlijk wel gelijk. Ik moet een redenering zien te geven die voor iedere driehoek van toepassing is, waarbij de vorm van een driehoek geen rol speelt. Wat vind je van de volgende redenering?

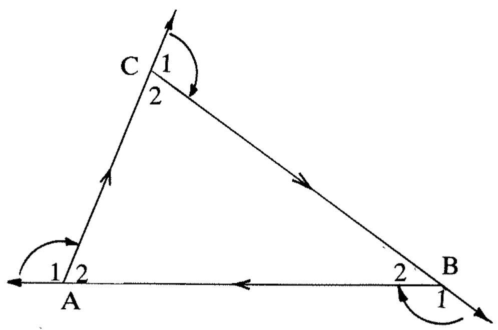

fig. 1

Stel je loopt rond in driehoek ABC. Eerst sta je in A met je rug naar B, je draait je om zodat je naar C kijkt, je loopt naar C, je draait je om naar B, enz. Als je weer in A bent aangekomen, ben je totaal 360° gedraaid.

Uit het volgende sommetje blijkt dan dat de som van de hoeken 180° moet zijn:

$$\begin{array}{llll} A_{12} + C_{12} + B_{12} & = 3\times 180^\circ & = 540^\circ & \\ A_1 + C_1 + B_1 & = & 360^\circ & \text{(de totale draai)} \\ \hline A_2 + C_2 + B_2 & = & 180^\circ & \end{array}$$

Ik heb een symbolische notatie gebruikt, waarbij ik het symbool voor hoek gewoon heb weggelaten en waarbij je 12 moet lezen als 1,2. Samen met de tekening zal dit je wel duidelijk zijn. Ik vind dit een fraaie "gezond verstand" redenering, waarbij je niet veel voorkennis hoeft te hebben. In de redenering speelt de vorm van de driehoek geen enkele rol, ze is dus van toepassing op elke driehoek.

B: Wat is dat nou voor flutbewijs? Hoe kun je nou precies langs de zijden van een driehoek lopen? Dat soort driehoeken, waar je precies langs kunt lopen, bestaat helemaal niet. Zoveel gezond verstand denk ik nog wel te hebben dat ik denk te kunnen inzien dat zoiets onmogelijk is. Je redenering doet een beroep op de fysische werkelijkheid (het lopen langs een lijn) en tegelijkertijd wil je dat iets heel precies gedaan wordt: precies (zonder afwijking) langs een rechte lijn lopen, precies een draai maken van AC naar CB. Het lijkt me hinken op twee gedachten.

A: Je hebt het bewijs niet goed begrepen. Het is een gedachten-experiment. Het toont niets aan over bestaande, getekende driehoeken, maar alleen voor zuivere driehoeken die alleen maar een bestaan in ons denken hebben.

B: Dan vind ik dat je dat wandel-argument uit de redenering moet verwijderen.

A: Daar zit wat in. In je gedachten maak je natuurlijk de mooiste wandelingen. Ik ben bang dat je een fundamentele zwakte in het bewijs hebt aangegeven. Ik zal daarom maar een ander bewijs geven waarbij die waarneming geen enkele rol mag spelen. Tegelijkertijd zal ik mijn bewering wat aanscherpen: alleen voor ideale, zuivere driehoeken, geldt dat de som van de hoeken 180° is. Voor de praktijk betekent dat, dat we afwijkingen van 180° mogen interpreteren als onvolkomenheden van de fysische situatie. Bij steeds nauwkeuriger meten en tekenen zal het resultaat steeds dichter bij 180° komen. Nu het bewijs. Het bestaat uit twee stappen. Allereerst bewijs ik de bewering voor rechthoekige driehoeken, daarna zal ik dat toepassen op de algemene situatie.
Teken een rechthoek ABCD:

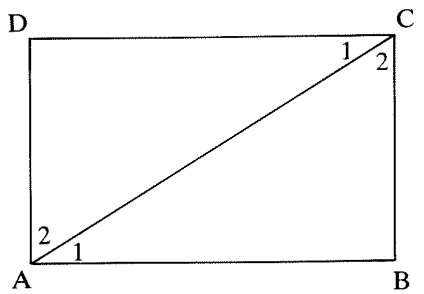

fig. 2

Trek daarin de diagonaal AC. Dan gaat door roteren om het midden van AC driehoek ADC over in driehoek ABC, dus $A_2=C_2$ en $A_1=C_1$ (ik heb de symbolen voor hoek maar weer weggelaten). Omdat $A_{12}=90°$, is $B+A_1+C_2=180°$. Dat is het bewijs voor rechthoekige driehoeken.
Teken nu een willekeurige driehoek ABC en teken daarin de hoogtelijn CD vanuit C. $D_1=D_2=90°$.

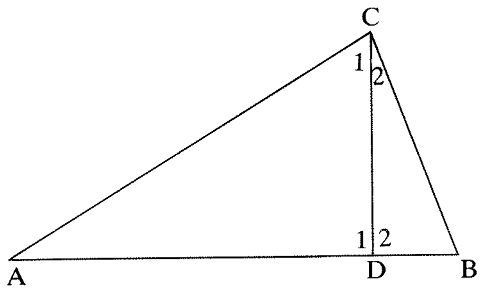

fig. 3

Dan kun je weer met hoeken gaan rekenen:

$$\begin{array}{l} A + D_1 + C_1 = \quad 180° \\ \underline{B + D_2 + C_2 = \quad 180°} \quad + \\ A + B + C + D_{12} = 360°. \end{array}$$

Omdat $D_{12}=180°$ geldt nu: $A+B+C=180°$.
Ik zie je al sputteren. Roteren is geen fysieke handeling maar een afbeelding van R^2 naar R^2 en voor stomphoekige driehoeken gaat het bewijs ook goed, maar dat puzzel je zelf maar uit.

B: Dat is mijn bezwaar helemaal niet. Je bewijs is gewoon fout. Het eerste bewijs voor rechthoekige driehoeken deugt niet. Je wilt voor willekeurige rechthoekige driehoeken laten zien dat de som van de hoeken 180° is. Je laat dat alleen maar zien voor rechthoekige driehoeken die je van te voren al in een rechthoek hebt getekend.
Met andere woorden: je hebt de eigenschap alleen nog maar bewezen voor rechthoekige driehoeken in een rechthoek. Je zult eerst een rechthoekige driehoek moeten tekenen.

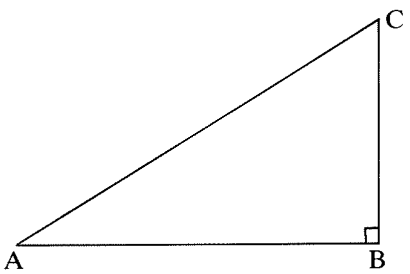

fig. 4

Vervolgens probeer je daar een rechthoek van te maken, als je tenminste je bewijs wilt repareren. Je zou bijvoorbeeld de driehoek kunnen roteren om het midden van AC over een hoek van 180°.

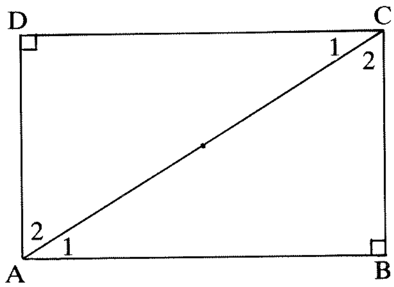

fig. 5

Je weet dan dat $A_1=C_1$ en dat $A_2=C_2$, maar niet dat $A_{12}=90°$.
Probeer dat maar eens te bewijzen!

A: Nu zit ik echt in de nesten, dat bewijs kan ik niet leveren. Ik zou op een andere manier kunnen proberen om een rechthoek bij ABC te maken. Bijvoorbeeld door bij A een lijn AD loodrecht op AB te tekenen, met dezelfde lengte als BC.

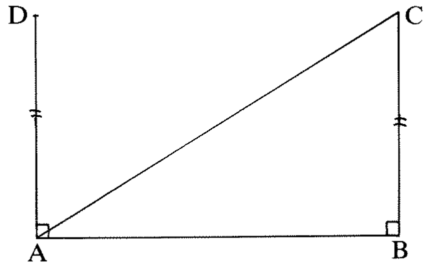

fig. 6

Ik weet nu zeker dat de hoek bij A recht is en hoef alleen nog maar te laten zien dat DC dezelfde lengte heeft als AB.

B: Dat zal je niet lukken. Probeer je constructie maar eens uit op een aardoppervlak. Kies je voor AB de halve evenaar, voor BC de kwart nulmeridiaan met C op de Noordpool, dan zie je dat D=C.

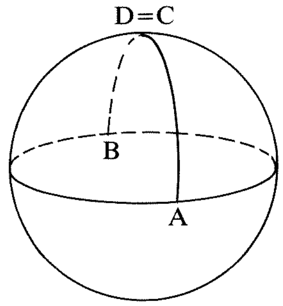

fig. 7

Je hele verhaal berust op de aanname dat je op het platte vlak werkt.

A: Ja, je hebt gelijk. Nu zie ik ook dat er een andere fout in mijn wandel-bewijs zit. Als je op een gekromd oppervlak rondloopt, hoef je helemaal niet over 360° te draaien. Doordat je in drie dimensies beweegt, maak je veel meer draaiingen, of minder. Mijn beweringen en bewijzen gelden dus heel nadrukkelijk alleen voor het Euclidische platte vlak.

B: Dat is nou juist precies zo gedefinieerd dat constructies van de vorm:

fig. 8

rechthoeken opleveren.

Met deze denkbeeldige dialoog wil ik duidelijk proberen te maken dat het door Lagerwerf gesuggereerde hogere niveau van zekerheid, verworven door een meer formeel bewijs, in feite geen enkele extra zekerheid oplevert over de waarheid van de oorspronkelijke bewering. Integendeel: het gevoel van zekerheid verdwijnt volledig en maakt plaats voor twijfel. De hele bewering komt op losse schroeven. A wordt voortdurend gedwongen, door meer formele bewijstechnieken, zijn oorspronkelijke bewering en de aard van de objecten in die bewering aan te passen. Hij begon met een algemene bewering over driehoeken. Die werd al snel ingeperkt tot een bewering over zuivere, denkbeeldige driehoeken en tenslotte werden extra voorwaarden aangegeven waaronder de bewering waar zal zijn.

Het gesprek heeft echter een schat aan nieuwe informatie opgeleverd. Ze weten nu veel meer over driehoeken. In die zin is er meer zekerheid, zoals dat door van Dalen is aangegeven. Het gesprek hoeft nog niet afgelopen te zijn. Uiteindelijk zul je bij de methoden van de logica uitkomen. Dan wordt de warboel met betrekking tot de waarheids-zekerheid helemaal compleet. Iedere nieuwe stap zal echter meer informatie opleveren en zal nieuwe mogelijkheden openen.

Het verschil tussen aanschouwelijke en formele bewijstechnieken zit dan ook niet in het meer of minder verschaffen van zekerheid over de waarheid van de bewering. Het verschil zit vooral in de geldigheid van de bewering. Nameten van een driehoek geeft informatie over *deze* driehoek en zegt niets over andere driehoeken. Het is een verificatie met een zwakke geldigheid. Een redenering opzetten waarbij de specifieke vorm van de driehoek waaraan geredeneerd wordt, geen rol speelt, is veel sterker omdat het geldigheids-gebied wordt vergroot: het zegt iets over alle driehoeken. Het kan echter ook betekenen dat de aard van de objecten waarover de bewering gaat, wordt gewijzigd: het zegt iets over ideale driehoeken.

De manier van bewijzen heeft niets met je gevoel van zekerheid te maken. Of je het in de krant hebt gelezen of het formeel hebt bewezen, later is toch alles net weer een tikje anders. Lees de geschiedenis van de wiskunde er maar op na. Dat is één grote demonstratie van de situatie waarin alles voortdurend ter discussie staat en wordt bijgeschaafd.

Intellectuele zekerheid

Wiskunde is een vak dat met "het weten" te maken heeft. En dan geen weten dat gebaseerd is op fysieke ervaring, maar een verstandelijk weten. Wiskundig denken is per definitie een vorm van theoretisch denken en het bedrijven van wiskunde is een intellectuele bezigheid. Daarmee bedoel ik: wiskunde is een denk-vak, een vak van pen en papier. Het wiskundige weten verwerf je door te denken, lezen, schrijven en praten. Er bestaan ook andere niet-intellectuele vormen van kennis-verwerving. Door op de klok te kijken weet je hoe laat het is. Door mijn hand te branden weet ik dat de kachel heet is. Dit is een vorm van weten dat gebaseerd is op directe fysieke ervaringen. Het is empirisch weten. Het is gekoppeld met fysieke handelingen. Door iets te doen (op de klok kijken, je hand tegen de kachel houden) kom je iets te weten.

Het zal van geval tot geval verschillen met welke vorm van weten je bezig bent. Soms kom je iets aan de weet door te proberen, een andere keer door te redeneren. Maar het hangt ook van je instelling af. De één is

sterker geneigd iets door te proberen aan de weet te komen, een ander beredeneert het liever. We kennen allemaal de gigantische verschillen die er op dit punt tussen leerlingen kunnen bestaan.
Er is geen absoluut onderscheid tussen beide soorten kennis. Ook niet binnen de wiskunde. Het is bekend dat materiaalgebruik een belangrijke rol speelt bij de verwerving van ruimtelijk inzicht. Het werken met een echte kubus is een onmisbare aanleiding voor het wiskundig denken over de kubus. De empirische ervaring is hierbij een middel om een proces op gang te brengen tot meer algemene theoretische uitspraken over kubussen. In dat proces gaan we anders redeneren, gebruiken we andere argumentatie-technieken omdat we ons met andere objecten bezighouden. Daarmee is het aanschouwelijke redeneren en de daarmee verworven zekerheden niet van een lagere orde zoals wordt gesuggereerd door de niveau-indeling van Lagerwerf. In ons dagelijks leven zijn we voortdurend bezig zekerheden te verwerven door middel van onze directe waarneming. We doen dat met behulp van een heel geraffineerd systeem van waarnemen, interpreteren, beslissen en handelen. De zekerheid die dat oplevert is zeker niet van een lager allooi dan de intellectuele wiskundige zekerheid. Heel eenvoudig gezegd: een automonteur zal zich bij zijn beroepsuitoefening met andere dingen bezighouden dan een wiskundige. Maar de zekerheid die de monteur heeft dat de motor goed werkt, is niet van een lagere orde dan de zekerheid waarmee de wiskundige weet of een stelling waar is. Het gaat in beide gevallen om de zorgvuldigheid waarmee de boel is geverifieerd. En dat heeft niets te maken met de niveaus van argumentatie van Van Hiele, maar alleen met de manier van werken. Waarmee ik wil zeggen dat het om een andere reden (dan in de vorige paragraaf) onzin is over niveaus van zekerheid te praten op grond van de meer of minder formele manier van verificatie.

Onzekerheid in wiskunde

Teveel nadruk op intellectuele zekerheid in de klas, kan ons al gauw doen vergeten dat het werkterrein (denkobjecten, theoretische wetmatigheden) een heel eigen karakter heeft. Alleen dàt feit al kan leerlingen onzeker maken. Een automonteur zal bloednerveus worden als hij ineens een dieselmotor moet repareren, terwijl hij is opgeleid tot benzinemotor-monteur. Het maakt hem onzeker. De onzekerheid zal zijn handelen blokkeren.
Over deze vorm van onzekerheid wordt in de drie artikelen niet gerept. Lagerwerf probeert, bij wijze van voorbeeld, duidelijk te maken hoe je de regel van de commutativiteit van natuurlijke getallen op een vanzelfsprekendheidsniveau kunt hanteren. Hij vraagt zich daarbij niet af of het feit alleen dàt leerlingen zich met deze regel moeten bezighouden niet een allesoverheersende factor van onzekerheid kan zijn.
Commutativiteit is een meta-theoretisch begrip dat informatie geeft over eigenschappen van algebraïsche structuren. Wat daarvan in de schoolboekjes is terechtgekomen is niet meer dan op een onnodig moeilijke manier zeggen wat alle leerlingen allang weten: bij optellen en vermenigvuldigen van getallen doet de volgorde er niet toe, bij aftrekken en delen wel.
De commutatieve regel hoort daarom niet in het leerprogramma. Alleen al door zó moeilijk te praten over zoiets gemakkelijks kun je een leerling zo onzeker maken dat verdere studie over zekerheidsniveaus me in dit verband volstrekt overbodig lijkt.
Laten we ons in plaats daarvan bezighouden met het zoeken en ontwikkelen van materiaal waarmee de leerlingen op een betekenisvolle manier vertrouwd worden met de methoden van de wiskunde, zodat ze daarbij de beschikking krijgen over een groter arsenaal van mogelijkheden in hun dagelijkse bestaan.

Literatuur

Dalen, D. van, *De Wiskunde, eens Pelgrims Reize naar Waarheid?* Euclides 59 nr. 3, nov. 1983.
Dekker, R., *Zeker in wis-kunde*, De Nieuwe Wiskrant 2 nr. 4, mei 1983.
Lagerwerf, B., *Niveaus van zekerheid*, De Nieuwe Wiskrant 3, nr. 2, dec. 1983.