Compactheid

G. van Eijk
Streekschool voor Chr. Agrarisch Onderwijs, Breukelen

Samenvatting

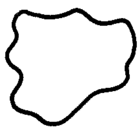
In het laatste nummer van de Nieuwe Wiskrant plaatsten we de puzzel: Hoe kun je "compactheid" meten op b.v. voortgezet onderwijsniveau?
Twee interessante reacties van docenten bereikten de redactie. Dit is er een van, de andere vindt u elders in dit nummer.

Summary

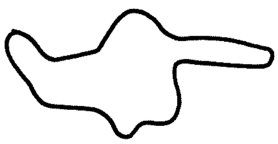
Our last issue contained a puzzle: how can one "measure" compactness at secondary schoollevel.
Two reactions from teachers were send to the Nieuwe Wiskrant, both equally interesting. This is one of them, the other one can be found elsewhere in this issue.

Compactheid

In de Nieuwe Wiskrant van maart 1984 tref ik het probleem over "compactheid" aan. Van de twee figuren A en B kun je inderdaad meteen wel zeggen dat figuur A compacter is dan figuur B.

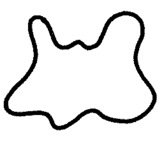


A

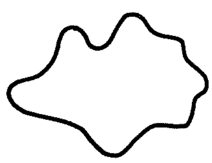


B

In één oogopslag is dat te zien. Figuur B heeft een veel grilliger vorm dan figuur A. De volgende twee getekende figuren C en D maken me snel duidelijk dat het niet altijd meteen is in te zien welke van de twee figuren compacter is. Ik vraag me af of dat wel ooit is uit te maken.

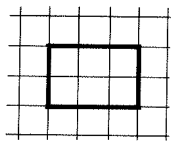


C

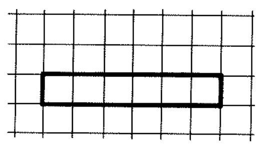


D

Kortom, ik neem de uitdaging aan. Mijn eerste stap is op ruitjes-papier wat minder grillige figuren te tekenen dan hierboven staan. Door gebruik te maken van hokjes worden de figuren vanzelf al minder grillig (ook compacter? – ik heb geen idee).

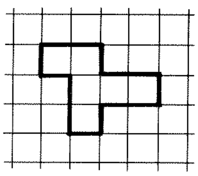


E

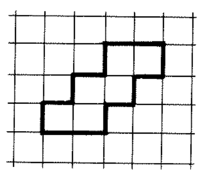


F

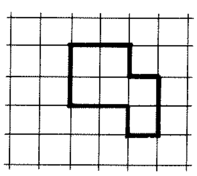
Figuur E is duidelijk compacter dan figuur F. Maar waaruit bestaat precies dat verschil? Is dat verschil te meten? Ik heb bewust eerst maar eens de oppervlakte constant gehouden. Dat brengt me op een idee. Hoe zit het eigenlijk met de omtrek van de twee figuren? Ja natuurlijk: hoe minder compact de figuur, hoe grilliger en hoe groter de omtrek!
Deze (kleine) vondst stimuleert tot het verder tekenen van figuren op ruitjespapier. De oppervlakte neem ik voorlopig maar weer constant.



G



H

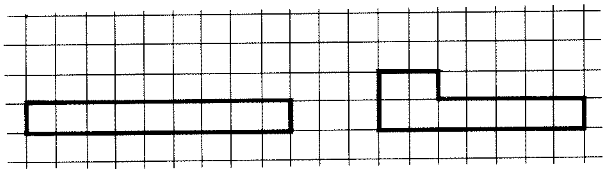


I

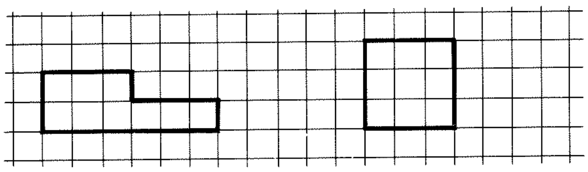
Van nu vijf getekende figuren op het ruitjespapier maak ik een overzicht:

figuur	E	F	G	H	I
oppervlakte	6	6	6	6	6
omtrek	10	14	14	14	12
$\frac{\text{opp.}}{\text{omtr.}}$	0,6	0,43	0,43	0,43	0,5

In het overzicht staat ook weer voor elk figuur het quotiënt van de oppervlakte en de omtrek. Is dit quotiënt een maat voor compactheid? Ik besluit meerdere figuren te tekenen, dit keer met oppervlakte 9.



J K



L M

Wanneer we hier ook een overzichtje van maken dan krijgen we het volgende:

figuur	J	K	L	M
oppervlakte	9	9	9	9
omtrek	20	18	16	12
$\frac{\text{opp.}}{\text{omtr.}}$	0,45	0,5	0,56	0,75

Figuur M heeft de hoogste waarde voor het quotiënt van de oppervlakte en de omtrek. Op ruitjespapier is een vierkant het meest compact, dus dat klopt. Maar toch, als we de figuren E tot en met M vergelijken, dan klopt het soms ook weer niet zo mooi. Neem maar eens de figuren E en L. Zijn die twee figuren ongeveer even compact???

Ik besluit er wat aan te gaan rekenen. Ik noem het quotiënt van de oppervlakte en de omtrek Q. De maximale waarde van Q wordt bereikt bij een vierkant. Stel dat vierkant heeft zijde a. Wat is dan $Q_{max.}$?

$$\text{oppervlakte} = a \times a = a^2$$

$$\text{omtrek} = 4 \times a = 4a$$

$$Q_{max.} = \frac{a^2}{4a} = \tfrac{1}{4}a$$

Als we nu als maat voor de compactheid het getal C nemen, dan is het handig om C tussen 0 en 1 te laten lopen. Desgewenst kan dit worden: tussen 0% en 100%.

Om dit te bereiken delen we Q steeds door $Q_{max.}$. Dus $C = Q : Q_{max.}$ en dit geeft maximaal $C = 1$ voor $Q = Q_{max.}$.
Voor een vierkant op ruitjespapier heeft C de waarde 1.
Ik laat het aan de lezer over om nu voor de figuren E tot en met M de waarde C uit te rekenen. Mijns inziens geeft C een aardige indicatie voor de compactheid van een figuur.
Tot nu toe hebben we, om het probleem eenvoudig te houden, eerst gekeken naar figuren op ruitjespapier. Het wordt tijd om het bovenstaande eens toe te passen op figuren die niet gebonden zijn aan een hokjespatroon, bijvoorbeeld cirkels.

Van alle figuren in het platte vlak is niet het vierkant, maar de cirkel de meest compacte figuur. Intuïtief voelen we dat wel aan. Is dit ook door de waarde C aan te geven? We volgen dezelfde aanpak als bij de rechthoekige figuren. Stel een cirkel heeft straal r. Wat is dan $Q_{max.}$?

$$\text{oppervlakte} = \pi \times r^2$$

$$\text{omtrek} = 2\pi \times r$$

$$Q_{max.} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \tfrac{1}{2}r$$

Voor een bepaald figuur is de waarde van C dus:
$C = Q : Q_{max.} = \text{opp./omtr.} : \tfrac{1}{2}r$ met r de straal van een cirkel met een oppervlakte gelijk aan die van de figuur.

Voorbeeld 1

We bepalen de waarde van C voor een vierkant. Het vierkant heeft zijde 3. Dat geeft voor de oppervlakte 9 en voor de omtrek 12. De straal van een cirkel met opp. = 9 is:

$r = \sqrt{\frac{9}{\pi}}$. Dit geeft voor de compactheid:

$C = \frac{9}{12} : \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{\pi}} \approx 0{,}89$. (Voor een cirkel is $C = 1$)

Voorbeeld 2

We bepalen de waarde van C voor een rechthoek van 2 bij 3. Dit geeft oppervlakte 6 en omtrek 14. De straal van een cirkel met opp. = 6 is:

$r = \sqrt{\frac{6}{\pi}}$. Dit geeft voor de compactheid:

$C = \frac{6}{14} : \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{\pi}} \approx 0{,}87$.

Alleen de straal r is nog wat onhandig in de formule voor C. Stel een figuur in het platte vlak heeft een oppervlakte A. Een cirkel met oppervlakte A heeft als straal:

$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$. Hiermee raken we de straal r in de uitdrukking voor C kwijt:

$$C = \frac{A}{\text{omtrek}} : \tfrac{1}{2}r = \frac{2\sqrt{\pi \times A}}{\text{omtrek}}$$

De algemene formule voor de compactheid C wordt dus:

$$C = \frac{2\sqrt{\pi \times \text{oppervlakte}}}{\text{omtrek}}.$$

C is inderdaad een dimensieloos getal!

De compactheid van een figuur in het platte vlak laat zich gemakkelijk uitbreiden naar de compactheid van een ruimtelijk figuur.
Voor een bol is C = 1 en

$$Q_{\text{max.}} = \frac{\text{inhoud}}{\text{oppervlakte}} =$$

$\frac{1}{3}$r met r de straal van de bol.
Voor een ruimtelijk figuur met inhoud I en oppervlakte O is de compactheid C :

$$C = \frac{Q}{Q_{\text{max.}}} = \frac{Q}{\frac{1}{3}r} \quad \text{met } r = \sqrt[3]{\frac{3 \times I}{4 \times \pi}}$$

Uitgewerkt geeft dit:

$$C = \frac{3 \cdot I^{2/3}}{(3/4\pi)^{1/3} \cdot O} \approx 4{,}8 \cdot \frac{I^{2/3}}{O}$$

Een blikje frisdrank heeft een compactheid C van ongeveer 0,8. Een balk van 2 bij 4 bij 6 heeft een compactheid C van ongeveer 0,7. Ik laat ook dit verder aan de lezer over (wat is C bij een kubus, een piramide, een kegel?).

Nog even terug naar de puzzel. Van de figuren A, B, C en D moeten we alleen de oppervlakte en omtrek bepalen om de compactheid te weten te komen. Door middel van hokjes tellen vind ik bij benadering de oppervlakte van de figuren (eerst op ruitjespapier overtrekken); met behulp van een touwtje bepaal ik ook weer bij benadering de omtrek. Dit geeft voor de figuren A, B, C en D een compactheid C van respectievelijk 0,9, 0,5, 0,7 en 0,8. Van die vier figuren is figuur B dus het minst en figuur A het meest compact. Figuur D is tenslotte compacter dan figuur C.

Zit er bij dit alles nog wat bij voor leerlingen in het voortgezet onderwijs? Misschien voor de bovenbouw van HAVO/VWO? Ik heb zo mijn twijfels. Het wiskundeprogramma is toch al vol genoeg? Toch geeft het bezig zijn met deze puzzel mij wat nieuwe inzichten in de meetkunde. Er zit eigenlijk van alles wat in als ik zo m'n aanpak eens teruglees. Intuïtief kom je al een heel eind doordat het probleem vrij realistisch is.
Zelf werk ik op een Lagere Agrarische School. Deze puzzel brengt me op het idee eens leerstof te schrijven rond het thema omtrek en oppervlakte. En natuurlijk compactheid. Een opdracht zou bijvoorbeeld kunnen zijn: welke ruilverkaveling is het gunstigst? Compactheid komt dan ook om de hoek kijken. Een stimulerende puzzel dus. Voor mij dan. Ook voor leerlingen?

Eén ding is duidelijk: zoals het probleem over compactheid is op te lossen, de manier waarop, het realistische, het onderzoekende, het tekenen en berekenen, zo zouden leerlingen ook meetkunde-onderwijs moeten kunnen krijgen. In veel wiskundemethodes is daar de laatste jaren al wat van te zien. Dat maakt het er alleen maar leuker op. Voor leerlingen èn leerkrachten.

Begin september 1984 verschijnt de eerste publicatie voortkomend uit het ontwikkelingsonderzoek "LBO/MAVO-project burgerinformatica", met o.a. leerlingenmaterialen. Deze leerlingenmaterialen verkeren nog in een experimenteel stadium.

Naast de twintig lessen voor de brugklas bevat het boek nog materialen voor hogere leerjaren.
Het leerlingenmateriaal is ten behoeve van de docenten voorzien van commentaar en aanwijzingen voor het werken met de bijbehorende programmatuur.
Deze programmatuur zal beschikbaar komen voor alle micro's waarop met ECOL gewerkt kan worden.

Het boek "De Baas over de computer" is schriftelijk te bestellen bij OW & OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.