# Achtergronden voor wiskunde A

## Een verdelingsprobleem

**J. van Dormolen**
P.D.I. voor de Leraarsopleiding, R.U. Utrecht

*Samenvatting*

*Allerwegen blijkt een grote behoefte aan achtergrond-informatie bij het nieuwe wiskunde A-programma. Veel leraren hebben het gevoel 'overvallen' te worden met allerlei wiskunde waar ze in hun opleiding weinig mee te maken hebben gehad.*
*Eén van de onderwerpen die impliciet aan de orde komt in de Hewet-publikatie is 'Operations Research'.*
*De auteur belicht enkele aspecten van dit vakgebied.*

*Summary*

*The introduction of a complete new program for mathematics at upper secondary level with applications in mind, made it necessary to offer background information for those subjects that are new to the teachers. And most Dutch teachers do not know very much about 'Operations Research'.*
*This article offers some background information about this subject of which aspects can be found in the publications 'Matrices' and 'Linear Programming'.*

In verband met de invoering van het VWO wiskunde-A-programma ontstaat bij veel leraren de behoefte aan wat meer achtergrond bij die stukken wiskunde die nieuw voor hen zijn. Een voorbeeld van een gebied van de wiskunde waar weinig wiskundeleraren in hun opleiding over gehoord hebben is Operations Research.
Met grote simplificatie kan men zeggen dat het gaat over wiskundige aspecten van het verdelen van goederen en diensten op een zo efficiënt mogelijke manier. Daarbij spelen dus maximaliserings- en minimaliseringsproblemen een grote rol.
In het wiskunde-A-programma komen dergelijke problemen tot uitdrukking in de HEWET-boekjes 'Matrices' en 'Lineair Programmeren'.

Om wat meer over Operations Research te weten te komen ben ik op zoek gegaan naar literatuur erover die me niet te zwaar op de maag zou liggen.
Een plezierig leesbaar boek is H.M. Wagner's '*Principles of operations research*' [1]. Het is geschreven voor mensen zoals ik die weinig of niets van Operations Research afweten. Uit dit boek met 1039 bladzijden neem ik betrekkelijk willekeurig één artikel. Wat nu volgt is een vrije vertaling ervan. Het getallenvoorbeeld en de meeste figuren zijn letterlijk overgenomen.
(Wagner wordt in het boek aangeduid als docent aan de "School of Organisation and Management, Yale University" en hij wordt vermeld als "Consultant to the Firm McKinsey & Company, Inc.").

Het gaat hier om de oplossing van een probleem van verdeling van voorraad, in het boek '*distribution of effort model*' genoemd. Een zekere hoeveelheid artikelen, grondstoffen, kapitaal moet zodanig over een aantal plaatsen worden verdeeld dat het hoogst mogelijke rendement wordt verkregen.
Als voorbeeld geeft Wagner het bevoorradingsprobleem van Mr. Chick.N. Little, eigenaar van vier winkels. Mr. Little heeft een aantal kratten met eieren. Hij wil die zó over zijn winkels verdelen, dat zijn netto winst maximaal is. De winst per krat is niet overal gelijk als gevolg van plaatselijke omstandigheden, zoals: de wijk waarin de winkel ligt, verkooptechniek van het personeel, breekpercentage van de eieren als gevolg van onhandigheid van personeel, vervoerskosten, opslagkosten, enz.
Uit ervaring weet Little dat de netto winst in elk van de winkels als volgt is verdeeld:

NETTO WINST

| aantal kratten Y | winkel 1 $R_1(Y)$ | winkel 2 $R_2(Y)$ | winkel 3 $R_3(Y)$ | winkel 4 $R_4(Y)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 6 | 3 | 2 | 5 |
| 2 | 10 | 10 | 6 | 9 |
| 3 | 14 | 15 | 14 | 13 |
| 4 | 16 | 19 | 20 | 17 |
| 5 | 18 | 21 | 22 | 21 |
| 6 | 20 | 22 | 24 | 25 |

fig. 1

Little brengt alleen volle kratten naar zijn winkels.

Algemene notatie-afspraak:

$N$ eenheden worden over $s$ plaatsen verdeeld. Laat $Y$ het aantal eenheden zijn, dat naar plaats $j$ wordt gebracht ($Y = 0,1,2,\ldots,N$; $j = 0,1,2,\ldots s$). Ik noem dan $R_j(Y)$ de netto winst die in plaats $j$ wordt verkregen.

Als Little 6 kratten naar Winkel 4 brengt en niets naar de andere winkels dan levert hem dat op:

$$R_1(0) + R_2(0) + R_3(0) + R_4(6) =$$
$$0 + \quad 0 + \quad 0 + \quad 25 = 25.$$

Als hij 3 kratten naar Winkel 1, 3 naar Winkel 2 en niets naar de andere winkels brengt dan krijgt hij:

$$R_1(3) + R_2(3) + R_3(0) + R_4(0) =$$
$$14 + \quad 15 + \quad 0 + \quad 0 = 29.$$

Little wil zijn 6 kratten zo verdelen dat zijn winst maximaal is.

Algemene notatie-afspraak:

$Y_j$ is het aantal eenheden dat naar plaats $i$ wordt vervoerd ($Y_i = 0, 1, \ldots, N$; $j = 0, 1, \ldots, s$;
$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_s \leqslant N$).

Little wil dus antwoord hebben op de vraag wat het maximum van

$R_1(Y_1) + R_2(Y_2) + R_3(Y_3) + R_4(Y_4)$ is bij $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \leqslant 6$ ($Y_i$ geheel en niet-negatief).

Algemene formulering van het verdelingsprobleem:

$$\text{Bepaal Max } \left(\sum_{j=0}^{s} R_j(Y_j)\right) \text{ onder de voorwaarden:}$$

$$\sum_{j=0}^{s} Y_j \leqslant N \text{ en } Y_j \text{ geheel en niet-negatief.}$$

Men zal zich kunnen afvragen waarom $j=0$ toegelaten wordt. Dat is gedaan omdat bij de oplossing van het probleem een hypothetische Winkel 0 wordt ingevoerd waar de winst 0 is: $R_0(Y) = 0$ voor alle $Y$. Een andere vraag waarom het ongelijkteken geschreven is in de verdelingsvoorwaarde. Het antwoord is dat er verdelingsproblemen zijn waarbij de getallen $Y_j$ niet lineair verdeeld zijn. Bijvoorbeeld bij de verdeling van een kapitaal $N$ over een aantal bouwprojecten; of van een zekere hoeveelheid grondstof over verschillende produktieprocessen. Het kan dan wel eens voordeliger lijken te zijn niet alle bouwprojecten uit te voeren, c.q. produkten te fabriceren en dan kan er wel eens wat geld, grondstof overblijven. In dat geval zou dan $R_0(Y) > 0$ zijn. Wagner geeft daar ook voorbeelden van in zijn boek.
Voor de oplossing van de verdeling van kratten eieren wordt het probleem in twee stappen herformuleerd.

## Eerste stap

Doe net alsof alle kratten door één vrachtauto worden weggebracht, die begint bij Winkel 4, dan naar Winkel 3 gaat, vervolgens Winkel 2 en dan Winkel 1. Terwille van het wiskundige probleem gaat de auto tenslotte naar een hypothetische Winkel 0.

Een verdeling die mogelijk is, is bijvoorbeeld:
Ga met 6 kratten naar Winkel 4; dit geven we symbolisch aan door: (6,4)
Bij Winkel 4 worden 3 kratten afgeladen.
Ga dan met de resterende 3 kratten naar Winkel 3; symbolisch: (3,3)
Daar wordt 1 krat afgeladen.
Dan komt daarna dus: met 2 kratten naar Winkel 2: (2,2)
Vervolgens:
met 2 kratten naar Winkel 1, (2,1)
zodat er in Winkel 2 niets is afgeladen.
In Winkel 1 worden 2 kratten afgeladen. De auto gaat dan (hypothetisch) met 0 kratten naar de (hypothetische) Winkel 0.

We kunnen dan het volgende plaatje van het gevolgde traject maken:

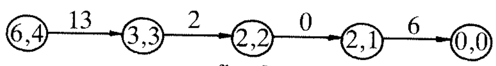
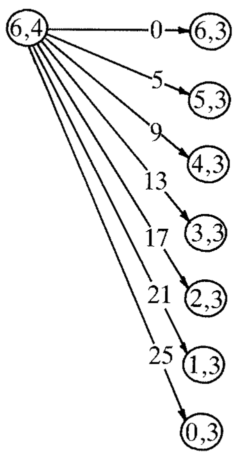


fig. 2

De getallenlijn bij de pijlen geven de netto winst van elk van de winkels, die in figuur 1 wordt afgelezen. Bij deze route zou de totale winst dus 13 + 2 + 0 + 6 zijn.
Natuurlijk heeft Little als hij met 6 kratten in Winkel 4 gekomen is nog meer mogelijkheden. Die staan in onderstaand plaatje.

Van Winkel 4:




met 6 kratten naar Winkel 3, netto opbrengst in Winkel 4 is 0.
met 5 kratten naar Winkel 3, netto opbrengst in Winkel 4 is 5.
met 4 kratten naar Winkel 3, netto opbrengst in Winkel 4 is 9.
met 3 kratten naar Winkel 3, netto opbrengst in Winkel 4 is 13.
met 2 kratten naar Winkel 3, netto opbrengst in Winkel 4 is 17.
met 1 krat naar Winkel 3, netto opbrengst in Winkel 4 is 21.
met 0 kratten naar Winkel 3, netto opbrengst in Winkel 4 is 25.

We kunnen nu een netwerk van alle trajecten maken:

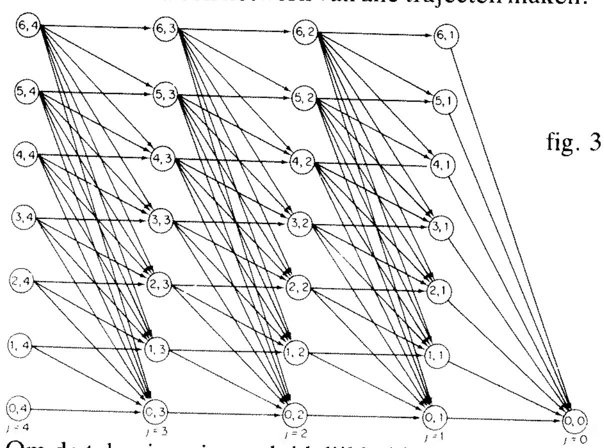


fig. 3

Om de tekening niet onduidelijkheid te maken zijn de netto winst-getallen bij de pijlen weggelaten.

Zelfs bij een betrekkelijk eenvoudig voorbeeld als dit is bepalen van het meest voordelige traject door het netwerk een lastig, tijdrovend en onhandig werkje. Daarom volgt nu de tweede herformulering.

## Tweede stap

Als Little zou weten wat bijvoorbeeld het meest voordelige traject door het netwerk zou zijn vanaf Winkel 2, dan kan hij het meest voordelige traject vanaf Winkel 3 berekenen. We lopen nu even vooruit op de straks uit te voeren berekeningen en geven terwille van een duidelijke uitleg alvast een paar resultaten:

| Als n kratten naar Winkel 2 gebracht zouden worden $n =$ | dan zou het meest voordelige traject daarna een netto-winst opleveren van: | bij een verdeling van de kratten: in W2 | in W1 | in W0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 6 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 10 | 0(of 2) | 2(of 0) | 0 |
| 3 | 16 | 2 | 1 | 0 |
| 4 | 21 | 3 | 1 | 0 |
| 5 | 25 | 3(of 4) | 2(of 1) | 0 |
| 6 | 29 | 3(of 4) | 3(of 2) | 0 |

fig. 4

We kunnen dit in een plaatje als volgt voorstellen:

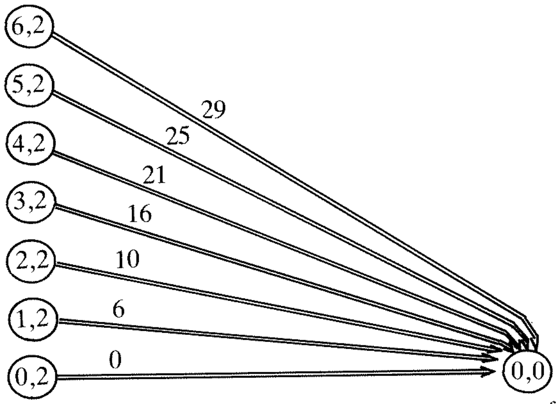



fig. 5

De dubbele pijl geeft steeds het meest voordelige traject.

Algemene notatie-afspraak:

Als $n$ eenheden op plaats $j$ gebracht worden dan wordt de netto winst vanaf die plaats aangeduid door $g_j(n)$. Bij de meest voordelige verdeling van $n$ eenheden over de plaatsen $j$, $j$-1, --, 0 komen er $Y_j(n)$ eenheden in plaats $j$.

In ons voorbeeld is $g_2(3) = 16$ en $Y_2(3) = 2$. Er is dan 1 krat over voor Winkel 1, dus $Y_1(1) = 1$.
Bij elk van deze verdelingen wordt nu berekend wat het voordeligste traject vanaf Winkel 3 zou zijn als de vrachtwagen met $n$ = 6,5,4,3,2,1,0 kratten daar zou aankomen.

We nemen als voorbeeld $n = 4$

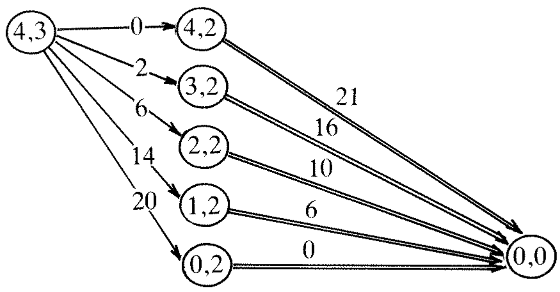



fig. 6

Met andere woorden: We berekenen respectievelijk

$R_3(0) + g_2(4)$ (= 21)
$R_3(1) + g_2(3)$ (= 18)
$R_3(2) + g_2(2)$ (= 16)
$R_3(3) + g_2(1)$ (= 20)
$R_3(4) + g_2(0)$ (= 20)

en bepalen daarvan het maximum $g_3(4)$.
We zien hieruit dat $g_3(4) = 21$ met $Y_3(4) = 0$. (Uit het voorgaande weten we dat dan $Y_2(4) = 3$ en $Y_1(1) = 1$.)
Vervolgens wordt analoog gewerkt voor Winkel 4.

Algemene formulering van het probleem:

Bepaal $g_j(n) = \text{MAX}[R_j(Y) + g_{j-1}(n-Y)]$ voor elke mogelijke $n$.
(R) Doe dat achtereenvolgens voor $j = 0,1,2,\ldots,s$ waarbij gegeven is: $g_0(n) = 0$ voor alle $n$.

Hiermee is het probleem recursief geformuleerd. Daardoor is het ook automatisch verwerkbaar op de computer.
We kunnen nu de berekening daadwerkelijk uitvoeren. We beginnen met Winkel 1. Wegens $g_0(n) = 0$ voor alle $n$ is $g_1(n) = R_1(n) = n$ met $Y_1(n) = n$ voor $n = 0,\ldots,6$

| | $n$ | $y_1(n)$ | $g_1(n)$ |
|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 1 | 6 |
| | 2 | 2 | 10 |
| Crates | 3 | 3 | 14 |
| Available: | 4 | 4 | 16 |
| | 5 | 5 | 18 |
| | 6 | 6 | 20 |

fig. 7

Vervolgens berekenen we de waarden van $g_2(n)$ voor $n = 0,\ldots,6$

$R_2(y) + g_1(n-y)$
Shipment Quantity;

| Crates Availabe $n$ \ $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $y_2(n)$ | $g_2(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 + 0 | | | | | | | 0 | 0 |
| 1 | 0 + 6 | 3 + 0 | | | | | | 0 | 6 |
| 2 | 0 + 10 | 3 + 6 | 10 + 0 | | | | | 0,2 | 10 |
| 3 | 0 + 14 | 3 + 10 | 10 + 6 | 15 + 0 | | | | 2 | 16 |
| 4 | 0 + 16 | 3 + 14 | 10 + 10 | 15 + 6 | 19 + 0 | | | 3 | 21 |
| 5 | 0 + 18 | 3 + 16 | 10 + 14 | 15 + 10 | 19 + 6 | 21 + 0 | | 3,4 | 25 |
| 6 | 0 + 20 | 3 + 18 | 10 + 16 | 15 + 14 | 19 + 10 | 21 + 6 | 22 + 0 | 3,4 | 29 |

fig. 8.

Hetzelfde doen we voor Winkels 3 en 4.
We krijgen dan de volgende overzichtstabel:

| Crates Available: $n$ | $j=1$ | | $j=2$ | | $j=3$ | | $j=4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y_1(n)$ | $g_1(n)$ | $y_2(n)$ | $g_2(n)$ | $y_3(n)$ | $g_3(n)$ | $y_4(n)$ | $g_4(n)$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 6 | 0 | 6 | 0 | 6 | 0 | 6 |
| 2 | 2 | 10 | 0,2 | 10 | 0 | 10 | 2 | 11 |
| 3 | 3 | 14 | 2 | 16 | 0 | 16 | 0 | 16 |
| 4 | 4 | 16 | 3 | 21 | 0 | 21 | 0,1 | 21 |
| 5 | 5 | 18 | 3,4 | 25 | 4 | 26 | 1 | 26 |
| 6 | 6 | 20 | 3,4 | 29 | 3,4 | 30 | 1 | 31 |

fig. 9

Uit deze tabel zijn de gegevens voor figuur 4 gehaald. Bij een optimale verdeling van 6 kratten is de winst dus 31. Met $Y_4(6)=1$, $Y_3(5)=4$, $Y_2(1)=0$ en $Y_1(1)=1$. (Of het op lange termijn een verstandige politiek zou zijn om Winkel 2 niet met eieren te bevoorraden is hier nu niet aan de orde.)

Opmerking: De informatie van figuur 9 is ook nuttig als er tijdens het verdelingsproces wat verandert. Bij een aanvangsvoorraad van 6 is er 1 krat in Winkel 4 afgeleverd. Op weg naar Winkel 3 valt er een krat van de auto en alle eieren zijn kapot. Dan moet Mr. Little een voorraad van 4 over Winkels 3, 2 en 1 verdelen. De optimale verdeling is dan:

$$Y_4(6)=1,\ Y_3(4)=0\ ,\ Y_2(4)=3 \text{ en } Y_1(1)=1.$$

Met een winst van $R_4(1) + g_3(4) = 27$ in plaats van de verwachte.

## Tot slot

Tot slot een aantal opgaven uit het boek van Wagner voor de liefhebbers die zich nog verder in dit probleem willen vastbijten:

a) Stel dat tijdens het vervoer naar Winkel $j$ er een fractie $f_i(0 \leqslant f_i \leqslant 1)$ door breuk of diefstal verdwijnt. Wijzig de recursieformule in ($R$) overeenkomstig.

b) Mr. Little herinnert zich uit het verleden dat de winstfunctie $R_j(Y_j)$ bij stijgende $Y_j$ eerst stijgt en dan gaat dalen als gevolg van hoge opslagkosten. Bepaal of, en zo ja hoe, de respectievelijke herformuleringen van het oorspronkelijke probleem veranderen. Wellicht moeten er minder dan N kratten naar de winkels gebracht worden.

c) Verwissel in figuur 1 de winstopbrengsten van Winkel 1 en Winkel 4 en ook die van Winkels 2 en 3. Maak een tabel als figuur 9. Zijn er verschillen?

d) United Fund wil 10 vrijwilligers laten collecteren in drie grote flatgebouwen. De directie schat dat als er $Y_j$ vrijwilligers naar Gebouw $j$ gaan de opbrengst $R_j(Y_j)$ er als volgt uitziet:

| $Y_j$ | $R_1(Y_j)$ | $R_2(Y_j)$ | $R_3(Y_j)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 5 | 3 | 20 |
| 2 | 10 | 6 | 35 |
| 3 | 15 | 12 | 45 |
| 4 | 25 | 18 | 55 |
| 5 | 35 | 30 | 60 |
| 6 | 50 | - | 65 |
| 7 | 55 | - | - |

Het heeft geen zin meer dan 7 mensen naar Gebouw 1, meer dan 5 naar Gebouw 2 of meer dan 6 naar Gebouw 3 te sturen.
Bepaal een optimale verdeling. Verandert de opbrengst als er 8, 9, 11 of 12 vrijwilligers op stap gestuurd worden?

e) In het geval van de vorige opgave zijn er vrijwilligers te kort. Daarom wordt het probleem door de directie als volgt herformuleerd:
Bepaal het minimum aantal vrijwilligers waarbij de opbrengst minstens $R$ is met $R$ = 80, 90, 100.

## Literatuur

[1] Wagner, H.M., Principles of operations research, London 1975.