

De schommel, een wiskundig rijke context

Paul Herfs

Vakgroep Onderwijskunde, R.U. Utrecht

Samenvatting

De bewegingen van een schommel staan centraal in een gedeelte van het pakketje 'Grafiekentaal'. De schommel sluit direct aan bij de belevingswereld van de kinderen en voldoet daardoor aan de eis die bij het maken van dit pakketje is gesteld.

De leerlingen kunnen zich inderdaad goed inleven in de situatie, maar anderzijds blijkt het gekozen verschijnsel erg complex.

Summary

The movement of a swing seems a rich context for mathematical activities. The Foundation for Curriculum Development developed a studentbooklet in which this movement plays an important role: 'The language of graphs'. Although children were able to discuss the problem rather precise it seemed that on the other side the problem is very complex.

In een brugklas van een Amsterdamse middenschool wordt gewerkt met het pakket 'Grafiekentaal', ontwikkeld door de projectgroep "Wiskunde 12-16" van de Stichting voor de Leerplanontwikkeling.

Eén van de curriculumkenmerken is, dat de opdrachten aan moeten sluiten bij de belevingswereld van kinderen. De contexten die in de opdrachten voorkomen, moeten leerlingen aanspreken op eigen ervaringen en kennis van situaties.

De volgende opdracht komt uit het pakket 'Grafiekentaal':

Teken een grafiekje waarin je kunt (laten) zien hoe jouw afstand tot de grond verandert als je aan het schommelen bent.

Hebben jullie in de groep allemaal precies dezelfde grafiek? Of zou dat niet zo hoeven te zijn?

Praten jullie dààr 's over.

De leerlingen van klas 1G hebben de opdracht eerst in groepjes van ± 4 leerlingen gemaakt. Groepswerk is ook een curriculumkenmerk van dit SLO-pakket. Hans, de leraar, bespreekt vervolgens deze opdracht klassikaal, waarbij hij erop let dat meerdere groepjes een antwoord formuleren.

Hans: "Jouw afstand van de grond als je op een schommel zit, André?" André zwijgt.

Tommy: "Net als bergjes achter elkaar."

Het is rumoerig in de klas en Hans geeft ze een uitbrander.

Conchita heeft dit antwoord:



Esther heeft de volgende grafiek:



want "anders lijkt het net of de schommel vooruit beweegt."

Hans: "De schommel blijft op dezelfde plaats hangen, maar de tijd loopt door." Hans legt verder uit dat de punten in de top van Conchita's grafiek juist zijn en dat de beweging van de schommel als deze op het laagste punt is (geringste afstand van de grond) vloeiend zal zijn.

De uitleg van de docent verdient een nadere beschouwing. "De punten in de top van Conchita's grafiek zijn juist" en... "de beweging van de schommel als deze op zijn laagste punt is, zal vloeiend zijn." Maar is die

uitleg correct? Is het niet zo dat, als een schommel naar beneden valt, deze een hogere snelheid heeft dan wanneer de schommel het hoogste punt nadert? En als er dan al 'punten' in de gevraagde grafiek voorkomen, zouden die dan niet juist beneden moeten zitten? Dus, daar waar de afstand tot de grond het geringst is?

Tijdens deze les in februari 1983 observeerden wij, Rijkje Dekker en ik, in het kader van het SVO-onderzoeksproject (1) "Interne Differentiatie Wiskunde-onderwijs 12-16". Rijkje was het niet eens met de uitleg van de bovengenoemde docent en zijn uiteindelijke keuze voor Conchita's grafiek. Volgens haar waren de punten boven in de grafiek juist niet goed, want "de snelheid als de schommel daalt neemt toe en is beneden het hoogst. En als de schommel omhoog gaat, neemt de snelheid af. Boven staat hij zelfs even stil. Dan kun je eraf springen."

Deze argumentenuitwisseling vond tijdens de klassikale bespreking plaats. De docent kon het eens worden met Rijkje. Een dergelijke discussie tussen wiskundigen tijdens een lesuur komt uiteraard maar zelden voor.

De vraag is ook, of dat wel zo wenselijk is. Zou bij een experimenteel onderwijsleerpakket een bijbehorende docentenhandleiding niet veel efficiënter zijn?

De SLO-projectgroep "Wiskunde 12-16" heeft inderdaad een docentenhandleiding, behorend bij het pakket 'Grafiekentaal', ontwikkeld. Over de schommel-opdracht en soortgelijke opdrachten wordt het volgende in de docentenhandleiding vermeld.

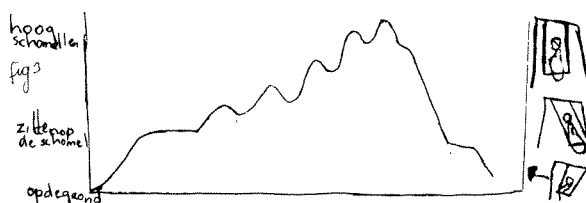
3.4. Vanaf bladzijde 20 wordt een aantal oefeningen gegeven die betrekking hebben op de directe overgang van een situatie naar een grafiek en omgekeerd, waarbij enige nadruk wordt gegeven aan het communicatieve aspect, door te benadrukken dat men moet weten waar het over gaat door iets bij de assen te zetten. Er ligt nadruk op het expliciteren van de grootheden die een rol spelen en het noteren ervan bij de assen. Omdat aangenomen mag worden dat de noodzakelijke voorwaarden om dit te kunnen vervuld zijn, zijn de opdrachten ook meer 'open'. Daardoor is ook hier confrontatie van de verschillende groepsoplossingen een belangrijk reflectiemiddel.

Zoals blijkt uit de omschrijving, heeft deze passage betrekking op meerdere opdrachten. Het gaat met name om de benoeming van de grootheden op de assen. Vervolgens volgde in de docentenhandleiding een aantal specifieke opmerkingen. Per bladzijde werd aangegeven wat de bedoeling erachter was. Daarbij maakten de ontwikkelaars gebruik van ervaringen en observaties, opgedaan in twee proefscholen, in resp. Oldenzaal en Deventer. De specifieke opmerkingen bij de schommel-opdracht waren:

Bladzijde 24

Bij vraag b komt het periodieke van de situatie meestal goed uit de verf. Het is ook een van de sterke globale kenmerken van een grafiek. Veel leerlingen vallen hierbij weer terug op hun ervaringen.

Laat in een grafiekje zien hoe jouw afstand tot de grond verandert als je op een schommel zit.



De nadruk ligt bij deze specifieke opmerking op 'het periodieke, één van de sterke globale kenmerken van een grafiek'. Maar kijken leerlingen en docenten wel zo globaal? En zou er niet ook iets gezegd moeten worden over de niet-globale, de precieze oplossing van deze opdracht? Want als de algemene aanwijzing betreffende de klassikale bespreking serieus genomen moet worden, dan zal de confrontatie van verschillende groepsoplossingen pas als een belangrijk reflectiemiddel gaan werken, wanneer vanuit het globale, in de diepte gedoken wordt.

Tien maanden later: 7-12-1983.

Ik doe nu onderzoek op een brede scholengemeenschap in Deventer, een school waarmee de SLO-projectgroep "Wiskunde 12-16" nauw samenwerkt.

Het groepje dat ik observeer bestaat uit vier meisjes: Berdien, Colette, Erna en Tasja. In het volgende fragment proberen zij de schommel-opdracht in het groepje op te lossen. "L." in het fragment is de leraar van B5, een MAVO/HAVO-brugklas.

Erna leest de volgende opdracht voor. De docent is nog steeds op de gang en Marcel wordt steeds luidruchtiger. Berdien zegt er wat van: "Stil dan, meneer pakt je straks weer bij de haren!"

Erna is inmiddels klaar met voorlezen.

Colette: "Ik heb niks gehoord hoor."

Erna begrijpt de boodschap en herleest de opdracht.

Berdien: "Nou, wat moeten we nou doen?"

Tasja: "Een grafiekje tekenen."

Erna: "Ik weet hoe het moet." Ze maakt met haar hand een golfbeweging.

De docent komt de klas binnen. Het is gelijk een stuk rustiger.

Berdien: "Ik weet het ook." Ze tekent (blind) zonder te kijken een onregelmatig stijgende en dalende lijn in haar pakket. Bij de klassikale bespreking van blz. 21 liet de docent een leerling het bord langzaam omhoog duwen, terwijl hij (blind) een stijgende en dalende lijn tekende. Hiermee wilde hij illustreren hoe een laboratorium-apparaat een grafiek tekent. Op Berdien heeft dat kennelijk indruk gemaakt, want zij imiteert die werkwijze, hoewel die werkwijze ongeschikt is in deze situatie.

Ze vervolgt: "Zien jullie? Mijn hand heeft dit gedaan."

Colette: "Hè? Mag je niet kijken?"

Berdien: "Nee, je mag niet kijken. Je hand moet het doen."

Tasja heeft inmiddels dezelfde werkwijze gevolgd.

Berdien: "De mijne is niet mooi."

Tasja: "De mijne ook niet."

Colette: "Waar staat dat dan?" Dat je niet mag kijken staat inderdaad nergens.

Berdien: "Dat heeft meneer toch zelf eens een keer voorgegaan."

Colette lacht en gaat nu ook maar overstag. De docent komt erbij. Berdien vraagt heel trots of haar grafiek goed is: "Ik heb het zó (ze sluit haar ogen en maakt een tekenende beweging met haar hand) gedaan."

Het groepje is door toedoen van Berdien het spoor volledig bijster. De docent probeert hen weer op weg te helpen.

L.: "Nee, dat is niet goed."

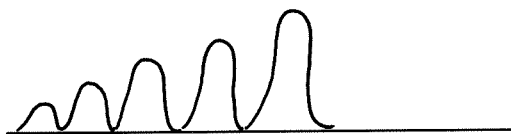
Ik betwijfel of de docent doorheeft wat Berdien bedoelt.

L.: "Als jij op een schommel zit, wat gebeurt er dan?"

Berdien: "Dan ga je heen en weer."

L.: "Een schommel gaat toch zo." Hij maakt met de hand een beweging van een schommel.

Tasja heeft inmiddels een tekening gemaakt. Die ziet er als volgt uit: (De horizontale lijn is niet de x-as. Zij heeft die lijn getrokken om aan te geven dat de schommel steeds op dezelfde afstand van de grond komt.)



L.: "Dit kan. Moet dit (hij wijst de diepste punten aan) altijd even hoog zijn?"

Berdien: "Nee."

Tasja: "Ja, want je komt telkens op dezelfde hoogte terug."

Berdien: "Ja, maar je kan hoger komen."

Hier ontstaat waarschijnlijk verwarring m.b.t. het woord 'hoog'. Bedoeld wordt met 'hoog', het diepste punt, terwijl Berdien waarschijnlijk de hoogste punten bedoeld.

L.: "Zij zegt dat je telkens weer op dezelfde hoogte terugkomt. Is dat zo?"

Tasja: "Alleen bij de grond."

L.: "Dus moet dit (de diepste punten) altijd even hoog van de grond af?"

Berdien: "Nee."

Colette: "Ja, natuurlijk."

Tasja: "In het midden wel."

L.: "Waarom? Toe eens, Colette?"

Colette: "Nou omdat je steeds op dezelfde hoogte bij de grond komt."

L.: "Hoe hoog is dat ongeveer bij een schommel?"

Colette: "Dat is verschillend." Ze wijst aan dat de hoogte van een schommel ongeveer overeenkomt met de hoogte van een stoel.

L.: "Ja, stoelhoogte. Dat is goed. En als een schommel naar beneden komt, komt hij steeds op dezelfde hoogte uit."

Daarna loopt de docent weg.

Colette: "Dat had ik dus typisch niet. Effe gummen hè!" Erna, Colette en Berdien gummen hun grafieken uit. Met een liniaal trekken ze een rechte lijn, die parallel aan, maar hoger dan de x-as loopt. De grafiek komt op geen enkele plaats beneden deze lijn. De grafieken zijn identiek aan de grafiek van Tasja: de 'pieken' lopen langzaam op, de 'dalen' zijn op gelijke hoogte. Zowel de pieken als de dalen lopen bol.

Berdien's aanvankelijke poging laat een globale op- en neergaande beweging van de grafiek zien. Haar gedachtengang bleek echter niet correct. Als de docent zich bij het groepje voegt, valt op dat hij onmiddellijk toestuurt naar het precies tekenen van de grafiek: ".....als een schommel naar beneden komt, komt hij steeds op dezelfde hoogte uit." Maar Tasja had die aanwijzingen in feite niet nodig. Zij was zelf al tot die conclusie gekomen, getuige de horizontale lijn die zij getekend had. Verder getuigt Tasja ervan in nog een ander opzicht eerder precies dan globaal te werken. De pieken lopen nl. heel langzaam op, hetgeen mijns inziens betekent, dat de ervaring van het-op-gang-komen van de schommel nauwgezet grafisch vertaald is.

Een dag later: 8-12-1983.

Het begin van de les. De docent bespreekt de schommelopdracht klassikaal na. De aanwijzing in de docentenhandleiding, i.c. de confrontatie van de verschillende groepsoplossingen, neemt hij heel serieus. (Tijdens het groepsworkshop liep hij steeds van groepje naar groepje en – naast het begeleiden van de groepjes – registreerde hij welke fouten veelvuldig voorkwamen en welke verschillen in oplossingen optraden).

De klassikale bespreking verliep als volgt:

L.: "En toen kwam daar onderaan dat beroemde praatje over dat schommelen. Ik heb een ding opgemerkt bij jullie, en trouwens ook in andere klassen wel. Kijk, je kan een schommel van voren bekijken, maar je kan een schommel ook overdwars bekijken" (eerst maakt hij met de hand de bewegingen die bij de betreffende opstelling behoren, daarna tekent hij datgene wat je ziet vanuit de twee opstellingen op het bord). Hij begint met de 'overdwarse' beweging.



L.: "Deze figuur gaat naar beneden en weer naar boven. Blijft deze beweging de hele tijd zo?"

Klas in koor: "Nee."

L.: "Waarom niet?"

John: "Hij gaat steeds harder, dus dan komt tie ook hoger."

L.: "Dus als hij zichzelf vaart geeft, dan komt hij hier (linker top in figuur) hoger en daar (rechter top in figuur) hoger. Als hij zich nou uit laat vieren, dan zakken die hoogste punten weer. Wat valt jullie op als ik die beweging maak? Eén ding is altijd hetzelfde..."

Jan: "Hij gaat omhoog, komt omlaag, gaat weer omhoog..."

L.: "Ja, maar wat blijft altijd hetzelfde? Of hij nou hard of langzaam gaat?"

Marcel: "De beweging."

Berdien: "Nou, als hij naar beneden gaat, komt hij altijd op dezelfde plek."

L.: "Op dezelfde...?"

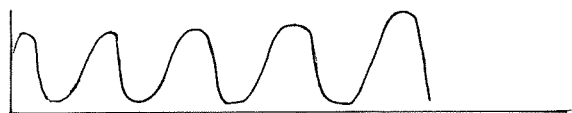
Berdien: "Plek, uh hoogte."

L.: "Ja. Op dezelfde hoogte. Hier (wijst naar het diepste punt in de figuur) dat stukje, deze hoogte blijft altijd gelijk. En nou is de bedoeling van die grafiek, dat wat ik hier doe: over elkaar heen tekenen, anders tekenen: nl. achter elkaar. Dus iemand gaat in die schommel zitten en die begint. Hij gaat naar beneden en weer omhoog. En nou komt het: hij gaat weer naar beneden en weer omhoog en zo zou je een hele tijd door kunnen gaan (hij tekent al pratend de volgende grafiek op het bord).



En dit (wijst naar de dalen in de grafiek) is altijd dezelfde afstand tot de grond. En hier (y-as) staat de afstand tot de grond en hier (x-as) staat de tijd.

Selwijn: "Wij hebben het anders gedaan. Want als je boven bent, dan blijf je als het ware even stil hangen. En daarom hebben wij het met een boogje gedaan" (zie grafiek hieronder).



L.: "Nou, maar dat is zo'n klein stukje. Dat duurt zo kort. Je bent boven en je gaat ook weer naar beneden. Je kunt niet zien dat de schommel op het hoogste punt even blijft hangen. Door de zwaartekracht gaat de schommel direct weer naar beneden."

Edwin: "Zoals Selwijn hadden wij het gisteren tijdens het groepswerk ook en dat mocht niet."

L.: "Ik heb niet gezegd dat het niet mocht. Maar jullie hadden dit (een grafiek met spitse punten boven en onder en erg hoog). Mijn kritiek op jullie grafiek was, dat ik vond dat de grafiek niet zo hoog en meer afgeplat moest zijn."

Wat opvalt is, dat zowel de docent als de leerlingen, heel precies gekeken hebben. Er wordt gesproken over het constant terugkeren van de schommel op dezelfde afstand van de grond.

Er wordt gesproken over het steeds hoger worden van de pieken en terloops komen de aanduidingen bij de assen ter sprake: op de x-as: de tijd, en op de y-as: de afstand tot de grond.

Selwijn trekt de juistheid van de grafiek (de spitse punten) van de docent in twijfel. Zijn groepje heeft zeer precies gekeken, waarmee de discussie die in een Amsterdamse brugklas begon, ook in Deventer de kop opsteekt. In de SLO-docentenhandleiding stond: "Veel leerlingen vallen hierbij weer terug op hun ervaringen...". Blijkbaar zijn de ervaringen van de leerlingen en hun kennis van een wiskundig rijke context als de schommel, zo goed inleefbaar en vertaalbaar, dat dit leidt tot zeer precieze antwoorden.

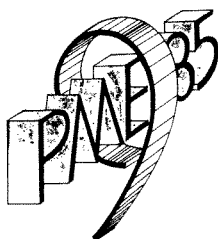
Helaas doorziet ook deze docent niet, net als zijn Amsterdamse collega, dat de spitse punten in de top van de grafiek op z'n minst dubieus zijn. Daarom zou het aanbeveling verdienen, als in de docentenhandleiding méér gezegd zou worden over deze ingewikkelde opdracht dan nu het geval is. Want als leerlingen de sprong in het diepe kunnen maken, hoef je hen toch niet nodeloos lang te laten droogzwemmen.

Ik heb in dit artikel willen aantonen dat leerlingen in staat zijn de schommelopdracht redelijk precies te kunnen oplossen. Daarom zou ook de docent beter voorbereid moeten worden op datgene wat hij in een klassesituatie kan verwachten.

(1) Samen met Rijkje Dekker, Dirk van der Ploeg en Jan Terwel werk ik bij de Vakgroep Onderwijskunde Utrecht (VOU) in het SVO-project: "Interne Differentiatie wiskundeonderwijs 12-16".

Middels onderzoek ondersteunen wij het ontwikkelingswerk van de projectgroep "Wiskunde 12-16" van de Stichting voor de Leerplanontwikkeling. Een van de experimentele onderwijsleerpakketten dat wij onderzocht hebben is "Grafiekentaal".

Ons tweede interimrapport verschijnt in maart 1985 en is te verkrijgen bij de Vakgroep Onderwijskunde van de Rijksuniversiteit Utrecht.



De jaarlijkse conferentie van de International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME) zal in 1985 gehouden worden in Nederland en wel van 22-26 juli te Noordwijkerhout.

Deze IGPME bestaat uit onderzoekers uit een groot aantal landen. Het programma omvat plenaire lezingen, werkgroepen en korte voordrachten.

Inlichtingen en 2nd announcement kunnen worden verkregen bij:

Vakgroep OW & OC,
t.a.v. Mevrouw B. Dekker, RUU,
Tiberdreef 4,
3561 GG UTRECHT.