

# De ene zekerheid is de andere niet

## B. Lagerwerf

SOL, Utrecht

### Samenvatting

*In een eerder artikel beschreef Sieb Kemme zijn onzekerheden omtrent de drie niveaus van zekerheid die Bram Lagerwerf onderscheidde: het vanzelfsprekendheidsniveau, het tussenniveau en het bewijsniveau.*

*Dit artikel, dat gezien moet worden als de afsluiting van de "zekerheidsdiscussie", is de reactie van de auteur op Kemme's kritiek.*

### Aan Sieb Kemme.

*I know that you believe you understand what you think I said, but, I am not sure you realize that what you heard is not what I meant.*

Er is iets aan de hand met de reactie van Sieb Kemme (3) in de Nieuwe Wiskrant van maart '84 op mijn "Niveaus van Zekerheid" in het decembernummer. Het klopt niet. Met het meeste van wat hij schrijft ben ik het volledig eens, maar in de Engelse samenvatting staat dat hij het volledig met mij oneens is.

Ik heb geprobeerd uit te zoeken hoe het zit en dat is gelukt, denk ik. Het is mij niet gelukt een korte reactie te formuleren die duidelijkheid zou kunnen scheppen. Ik zal er wat meer ruimte voor nodig hebben. Eerst wil ik nu zo kort en goed mogelijk op een rijtje zetten waar het mij bij de niveaus van zekerheid om gaat. Daarmee zal dan impliciet een aantal van de gerezen problemen zijn opgelost. Wat daarvan nog overblijft stel ik daarna in deel B expliciet aan de orde.

## A. Nogmaals: Niveaus van Zekerheid

Uitgaande van hoe ik scholieren en deskundigen aan wiskunde zie werken, onderscheid ik drie niveaus:

### Niveau 0: Het vanzelfsprekendheidsniveau

Vanzelfsprekend is wat je denkt, doet of laat zonder daar verder over na te denken. Je voelt je er zeker

### Summary

*In our last issue Sieb Kemme denied the existence of the three levels of certainty: the self-evident level, the in-between level and the level of proof, as introduced by Bram Lagerwerf.*

*Kemme stated: mathematics is just like life: one moment you feel confident and certain, the next moment everything seems different.*

*This article is the final reaction of the author.*

over:

- omdat de leraar het zegt of omdat het zo in het boek staat (autoriteit);
- uit gewoonte die je niet verder kunt beredeneren;
- omdat je het kunt verantwoorden als je dat wilt.

### Niveau 1: Het tussenniveau

Het belangrijkste hiervan is dat de leerling een structuur opbouwt aan de hand waarvan hij zelf kan oordelen, of het klopt wat hij doet en denkt, of niet. Sterke middelen die de leraar hierbij ter beschikking heeft, zijn:

#### 1. Een plaatje met een praatje

Aan de hand van een plaatje kan de leerling gemakkelijker onder woorden brengen hoe zijns inziens de vork in de steel zit.

#### 2. Voorbeelden

De docent maakt met voorbeelden duidelijk wat hij bedoelt; en ook dat het klopt wat hij zegt. De docent laat ook de leerlingen voorbeelden bedenken.

#### 3. Ervaringen van de leerling

Oude ervaringen kunnen verduidelijken of ondersteunen.

Ook nieuwe ervaringen zijn belangrijk. Pas als de leerling merkt dat de nieuwe methode "werkt", krijgt hij er vertrouwen in.

#### 4. Zelfcontrole

De proef op de som is dat de leerling zelf de kwaliteit van zijn werk kan beoordelen.

Bij elk van deze vier punten geldt dat in eerste instantie de docent het voordoet, en zorgt dat de leerling hem na gaat doen. Het is daarnaast belangrijk dat de leerlingen zelf initiatief nemen op den duur; de houding ontwikkelen zichzelf te willen controleren, gebruik te maken van hun ervaring en van voorbeelden, en liever een plaatje teveel te maken dan een te weinig.

#### Niveau 2: Het bewijsniveau

Het woord bewijzen wil ik reserveren voor logische deductieve bewijzen. Je begint aan een bewijs te denken als je gaat twijfelen aan je overtuiging van het tussenniveau, of als je meer greep wilt krijgen op het onderwerp, of als iemand je een bewijs vraagt.

Een bewijs kan ook allerlei bijproducten hebben: een beter inzicht, een correcte formulering van de bewering of van de definitie waarom het gaat (soms ook een herformulering), nieuwe verbanden, een uitbreiding van de theorie. Bijproducten kunnen aanzienlijk belangrijker zijn dan het bewijs zelf.

Het leren een goed bewijs te leveren is een hoofdstuk apart. Op school kom je daar meestal niet aan toe.

#### Niveau 3: Wat is een goed bewijs?

En: Wie bepaalt wat een goed bewijs is? Dat zijn vragen waar niemand een goed antwoord op weet. Er zijn meer van die vragen; je komt ermee op filosofisch terrein, weer een niveau hoger, ver weg van de school-wiskundewereld.

### Waarom Niveaus?

Een aantal redenen brengt mij ertoe bij deze indeling het woord *niveau* te gebruiken.

De *eerste* is dat ik voortbouw op het werk van Van Hiele en daar graag bij aan wil blijven sluiten.

Ten *tweede* is, wat de mensen bezighoudt, wat ze belangrijk vinden, typerend voor de verschillende niveaus; daar zit een duidelijke volgorde in die het karakter heeft van een opeenstapeling:

Op het vanzelfsprekendheidsniveau zijn mensen niet of nauwelijks toegankelijk voor "waarom"-vragen.

Op het tussenniveau zijn mensen bezig de werkelijkheid te generaliseren, namen te geven, verbanden te zoeken, zonder zich druk te maken om de logica die daarachter zit (zou kunnen zitten).

Op het bewijsniveau gaat het juist om die logica; die geeft een heel sterke greep op de problemen waarmee je bezig bent; daardoor begrijp je het nog beter.

Op het derde niveau de vraag van wat nu eigenlijk een goed bewijs is, en dergelijke zoals ik hierboven al aangaf.

Ten *derde* kan ik leerlingen daardoor beter helpen bij hun leren. Als ik bijvoorbeeld vraag: "Leg eens uit hoe je het gedaan hebt", of: "Vertel eens waarom het zo goed is", kan ik uit de antwoorden opmaken op welke manier leerlingen met de materie bezig zijn. Al naar gelang het niveau dat ik herken zeg ik dan bijvoorbeeld: "Kijk nog eens goed!", of: "Kun je dat

ook op een andere manier controleren?", of: "Waar baseer je dat op?".

### Een schoksgewijze niveau-overgang bij het leren?

De niveau-indeling zou de indruk kunnen wekken dat leerlingen van het ene niveau naar het andere zouden moeten "springen", dat er niet een geleidelijke ontwikkeling in het leren zou kunnen zijn. Dat is niet wat ik bedoel. Het gaat natuurlijk niet bij iedereen op dezelfde manier, maar bij de meeste leerlingen zie je dat ze zich geleidelijk aan, op een andere manier gaan bezighouden met het onderwerp dat aan de orde is. Door vragen en opdrachten zal de leraar moeten zorgen dat de leerling enerzijds goed thuis raakt op het lagere niveau, en anderzijds gestimuleerd wordt zich langzamerhand de werk- en denkwijze van het hogere niveau eigen te maken.

### Wat nu nog moeilijk is, zal straks vanzelfsprekend zijn

Naarmate de leerling beter doorziet hoe het in elkaar zit, zal hij zich over dat onderwerp minder gaan afvragen: "Hoe zit dat nou precies?" Langzamerhand wordt alles waar je veel mee bezig bent vanzelfsprekend. (Bij wiskunde is het van belang dat dat niet alleen een vanzelfsprekendheid uit gewoonte is, maar dat de leerling in staat blijft zijn vanzelfsprekendheden toe te lichten.) Dit verschijnsel heet "niveau-reductie". Door niveau-reductie krijgen leerlingen aandacht vrij voor nieuwe leerstof. Het maakt ook duidelijk dat het in het algemeen niet verstandig is nieuwe leerstof aan te dragen, als de oude nog niet vanzelfsprekend is voor de leerlingen.

### B. Zekerheid in wiskunde?

Na deze uiteenzetting over de niveaus van zekerheid kan ik concreter ingaan op diverse punten die Sieb Kemme aanroert in zijn "Zekerheid in wiskunde?"

#### Objectief of subjectief

De vraag naar zekerheid heeft in de eerste plaats te maken met hoe je tegen wiskunde aankijkt. Wiskunde is niet een van boven gegeven systeem. Wiskunde is mensenwerk, mijns inziens. Mensen kunnen weliswaar tot op zekere hoogte denkbeelden gemeenschappelijk hebben, maar ten diepste heeft iedere wiskundige (én elke leerling) zijn eigen wiskunde. Dat houdt in dat objectieve zekerheden niet bestaan. Er is altijd wel iemand die twijfelt.

Subjectieve zekerheden bestaan wel degelijk. Ik ben bijvoorbeeld erg zeker van de beweringen in de vorige alinea. Ik weet ook zeker dat ik de kans loop aan het twijfelen gebracht te worden, door mijn eigen invallen of door wat anderen inbrengen.

Ik zie ook bij mijzelf en om mij heen dat bij mensen de ene zekerheid de andere niet is, en ik onderscheid daar verschillende niveaus in. Als docent heb ik de mogelijkheid leerlingen te helpen zekerheid te verwerven. Vaak ook zaai ik juist twijfel, dat doe ik dan meestal met de bedoeling dat de leerlingen zich meer

in het onderwerp gaan verdiepen. Ze krijgen dan meer greep op de zaak en een nieuwe zekerheid. Het gesprek over "De som van de hoeken in een driehoek" illustreert dit (3). Het is wel zo dat dat gesprek een *eenzijdige* kijk geeft op wat er aan de hand is. Het begint namelijk pas op het moment dat er zekerheid is over de juistheid van de bewering. Daaraan is een proces vooraf gegaan. In dat proces heeft de leerling driehoeken leren onderscheiden van andere figuren. Toen dat vanzelfsprekend was geworden, is hij onderdelen van die driehoeken gaan benoemen. Hij heeft gemerkt dat ondanks allerlei verschillen, alle driehoeken toch in bepaalde opzichten "hetzelfde" zijn. Op de een of andere manier heeft hij ontdekt of vernomen dat de drie hoeken van een driehoek samen een gestrekte hoek vormen, en hij kan dat in verband brengen met andere eigenschappen die hij inmiddels heeft geleerd. En nu hem gevraagd wordt die bewering te verantwoorden, blijkt dat hij de zaak op *bewijsniveau* aanpakt: hij probeert een logische deductieve redenering op te bouwen. Het is dus het gesprek van een gevorderde leerling die al meerdere niveaus van zekerheid heeft "doorlopen".

Het gesprek blijft zich op bewijsniveau afspelen. De steeds terugkerende twijfel en daarop volgende nieuwe aanpak, gebaseerd op vernieuwde inzichten, leidt er niet toe dat de uitgedaagde zich vertwijfeld afvraagt: "Ja maar wat is nou eigenlijk een goed bewijs?"

De juistheid van de bewering blijft overigens boven alle twijfel verheven, in tegenstelling tot wat Sieb Kemme beweert. De twijfels houden verband met de juistheid van het bewijs. Dat is een typisch verschijnsel tussen het bewijs- en het tussenniveau.

#### *Zekerheid over denkbeelden en zekerheid over de werkelijkheid*

De wiskundige werkt met denkbeelden. De automonteur werkt met auto's. Zekerheid over wiskunde krijg je ten diepste door goed na te denken. Zekerheid over de motor van een auto krijg je door hem "aan de praat" te krijgen en dan goed te kijken en te luisteren hoe hij loopt. Het voorbeeld van de automonteur is dus niet geschikt om het werk van de wiskundige te verduidelijken.

Er zijn wel parallellen. Wiskundige denkbeelden komen voort uit de werkelijkheid. (Ik beperk mij even tot de schoolwiskunde). Ze worden daaruit "geabstraheerd". De werkelijkheid helpt de wiskunde bij het vormen van zijn denkbeelden, kan hem op goede ideeën brengen. Maar de bedoeling van een abstract wiskundig systeem is, dat het los van de werkelijkheid staat.

De automonteur heeft zijn theorieën over motoren. Als hij de zaak in elkaar gezet heeft zegt hij: "Zo zal hij het moeten doen". Dat is niet een voorspelling, de theorie heeft geen dwingende macht over de werkelijkheid. De automonteur uit zijn denkbeelden over het functioneren van de motor, maar doorslaggevend is wat hij hoort en ziet. Overigens, als hij over goede theorieën beschikt, zal hij wat hij waarneemt beter kunnen interpreteren.

Zo beïnvloeden op beide terreinen de denkbeelden en

de werkelijkheid elkaar, maar wat de doorslag geeft, verschilt.

Typisch voor het tussenniveau is, dat daar de scheiding tussen denkbeelden en werkelijkheid nog onvolledig is. Een illustratie of een doe-activiteit kan geweldige overtuigingskracht hebben in de wiskunde op dat niveau. (Op bewijsniveau wordt dat niet meer geaccepteerd; zie het gesprek over de som van de hoeken in een driehoek.) Sieb Kemme noemt dat "verificatie met een zwakke geldigheid".

Leerlingen voelen dat ook wel aan. Geen sterveling zal beamen dat alle getallen kleiner zijn dan duizend, ook al kun je honderden van zulke getallen noemen. In het algemeen gaan ze daar wel handig mee om. Soms heb je als leraar ineens de gelegenheid om twijfel te zaaien en de zaak door te prikken.

Of het zin heeft op die manier "meer of minder formele manieren van verificatie" (Sieb Kemme) in verband te brengen met niveaus van zekerheid zal ieder voor zich moeten uitmaken. Ik vind van wel.

#### *De waarde van de zekerheid op de verschillende niveaus*

Ik heb bij Sieb Kemme de suggestie gewekt als zou de ene zekerheid van lager allooi zijn dan de andere. Dat was niet mijn bedoeling.

Het is een oude kwestie die jaren geleden al eens in Euclides aan de orde was (6) en (7); ook in "Wiskundeonderwijs nu" komt die kwestie een aantal keren aan de orde in verband met de niveaus van Van Hiele (4).

In het kort komt het er op neer dat elke situatie zijn eigen niveau vereist. Als ik bijvoorbeeld van een tafeltje dat ik maak de hoeken wil afronden, dan zijn allerlei zekerheden over de theorie van cirkels alleen maar storend. Dan pak ik een geschikt verfbusje en trek dat om, en langs die lijn zaag ik de hoek van het tafeltje af.

Mensen verschillen in hun manier van waarderen van hun wiskundige zekerheden. Ik voor mij vind het belangrijkste dat ik me kan realiseren op welk niveau ik bezig ben, en dat ik bij situaties waarin ik verkeer het adequate niveau kan kiezen. Op die gebieden waar ik inderdaad uit verschillende niveaus kan kiezen, is mijn probleemoplossend vermogen groter.

#### *Onzekerheid, en houvast en veiligheid*

Sieb Kemme geeft aan de hand van mijn voorbeeld over de commutatieve eigenschap aan, dat er een onzekerheid is die anders van karakter is dan de gevoelens waar het in de niveaus van zekerheid over gaat. Het gaat daarbij om "je onzeker voelen in een situatie". Dat heeft een element van angst in zich.

Ik heb dat "onveiligheid" genoemd. Het woord onzekerheid vind ik dit verband verwarrend. Als een leerling zich niet veilig voelt in de leersituatie blokkeert dat het leren. In "Niveaus van zekerheid" heb ik dat verbonden met het gedrag van de leraar, en met het houvast dat de leerling heeft met betrekking tot het werk dat hem wordt voorgeschoteld. Wat Sieb Kemme schrijft illustreert dat. Zie ook (8), H. 2 en 3.

Mijn bedoeling met dat voorbeeld was anders dan het effect dat ermee blijkt te sorteren. Niet zo gelukkig gekozen dus. Ook ik ben van mening dat commutativiteit niet expliciet in het leerplan thuishoort.

### *Betekenis voor het onderwijs*

Het lijkt Sieb Kemme volstrekt overbodig de zekerheidsniveaus verder te bestuderen. Het lijkt mij daarom goed af te sluiten met de betekenis voor het wiskundeonderwijs die ik zie.

We hebben bij de Stichting Opleiding Leraren nu een jaar of twee, drie, ervaring met het werken met de niveaus van zekerheid. Het helpt de studenten in de eerste plaats bij hun eigen wiskundestudie. Bij het leren een goed bewijs te leveren staat centraal dat ze zich realiseren op welk niveau ze bezig zijn. Het verschil tussen overtuigen en bewijzen wordt duidelijk, en ze begrijpen beter wat hen te doen staat (5). Bij hun werk met leerlingen kunnen ze beter bepalen wat ze van hen eisen, ze hechten gemakkelijker waarde aan een tussenniveau-verklaring van een leerling die nog niet aan bewijzen toe is.

Bij het verder leren is het belangrijk dat de leerstof tot nu toe voldoende vanzelfsprekend is voor de leerling. In het wiskundeonderwijs gaat het er daarbij niet om dat de leerling van de docent een objectieve zekerheid verneemt of aanneemt. De leerling zal een eigen zekerheid moeten opbouwen. De docent zal moeten aansluiten bij de objectieve beleving van de leerling. Als de docent aan de leerling vraagt: "Waarom is het goed als je het zo doet?", kan hij aan de manier waarop de leerling dat uitlegt zien op welk niveau die bezig is. Met de middelen die ik bij het tussenniveau noemde kan de docent de leerling helpen met de mogelijkheden van het tussenniveau uit te buiten. Op den duur kan zo bij de leerling de houding ontstaan, dat het vanzelfsprekend is dat je in de wiskunde kunt verantwoorden wat je doet.

Uit de voorbeelden in "Niveaus van Zekerheid" blijken deze niveaus een doeltreffend hulpmiddel te zijn, bij de analyse van leerlingenteksten.

### **C. Besluit**

Toen ik Sieb Kemme's "Zekerheid in wiskunde?" voor de eerste keer las ben ik daar boos om geworden, voelde me onbegrepen en miskend. Nu ik de balans opmaak ben ik blij dit onderwerp opnieuw onder de aandacht te kunnen brengen. Ik werd gedwongen de zaak weer goed te doordenken en toe te spitsen; een vertrouwd proces inmiddels.

### **Literatuur**

- (1) Dekker, R., *Zeker in wiskunde*, De Nieuwe Wiskrant 2 nr. 4, mei 1983.
- (2) Lagerwerf, B., *Niveaus van zekerheid*, De Nieuwe Wiskrant 3, nr. 2, dec. 1983.
- (3) Kemme, S.L., *Zekerheid in wiskunde?*, De Nieuwe Wiskrant 3, nr. 3, maart 1984.
- (4) Lagerwerf, B., *Wiskundeonderwijs nu*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1982.
- (5) *Redeneren en Bewijzen*, SOL-dictaat, 3e editie, Utrecht, 1984.
- (6) Baalen, K. van, *De (onuitgesproken) vooronderstellingen van Bram Lagerwerf en van Van Hiele*, Euclides 56, nr. 10, juni/juli 1981.
- (7) Lagerwerf, B., *Reaktie op het verhaal van Anuchka's rok*, Euclides 56, nr. 10, juni/juli 1981.
- (8) Korthagen, F.A.J., *Leren reflecteren als basis van de lerarenopleiding*, SVO/Flevodruk, Harlingen, 1982.

---

## **Computerprogramma's voor het onderwijs getest en beschreven**

Computers worden steeds belangrijker in ons onderwijs. Probleem daarbij is echter dat de meeste leerkrachten niet weten wat er op de markt is aan educatieve software, wat ze ermee kunnen doen en of die programma's wel werken.

Nu verschijnt er eind maart een gids educatieve software. Deze gids bevat een informatief en objectief overzicht van (commerciële) Nederlandstalige software en is bestemd voor leerkrachten in het basisonderwijs, in het lager- en middelbaar beroepsonderwijs en in het algemene voortgezet onderwijs. Er zijn voor dit doel 72 computerprogramma's getest en beschreven. Deze 72 programma's zijn verdeeld over 16 vakken.

Uitgever van de gids is de CRL (Centrale Registratie Leermiddelen) die is ondergebracht bij de SLO (Stichting voor de Leerplanontwikkeling) in Enschede. De publicatie is het resultaat van de samenwerking tussen het COI (Centrum voor Onderwijs en Informatietechnologie) en de CRL.

Ook zijn er bij het tot stand komen van deze gids intensieve contacten onderhouden met de Amerikaanse CRL; het EPIE (Educational Product Information Exchange).

Een overzicht biedt de gids (nog) niet, omdat het een begin is: een eerste aflevering in een serie. Wel licht de gids docenten objectief voor over de werking en de inhoud van de beschreven software. Alleen programma's die goed werken en die zonder toevoegingen of aanpassingen te gebruiken zijn, zijn opgenomen.

Toetsverwerkingsprogramma's of software voor de schooladministratie zijn (nog) niet opgenomen.

Voor elk programma is er een beschrijving met doel, doelgroep en gebruiksmogelijkheden. Ook wordt het bijbehorend documentatie- en werkmateriaal vermeld. Elke beschrijving bevat verder de minimale vereisten – zoals de computer en andere apparatuur – die nodig zijn om het programma te laten werken.

Bij elk programma zijn ter illustratie twee foto's geplaatst van de beeldscherm(uitvoer) en de geprinte schriftelijke uitvoer.