Modelbanen en hun wiskunde

P.W.H. Lemmens

Mathematisch Instituut, R.U. Utrecht

Samenvatting

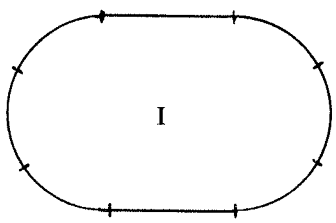
Modelbanen vormen een populaire hobby voor veel kinderen. En voor hun vaders, zoals uit dit artikel blijkt. Als die vader dan ook nog wiskundige is, kan aan het licht komen dat er nog heel wat nagedacht is bij het ontwerpen van modelbanen. Wat voor lengte en straal geef je bijvoorbeeld de bochten? In welke baan kun je ongestraft nog rechte stukken invoeren? Er blijkt flink wat – hogere – wiskunde achter te zitten. Slechts een kleine tip van de sluier wordt hier opgelicht.

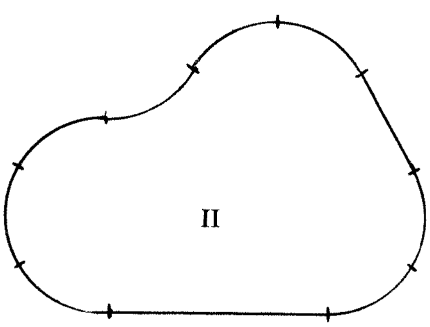
Summary

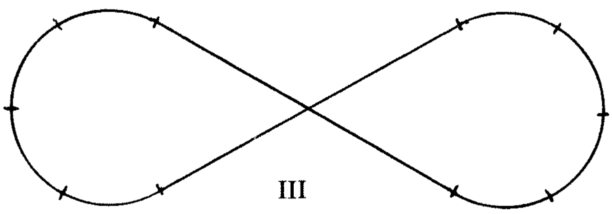
When a father starts playing with his sons railway model train he will soon find out that the number of tracks you can form is limited by the shape of the curves: the length and radius play a vital role in the design of a track. Actually rather high level mathematics is involved. Some elementary results are discussed in this article.

De meeste modelbanen, zowel voor auto als trein, hebben rechte en gekromde baanstukken. De gekromde stukken, die we kortweg bochten zullen noemen, vormen met zijn zessen (soms met acht of twaalf) een gesloten cirkel. We zullen hier het geval behandelen dat zes bochten een rondje vormen, de lezer kan dan de andere gevallen zelf onderzoeken!

Een voor de hand liggende vraag is een gesloten baan te maken. We houden ons niet bezig met wissels, kruispunten mogen best voorkomen. Om de gedachte te bepalen geven we enkele voorbeelden van zulke gesloten banen.

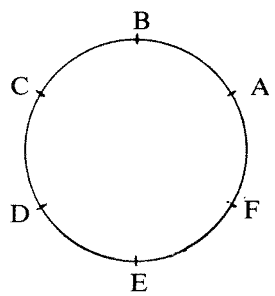




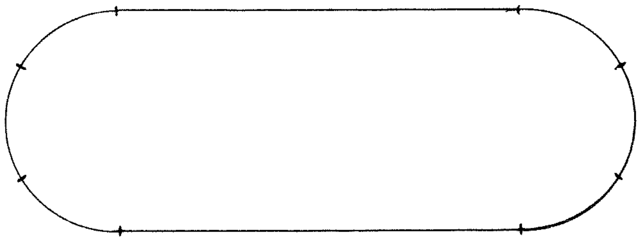


We veronderstellen dat alle rechten even lang zijn en evenzo dat alle bochten even groot zijn. Laat de lengte van de rechten a en de straal van de cirkels die zes bochten vormen b zijn. Is er aanleiding om a en b in een bepaalde verhouding te kiezen?

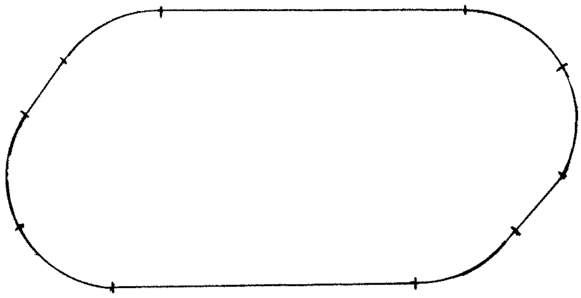
We beginnen met de eenvoudigste gesloten baan, een rondje van zes bochten:



We kunnen het rondje bij twee diametraal gelegen punten, b.v. B en E, losmaken en bij deze twee punten twee rechten van willekeurige lengte inzetten:



We kunnen dit zowel bij B en E en tegelijkertijd ook met andere lengte bij C en F doen:

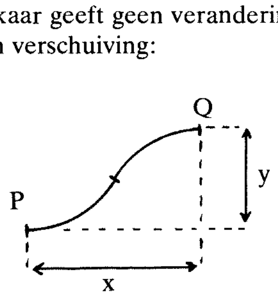


Een andere mogelijkheid is het rondje openbreken bij drie in een gelijkzijdige driehoek gelegen punten (b.v. A, C en E) en in die drie openingen onderling gelijke rechte stukken inzetten. Ook dit kan tegelijk bij A, C, E en bij B, D, F met verschillende lengten van de rechte stukken. Vervolgens kan men de bovenstaande manieren nog combineren.

Zijn er nog andere mogelijkheden om gesloten banen met zes bochten en een aantal rechten te vormen? We laten de vraag voorlopig maar open!

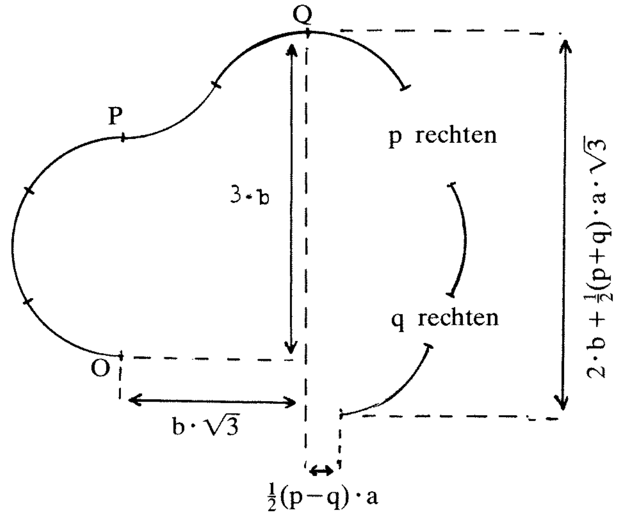
Omdat bij iedere bocht de rijrichting 60° in positieve of in negatieve hoekzin verandert, zal bij een gesloten circuit het aantal bochten altijd even moeten zijn. Zelfs zal het verschil van het aantal bochten naar rechts en het aantal bochten naar links een zesvoud moeten zijn. Een rondje heeft zes bochten naar rechts (of naar links, als je in de andere richting rijdt). Met één bocht naar rechts en één bocht naar links is het verschil wel nul, maar niemand kan er een gesloten baan mee maken! Zes bochten is wel minimaal nodig. Hoe gaat het met acht bochten? Zowel baan II als baan III uit de eerste voorbeelden hebben acht bochten. Hoe zitten ze in elkaar?

We beginnen met baan II. Een rechter en een linker bocht aan elkaar geeft geen verandering van richting, maar wel een verschuiving:



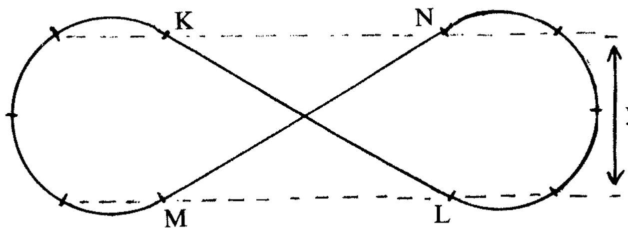
Een beetje meetkunde leert: $y = b$, $x = b \cdot \sqrt{3}$

Zetten we bij P drie bochten aan om een half rondje (qua richting) te maken, dan moet er bij O een aantal rechten komen en de zaak wordt sluitend gemaakt met drie bochten en enkele rechten er tussen:



Wil het allemaal passen, dan moet $z = b \cdot \sqrt{3} + \cdot \frac{1}{2}(p-q) \cdot a$ een geheel aantal rechten, dus een geheel aantal keren a zijn en evenzo moet $3 \cdot b = 2 \cdot b + \frac{1}{2}(p+q) \cdot a \cdot \sqrt{3}$ gelden. Een mooie oplossing hiervan geeft $p = q = 1$ met als gevolg $b = a \cdot \sqrt{3}$, dus $a = \frac{1}{3} b \cdot \sqrt{3}$. Gelukkig is dan $z = 3 \cdot a$ zodat inderdaad alles klopt. Het kan ook met $p = 1$, $q = 0$; dan volgt $b = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{3}$, en omdat nu $z = 2 \cdot a$ klopt het circuit weer! De keuze $a = \frac{2}{3} b \cdot \sqrt{3}$ heeft het voordeel dat de rechten en de bochten ongeveer even groot zijn, prettig voor de verpakking! Maar een wat verfijnd merk zal al snel ook halve rechten gaan aanbieden.

Hoe gaat het nu met circuit III?



Het stuk KL moet zo gekozen worden dat $y = b \cdot \sqrt{3}$. Maar aan de andere kant weten we dat $y = \frac{1}{2}$ KL. Dus moet $KL = 2 \cdot b \cdot \sqrt{3}$. Bij de keuze $a = \frac{2}{3} b \cdot \sqrt{3}$ passen er dus precies drie rechte stukken op KL, en natuurlijk op grond van symmetrie ook drie op MN.

Even een zijspoortje: Zouden we circuit III zo kunnen variëren dat links en rechts vijf bochten liggen? We vinden in die situatie $y = b$ en $y = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot \sqrt{3}$, dus $KL = \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{3}$. Het lukt nu dus met precies één recht stuk!

We keren terug naar de vraag welke gesloten circuits we kunnen maken met zes, respectievelijk acht dezelfde bochtstukken van 60° en een willekeurig aantal dezelfde rechte stukken.

We denken ons een dergelijk circuit gelegd, en gaan dat eens volgen zoals een auto of trein de baan eenmaal rondloopt. Daarbij negeren we de rechte stukken even en kijken alleen naar de bochtstukken die we bij het passeren zullen noteren met r of l, al naargelang het een rechter of linker bocht betreft. Een rondrit wordt dan aangegeven met zes of acht letters r en/of l in een bepaalde volgorde. Eigenlijk gaat het ons alleen om het *kringetje* van de letters. Immers het rijtje rlllrr verandert door een ander beginpunt te kiezen in llrrrl. Ook zullen we het *gespiegelde* circuit niet als wezenlijk verschillend beschouwen. Dit komt erop neer dat we

alle letters r door l en l door r vervangen. Bovendien kan het circuit nog in *omgekeerde richting* doorlopen worden! Bij een en dezelfde baan, bijvoorbeeld baan II, horen dus onder andere de rijtjes rrrlrrrr en llllrlll.
De combinatoriek is de tak van de wiskunde waarin de vraag thuishoort naar algemene stellingen over het aantal (echt verschillende) manieren waarop een aantal letters r en l gerangschikt kan worden. In ons geval kunnen we alles wel aan door proberen en door het gebruiken van gezond verstand.
Dit spelletje van het opschrijven van een rij letters r en l heeft een belangrijke consequentie. Als we namelijk in werkelijkheid de rechte stukken weglaten en alleen de bochten aan elkaar zetten op de manier die het rijtje aangeeft, dan krijgen we een baan (zullen we hem de bochtenbaan noemen?) die niet noodzakelijk gesloten is, maar waaruit het oorspronkelijke (wel gesloten) circuit ontstaat door tussenvoeging van rechte stukken.
Hoe bruikbaar deze observatie is zien we al direct in het geval van zes bochten. Rekening houdend met de eerdere opmerking dat het verschil tussen het aantal rechter bochten en het aantal linker bochten een 6-voud moet zijn, komen we tot maar vier echt verschillende manieren om van zes letters r en l een rijtje te maken:

i) rrrrrr	iii) rlrrll
ii) rlrlrl	iv) rrrlll

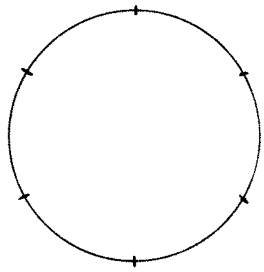
Mogelijkheid i) geeft een rondje, en dit bestudeerden we al. Bij de andere mogelijkheden zien we dat begin- en eindpunt van de bochtenbaan ver uit elkaar liggen en dat ze nooit dichter bij elkaar kunnen komen door tussenvoeging van rechte stukken. Uit ii), iii) en iv) is dus nooit een circuit te maken!
We gaan hierop even wat dieper in. Om door tussenvoegingen van rechte stukken het eindpunt van de bochtenbaan terug te kunnen brengen tot het beginpunt, moet er in het kringetje van letters een stuk zijn waarop het verschil van het aantal letters r en l tenminste 4 bedraagt. Immers, wanneer dit verschil steeds ten hoogste 3is,dan kunnen de rij*richtingen* op verschillende punten van de bochtenbaan nooit meer van elkaar afwijken dan $3 \times 60° = 180°$. We kunnen dan door het beginpunt van de bochtenbaan een lijn trekken zó, dat de gehele baan aan één kant van deze lijn ligt èn we ons bij het rijden slechts evenwijdig aan die lijn of verder van die lijn af bewegen. Omdat we ons na de eerste bocht reeds niet meer op de lijn bevinden, kan dus nooit een gesloten circuit gemaakt worden!
Alvorens nu met acht bochten te beginnen, recapituleren we de voorwaarden die in de loop van het verhaal tot nu toe ontdekt zijn:

VW1: Het verschil tussen het totale aantal letters r en l is een 6-voud.
VW2: In het kringetje van letters is een stuk waarop het verschil tussen het aantal letters r en l tenminste 4 bedraagt.

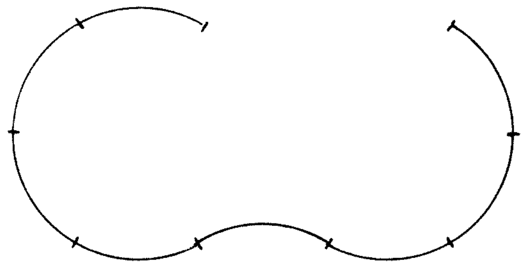
Hiermee rekening houdend blijkt dat er bij acht bochtstukken precies twee echt verschillende mogelijkheden zijn om rijtjes te maken, en wel

i) rrrrrrrl (zeven r en een l)
ii) rrrrllll (vier r en vier l).

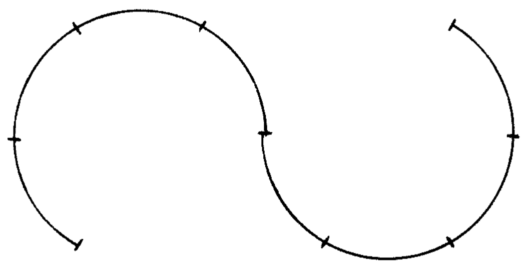
We maken een tekening van de mogelijke bochtenbanen voor zes of acht bochtstukken, waarbij we, om een tekening zonder overlap te krijgen, rrrlrrrr zullen nemen in plaats van rrrrrrrl.



1: rrrrrr

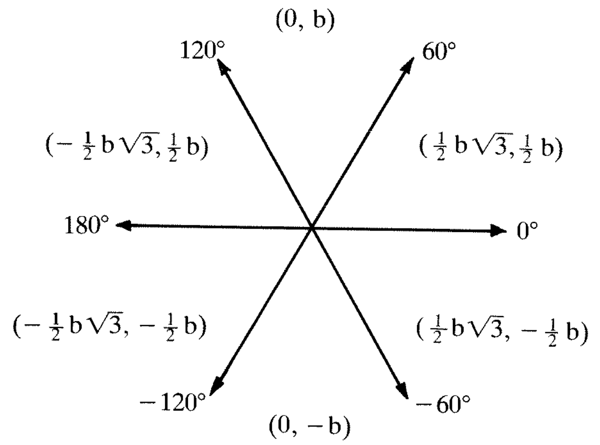


2:rrrlrrrr



3: rrrrllll

Door te vergelijken zien we dat deze bochtenbanen 1, 2, 3 precies de bochtenbanen zijn van respectievelijk de circuits I, II, III waarmee we begonnen zijn. Dat toont aan dat deze bochtenbanen juist de enigen met zes of acht bochten zijn, die door tussenvoegingen van rechte stukken tot een gesloten circuit te maken zijn!
Door proberen kan men nu gaan uitdokteren welke lengte de rechte stukken kunnen hebben en op welke wijze ze tussengevoegd kunnen worden in de bochtenbanen om gesloten circuits te maken. In het volgende stukje zullen we het echter wat systematischer aanpakken.
We gaan uit van een bochtenbaan die aan de voorwaarden VW1 en VW2 voldoet, zonder verdere beperking aan het aantal bochtstukken. Bij het opbouwen van de bochtenbaan door achtereenvolgens toevoegen van een bochtstuk, zal telkens het eindpunt van de baan verplaatst worden. Deze verplaatsing is afhankelijk van de richting die de baan heeft op het aanzetpunt en van de soort bocht die aangezet wordt. We kunnen hiervoor een schema maken, waarbij we aannemen dat de richtingen op de gebruikelijke wijze in het x-y-vlak gekozen zijn:



Dit schema kan als volgt gebruikt worden: Zetten we bijvoorbeeld bij een eindrichting van 120° een linkerbocht aan, dan wordt de nieuwe richting 180° en het eindpunt verplaatst zich over $(-\frac{1}{2}b\sqrt{3}, \frac{1}{2}b)$. Zetten we daarentegen bij 120° een rechterbocht aan, dan wordt de nieuwe richting 60° en de verplaatsing bedraagt (0, b). Afhankelijk van het aanzetten van een rechter- of linkerbocht volgen we het schema met de klok mee of tegen de klok in en lezen af welke verplaatsing het eindpunt ondergaat.

Wordt een rechterbocht gevolgd door een linkerbocht (of andersom), dan verandert bij deze combinatie de richting niet maar er is *wel* een verplaatsing, en wel precies het dubbele van de verplaatsing bij de rechterbocht (of de linkerbocht) alleen. Uit de rij van letters r en l van een bochtenbaan kunnen we bijgevolg herhaaldelijk combinaties rl of lr wegschrappen, mits we rekening houden met de veroorzaakte dubbele verplaatsing. Uiteindelijk houden we dan niets over, òf een rij die slechts bestaat uit letters van één soort (r òf l). Het aantal hiervan is een 6-voud (voorwaarde VW1), en dit levert geen verplaatsing meer op, want bij elke complete rondgang in het schema is de totale verplaatsing (0, 0).

We concluderen dat bij een bochtenbaan alle individuele verplaatsingen een *even* (eventueel nul) aantal keren voorkomen, zodat de totale verplaatsing van het eindpunt een som is van gehele veelvouden van (0, 2b), $(b\sqrt{3}, b)$ en $(b\sqrt{3}, -b)$.

De vraag is nu of deze verplaatsingen ongedaan gemaakt kunnen worden door het tussenvoegen van rechte stukken. Ook het tussenvoegen van een recht stuk ter lengte a doet het eindpunt verplaatsen, afhankelijk van de richting bij het invoegpunt, volgens onderstaande tabel:

invoegpunt	verplaatsing
0°	(a, 0)
60°	$(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\sqrt{3})$
120°	$(-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\sqrt{3})$
180°	(−a, 0)
−120°	$(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}a\sqrt{3})$
−60°	$(\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}a\sqrt{3})$

Hieruit zien we onmiddellijk dat de volgende combinaties geen verplaatsing van het eindpunt opleveren:

0° en 180°, 60 ° en −120°, 120° en −60°,
0° en 120° en −120°, 60° en 180° en −60°,

en dat invoeging van een recht stuk bij een richting hetzelfde effect heeft als invoeging van een recht stuk bij elk van de twee flankerende richtingen; zo heeft de combinatie 60° en −60° hetzelfde effect als 0°, terwijl de combinatie 120° en −120° hetzelfde effect heeft als 180°.

Wanneer we er op uit zijn om een gesloten baan van de bochtenbaan te maken, is het dus voldoende om te kijken of dat mogelijk is door rechte stukken in te voegen bij 60°, 120°, −120°, −60°. Nemen we in deze richtingen voor het aantal rechte stukken respectievelijk p, q, r, s dan verplaatst het eindpunt zich volgens de tabel over:

$$(\tfrac{1}{2}(p-q-r+s)\cdot a, \tfrac{1}{2}(p+q-r-s)\cdot a\cdot\sqrt{3}).$$

Voor het geval dat $a = \frac{2}{3}\cdot b\cdot\sqrt{3}$ etaleren we in onderstaand overzicht de verplaatsing voor een aantal keuzen van de aantallen p, q, r, s:

p	q	r	s	verplaatsing
0	0	1	1	(0, −2b)
1	1	0	0	(0, 2b)
0	1	2	0	$(-b\sqrt{3}, -b)$
2	0	0	1	$(b\sqrt{3}, b)$
0	2	1	0	$(-b\sqrt{3}, b)$
1	0	0	2	$(b\sqrt{3}, -b)$

Blijkens dit overzicht kunnen alle verplaatsingen die mogelijk ontstaan bij de bochtenbaan gecorrigeerd worden door het invoegen van rechte stukken ter lengte $a = \frac{2}{3}\cdot b\cdot\sqrt{3}$. Daarbij hebben we als invoegpunten niet alle richtingen nodig, maar slechts twee aan elkaar tegengestelde paren. Enig overleg leert dat een dergelijke collectie richtingen precies dan aanwezig is als de bochtenbaan voldoet aan de voorwaarde VW2. Er kan hoogstens eèn richting ontbreken in een bochtenbaan die aan VW2 voldoet en we leggen de bochtenbaan dan zó dat die richting bij 0° zou horen.

Met dank aan Prof. F. van der Blij voor zijn uitgebreide commentaar op een eerdere versie.