

Snelheid in grafieken (2)

L. Streefland

OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

Wie aan kinderen functies wil leren, zal hen in de eerste plaats in staat moeten stellen zelf verbanden te construeren, d.w.z. afstand leren beschouwen als grootte die in de tijd verandert, snelheid leren relativeren met de tijd, vloeistofhoogte in flessen in relatie tot de inhoud zien en omgekeerd. Niet als voorschriften van buitenaf, maar als probleemoplossende constructies vanuit de kinderen zelf.

Summary

When we teach our students (around 13 years) functions, we have to give them ample opportunities to discover relations. That means for instance: looking at distance as a magnitude changing in time, to relate speed to time, to relate the height of a fluid to the content of the bottle. The children have to construct their own solutions. This is not the usual classroom-practice however.

Overzicht

In de eerste aflevering over deze kwestie (1) werd afgerekend met de misleidende invloeden op snelheidsbeleving. (Kwalitatieve) grafieken werden ingezet om het begrip snelheid te zuiveren van dergelijke franje. Eveneens dienden de grafieken om te komen tot een 'functie-in-de-tijd' standpunt. Daarbij werd de behoefte aan meer numerieke precisie gewekt. Die weg gaan we nu op.

Er lijken in eerste instantie betrekkelijk weinig nieuwe inzichten te worden toegevoegd aan wat reeds werd aangedragen. Dat is maar schijn, want de vraag naar hoe snelheid verandert, brengt een nieuw begrip binnen bereik. Daar waar de vraag naar de afgelegde afstand rijst, doemen bovendien nieuwe wiskundige horizonten op, die voor de meeste leerlingen wel altijd dit perspectief van onbereikbaar verschieft zullen blijven behouden. Het gaat om de oppervlakte onder de kromme die de afgelegde afstand vertegenwoordigt, een kwestie waarvan we eerder stelden dat deze niet zo eenvoudig valt in te zien (2).

Route, snelheidsverhalen en remmen

Route

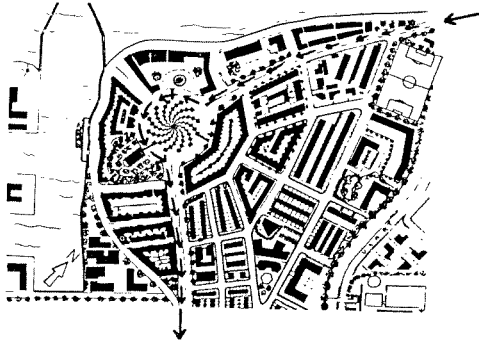
We volgen vanaf zeker tijdstip een door Breukelerdam rijdende auto. Terwijl vanaf dat moment de tijd begint te lopen wordt de snelheid grafisch opgetekend. Daarbij valt heel wat te vertellen.

We volgen vanaf zeker moment een rijdende auto door Breukelerdam:
De snelheidsgrafiek ziet er zo uit:

① Schrijf er een snelheidsverhaal bij:

② Welke roete hoort bij deze rit. Probeer een passende roete op de plattegrond te vinden. Teken:

1. Bijna 15 seconden rijdt de auto met een snelheid van 70 km per uur. Dan valt de snelheid met schommelingen terug tot 35 km per uur. Dit duurt ook bijna 15 seconden. Dan neemt de snelheid weer wat toe om zich vervolgens op 50 km per uur vast te zetten.
2. Gelet op de grafiek en dit verhaal, moeten er in de route twee prettige stukken zitten die constante snelheden toelaten. Op één van die stukken kan zelfs 70 km worden gereden. Dit routedeel ligt voor de hand, waaruit zich dan de hele route laat raden.

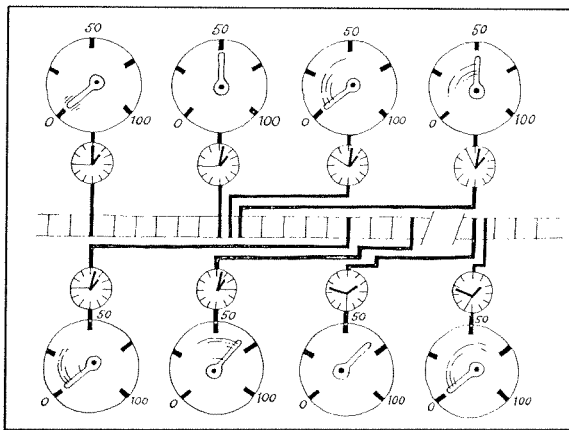


Klopt de route wat de afstanden betreft?

(In ruim 10 seconden worden bij een 'vaart van 70' enkele honderden meters afgelegd. Vergelijk met de sprinter: 100 m in 10 seconden).

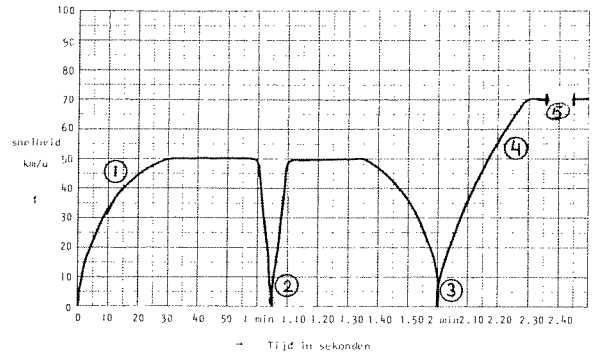
Snelheidsverhaal 1

We laten vervolgens klok, tijdbalk en snelheidsmeter in eendrachtige samenwerking een snelheidsgeschiedenis spelen. Hoe luidt dit beeldverhaal in woorden?



1. Stilstand op slag van vertrek. (Wijzer!).
2. Eén minuut later rijdt de auto vijftig.
3. Vijf seconden daarna zakt de snelheidsmeter plotseling terug naar nul. (Oorzaak?).
4. Vijf seconden later: de auto rijdt weer 50.
5. Veertig seconden later. De auto komt juist tot stilstand. (Wijzer). Stoplicht?
6. Dertig seconden later bereikt de auto een snelheid van 70 km per uur.
7. Dat duurt een poos, want drie kwartier later is dit nog steeds zo.
8. Tenslotte komt de auto in vijf seconden tot stilstand.

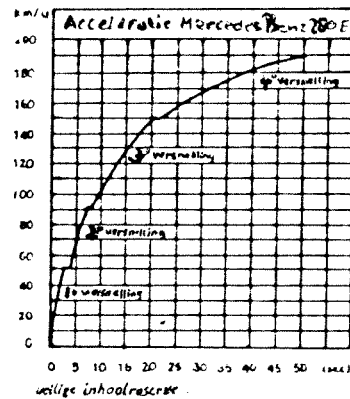
Het omzetten van voorgaand verhaal in een grafisch beeld is niet eenvoudig, temeer daar de grafiek door de gegevens nog lang niet tot in alle details is voorgescreven. Bijvoorbeeld:



Het optrekken naar 50 km (1) kan zich in kortere tijd voltrekken. Er kan sprake zijn van stilstand van enige duur (2) en (3). Het optrekken naar 70 km kan minder tijd vergen. En voor de drie kwartier dat 70 km werd gereden moet nog een oplossing worden gevonden (5), omdat de tijds hiervoor te kort schiet. Ook het in vijf seconden tot stilstand komen dreigt buiten de grafiek te vallen. (Kan dat wel, zo snel remmen?).

Snelheidsgrafiek 2

Een auto met veilige inhaalreserve. Als dat maar goed gaat met zulke snelheden.



Hoe hard kan de auto eigenlijk? Een kwestie van grafiek lezen. Wat valt er allemaal in te zien?

Toenemende snelheid, schakelen (bij welke snelheden?), maximum snelheid, snelheidstoename in het begin en boven de 150.

Wat zou nu 'veilige inhaalreserve' betekenen?

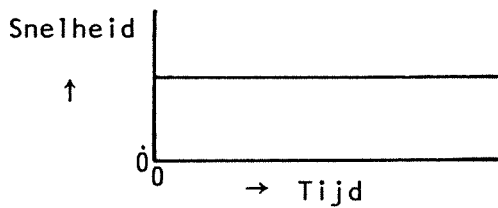
Deze activiteit kan in het bredere verband van verkeers- en milieukwesties worden besproken. Is het – bijvoorbeeld – wel nodig dat er (nog) zulke auto's gemaakt worden?

De kwestie van de versnelling kan hier eveneens worden opgepakt, op dezelfde kwalitatieve manier als in de eerste aflevering het begrip snelheid zelf benaderd werd. De grafiek van de optrekkende Mercedes

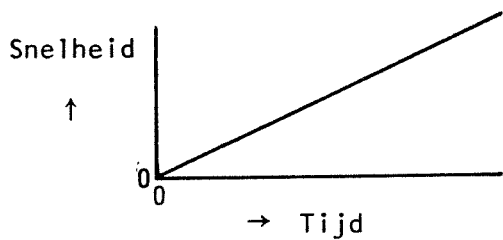
wordt daartoe aan een nadere analyse onderworpen. Deze laat zien dat de auto steeds sneller gaat. De vraag is nu: dit 'steeds sneller' hoe gaat dat in z'n werk?

- Verloopt dit met horten en stoten?
- Zit er regelmaat in of juist niet?
- Is de toename of groei van de snelheid (de versnelling) steeds dezelfde of zijn daarin schommelingen?
- Vergelijk het toenemen van de snelheid in de eerste tien seconden eens met de snelheidstoename van 40 tot 50 seconden; wat merk je op? (Met hoeveel per seconde neemt de snelheid eerst (gemiddeld) toe; en later?).

We zetten eens een aantal gevallen op een rij.

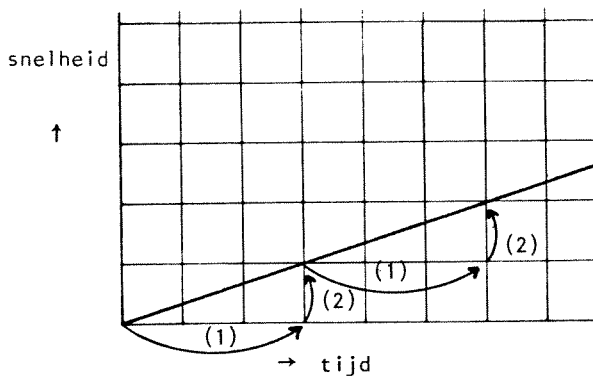


De snelheid is steeds hetzelfde, ze neemt niet toe of af. Er is geen versnelling en geen vertraging.



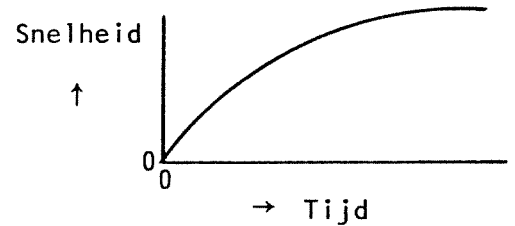
De snelheid wordt steeds hoger, neemt steeds toe. Dit gebeurt wel regelmatig. Er zitten geen kronkels in de grafiek.

Op een ruitjesbord of op ruitjespapier kan zoiets ook goed zichtbaar gemaakt worden.

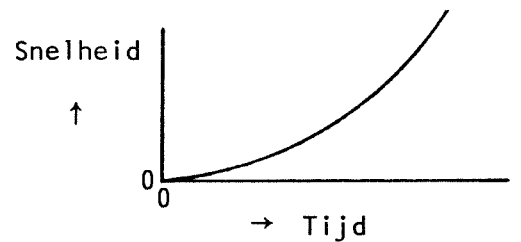


Bij gelijkmatig toenemende snelheid komt er in dezelfde tijd (1) steeds dezelfde snelheid (2) bij. Hierdoor wordt ook duidelijk, dat bij afbuigen van dit grafisch verloop de regelmaat in de toename van de snelheid verstoord is.

Nog enkele gevallen:



De grafiek voor de Mercedes buigt steeds meer af naar beneden. Bovendien zitten er eigenlijk knikken in (schakelen). De snelheid neemt dus wel toe, maar er komt niet steeds hetzelfde bij. De versnelling is niet gelijkmatig.

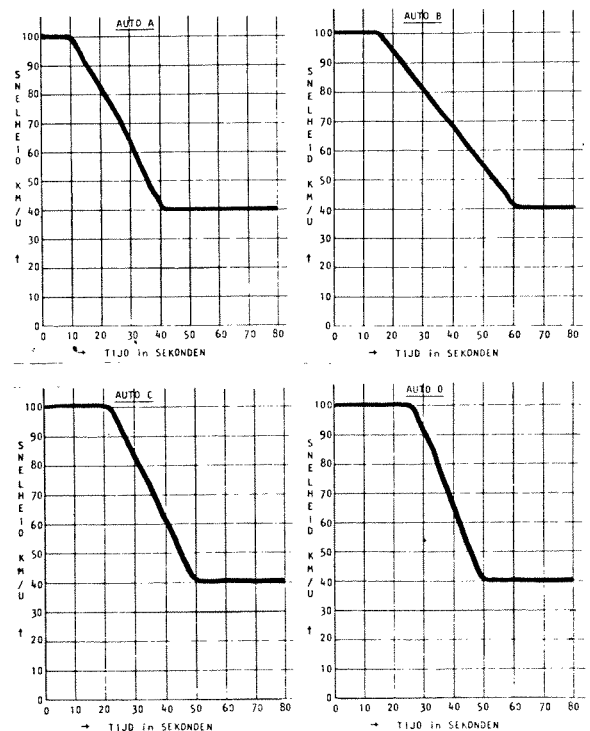


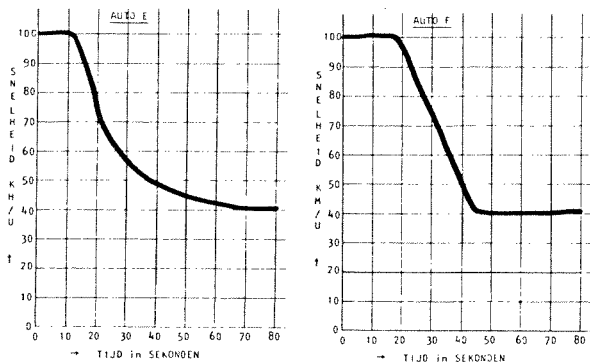
Als de grafiek omhoog buigt, neemt de snelheid al maar toe. Er wordt steeds meer versneld. De versnelling neemt (ook) steeds meer toe.

Remmen

Tenslotte kunnen we, wat dit gedeelte betreft, de leerlingen bijvoorbeeld nog de volgende snelheidsgrafieken van auto's voorleggen.

Er is telkens sprake van dezelfde terugval in snelheid, nl. van 100 naar 40 km per uur. Achter de grafieken steekt het volgende probleem.





Dit zijn snelheidsgrafieken voor zes verschillende auto's. Overeenkomst? Oorzaak?

Met de snelheidsmeter van iedere auto was een apparaatje verbonden, dat zó werkte: Bij een snelheid van 100 km/uur werd het apparaatje ingeschakeld dat dan onmiddellijk begon met het tekenen van een grafiek van de snelheid. Even na het schakelen werd er afgeremd. (Kwam de snelheid eenmaal onder 40 km/uur, dan tekende het apparaat een horizontale lijn en deed dus net alsof de snelheid dan constant 40 km/uur was).

Welke auto heeft de beste remmen? (3)

Merk op dat de tijd tussen het inschakelen van het apparaat en de aanvang van het remmen niet steeds hetzelfde is. Het is niet denkbeeldig dat de leerlingen zich hierdoor laten misleiden. Is dit obstakel eenmaal opgeruimd, dan komt van de eerste vier auto's auto D voorlopig als beste uit de bus, althans deze remde het snelst. Heeft D nu ook de beste remmen? (Doet het gewicht van de auto er ook nog wat toe?).

E en F worden er ook nog even bijgenomen. E is een buitenbeentje. Wat kan er gebeurd zijn? Eerst hard remmen en daarna wat minder? Of eerst goed werkende remmen en vervolgens niet meer?

Hoe het ook zij, auto D blijft zijn koppositie behouden.

Bij vijf van de zes auto's blijkt het afremmen heel regelmatig te verlopen. Eventueel kan de (gemiddelde) vertraging voor deze auto's per tien, vijf of één seconde(n) uit de grafieken worden afgeleid.

Het voorgaande stellen we in dienst van het probleem van de Amsterdamse metro.

Amsterdamse Metro

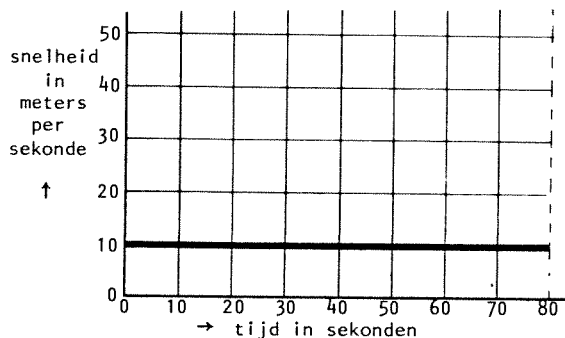
Informatie: De metro rijdt met een gemiddelde snelheid van 36 km/u. Bij het vaststellen van dit gemiddelde zijn ook de stoptijden meegerekend.

Hoe zal de grafiek van de gemiddelde reissnelheid er gaan uitzien?

We gaan een rit bekijken van de metro tussen twee stations die 800 m van elkaar liggen. Hoe richten we dan de grafiek in? Snelheid in kilometers per uur of in meters per seconde? Hoe snel is 36 km/u. Hoeveel m per seconde is dat?

36 km	36.000 m	360 m	10 m
1 uur	3600 sec	36 sec	1 sec

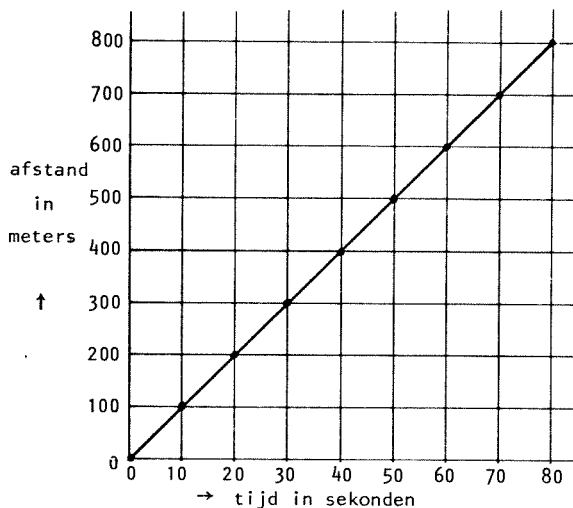
De grafiek van de gemiddelde reissnelheid wordt samengesteld.



Stemt deze overeen met de eerder gedane voorspelling? Hoe lang duurde de rit?

Welke afstand rijdt de metro de eerste tien seconden, de tweede tien seconden enz.?

Afstand (m)	0	100	200	-----	800
Na ... sec	0	10	20	-----	80

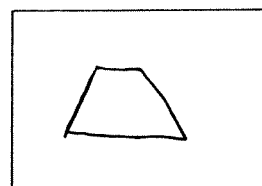
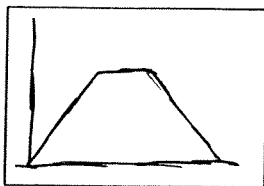


In werkelijkheid verloopt een metrorit natuurlijk heel anders. 36 km/u is voor een stad overigens wel een vrij hoog gemiddelde. Om dit te kunnen halen moet de metro tussen twee stations een topsnelheid van 72 km/u halen. Hoe verloopt nu zo'n rit?

We bekijken dit eerst zonder getallen.

1. Vanaf de start schokvrij optrekken tot de topsnelheid.
2. Vervolgens voortgaan met die topsnelheid gedurende enige tijd.
3. Schokvrij afremmen tot stilstand. Dit duurt net zo lang als het schokvrij optrekken.

Voorspel het verloop van de snelheidsgrafiek en teken deze.



Door de symmetrie in het verhaal en voorgaande ervaringen kunnen de leerlingen deze opdracht aan. Door het puur kwalitatieve kan de aandacht zich onbelemmerd op het snelheidsverloop richten.

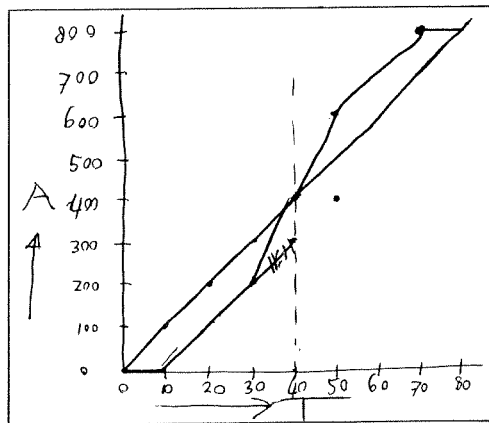
Dan wordt het ritverloop tussen twee stations van getalgegevens voorzien.

Afstand: 800 m. Rit:

- Tien seconden stilstand.
- Eerste 200 m schokvrij optrekken tot 72 km/u in 20 seconden.
- Volgende 400 m. Voortgaan op topsnelheid.
- Laatste 200 m. Schokvrij afremmen tot stilstand in 20 seconden.

Behalve een snelheid-tijd-grafiek wordt er ook één voor afstand en tijd samengesteld. Bij voorkeur gebruiken we opnieuw de grafieken die de leerlingen in een eerder stadium naar aanleiding van de gemiddelde reissnelheid maakten en brengen hierin de nieuwe grafieken in. Uiteindelijk ontstaan dan de volgende beelden:

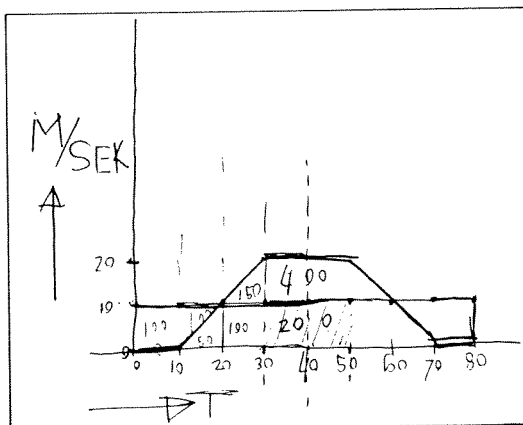
Metro: afstand-tijd



De grafiek toont duidelijk hoe pas halverwege de metro 'op z'n gemiddelde zit'. Daarna loopt hij op z'n gemiddelde uit om de voorsprong aan het eind door stilstand weer prijs te geven.

In de snelheidsgrafieken van de gemiddelde reistijd en de werkelijke rit wordt het voorgaande nogmaals bevestigd. Het geeft een beeld met nog meer zeggingskracht omdat de draaisymmetrie van de afstand-tijd-grafieken nu omslaat in de visueel overtuigender spiegelsymmetrie van de afstand-tijd-grafieken.

Metro: snelheid-tijd



Met behulp van beide grafieken kan het afstandsverloop nogmaals worden nagegaan. De getallen in de grafiek duiden op een poging van twee samenwerkende leerlingen om het afstandsverloop in de snelheidsgrafiek bij te houden. Wellicht heeft de intuïtie postgevat dat de hokjes tussen de grafiek(en) en de tijdas iets met de afgelegde afstand te doen hebben. De deels aangebrachte arcering wijst in deze richting.

We laten deze speculatie verder voor wat ze is en sluiten af ergens gaande op een leertraject waarvoor enkele mijlpalen werden uitgezet. De weg loopt niet dood. Voor het vervolg dient het tracé zich reeds af te tekenen.

Besluit

Op zeker tijdstip wordt het onderwerp *functies* afge-roepen in het wiskundig leerproces van kinderen. Dikwijls is het dan zó, dat het begrip de voorbeelden en opgaven dicteert, passende, gemathematiseerde voorbeelden, gemodelleerd naar volwassen wiskunde die juist met het leerproces beoogd wordt, voorbeelden waarin de verbanden al gelegd zijn, waarin standpunten voor de leerling reeds zijn ingenomen en stellingen betrokken; voorbeelden waaraan meestal weinig meer te leren valt, maar hooguit nog wat na te doen. Een uiterst essentiële fase wordt dan overgeslagen (en dit geldt niet slechts functies).

Wie aan kinderen functies écht wil leren, zal hen in de eerste plaats de gelegenheid moeten geven zich op functiestandpunt te stellen, zelf verbanden te construeren, d.w.z. afstand leren beschouwen als grootte die in de tijd verandert, snelheid leren relativeren met de tijd, vloeistofhoogte in relatie tot de inhoud leren zien en omgekeerd. Niet als voorschriften van buitenaf, doch als probleemoplossende constructies vanuit de kinderen zelf.

Voor het zich stellen op functiestandpunt is het vermogen tot relativeren dus een voorwaarde. Bij het begrip versnelling dat even werd 'aangeraakt' vragen we in feite van de leerlingen om iets dat op zichzelf al relatief is, nl. snelheid, nogmaals te relativeren. Dit te doen inzien bereikt men m.i. niet door 'één-meter-per-seconde-kwadraat' als eenheid van versnelling te definiëren en vervolgens tot het maken van sommen over te gaan.

Zich op relatief standpunt leren stellen, daar ging het dus om in voorgaande artikelen 'Grafieken inhoud geven' en 'Snelheid in grafieken' en niet in de eerste plaats om de grafieken zelf, al was hun rol in meerdere opzichten een beslissende.

Literatuur

- (1) Snelheid in Grafieken (1), Nwe Wiskrant, jrg. 4 nr. 1.
- (2) Zoals eenvoudig valt in te zien..., Nwe Wiskrant, proefnummer, mrt. '81.
- (3) Naar een idee van Claude Janvier, Universiteit van Quebec, Canada.