Economie zonder wiskunde en wiskunde zonder economie?

J.R. ten Hove
Faculteit der Economische Wetenschappen, R.U. Groningen

Samenvatting

De auteur geeft enkele voorbeelden van wiskunde zoals die in de economie wordt gebruikt. Zij besteedt daarbij vooral aandacht aan de rol van de wiskunde waarop deze wordt gepresenteerd aan de leerlingen. Daarbij worden de problemen die leerlingen kunnen ondervinden aangeduid.
Wiskunde A speelt in deze beschouwing een belangrijke rol.

Summary

The introduction of a new math-curriculum for non-mathematical majors at pre-university level inspired the author: she discusses the role of mathematics in economics, one of the increasing member of disciplines where mathematics plays an important role. The way this kind of mathematics is presented to the students and the problems encountered by the students are in the points the author focusses on.

Inleiding

Sinds de invoering van het vak algemene economie in het voortgezet onderwijs is het aandeel van de wiskunde daarin een belangrijk punt van discussie. Naar aanleiding hiervan is het examen voor HAVO en Atheneum dan ook gewijzigd. Was het in de eerste jaren mogelijk dat een leerling met een redelijke algemene ontwikkeling en wiskunde in het vakkenpakket, een voldoende kon scoren op het examen economie, sinds 1981 vormen de economische aspecten van de wiskundige modellen het zwaartepunt van het examen. (1)

Hoewel er grote meningsverschillen bestaan over de rol van wiskundige modellen, zijn de meeste economen het er wel over eens dat de wiskunde in dienst moet staan van de economie. De wiskunde moet de economische theorieën en de werking daarvan verhelderen. Dit betekent dat de leerlingen de taal van de wiskunde moeten kunnen verstaan en dat ze zich verstaanbaar moeten kunnen maken in deze taal. Niet alleen een passieve beheersing, in de zin van het kunnen uitvoeren van algoritmen, maar ook een actieve beheersing van de wiskunde is noodzakelijk. Dit houdt onder meer in dat de gebruikte begrippen en operaties voor de leerlingen ook werkelijk betekenis hebben en dat ze ermee moeten kunnen manipuleren. Met spijt moet geconstateerd worden dat dit vaak niet het geval is (2).

Een belangrijke vraag is: hoe komen leerlingen zo ver dat ze in staat zijn de wiskunde, die de economische theorie duidelijk moet maken, begrijpend te hanteren?

Het zuiver trucmatig hanteren van wiskundige technieken beschouw ik niet als begrijpend wiskundig bezig zijn. Het is wel nodig dat leerlingen bepaalde handelingen automatiseren, zodat ze niet steeds hetzelfde denkwerk hoeven te verrichten, maar ze moeten wel weten waar ze mee bezig zijn.

In dit artikel zal het volgende aan de orde komen:

1. Middels enkele voorbeelden wordt een indruk gegeven van de wiskunde die veel in de (micro-) economie wordt gebruikt.
   De rol die deze wiskunde speelt in de economische context en de wijze waarop ze aan de leerlingen wordt gepresenteerd, zal daarbij worden besproken.
2. Problemen die leerlingen tegen kunnen komen worden aangeduid en in verband hiermee worden twee onderwerpen nader bekeken.

Omdat de vernieuwingen in het wiskundeprogramma interessante ontwikkelingen vertonen, zal gebruik worden gemaakt van in het kader van de HEWET ontwikkeld materiaal.

Het verhaal is geschreven rond enkele voorbeelden. Omdat het bedoeld is voor zowel economiedocenten als wiskundedocenten, kan een uitwerking van de voorbeelden soms wat uitvoerig lijken. Ik hoop dat de essentie voor beide groepen lezers duidelijk wordt.

Enkele voorbeelden

Voorbeeld 1.

Dit voorbeeld is een opgave uit "Functies en grafieken" van Martin Kindt en Jan de Lange Jzn, geschre-

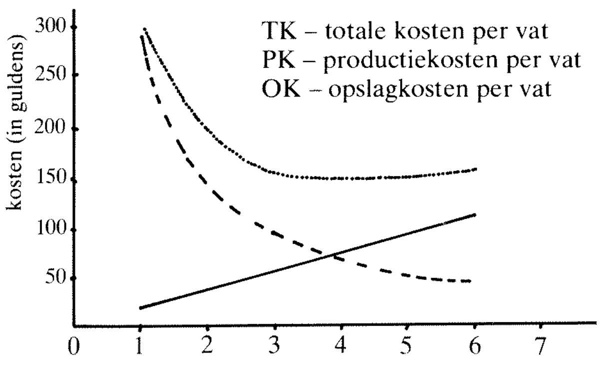
ven in het kader van de experimenten met de HEWET. (1983; 2e herziene versie).
De opgave behoort tot een serie van zes opgaven, waarin voorbeelden worden gegeven van wat in de wiskunde een functie wordt genoemd (3):

Een producent van vaten sherry heeft o.a. te maken met produktie- en opslagkosten. Hoe meer vaten hij produceert, des te lager de produktiekosten per vat zijn, maar daar staat tegenover dat de opslagkosten per vat toenemen.
De volgende tabel verduidelijkt dat.

aantal vaten	*produktiekosten per vat (in guldens)*	*opslagkosten per vat (in guldens)*
1000	*280*	*20*
2000	*142*	*40*
3000	*94*	*60*
4000	*70*	*80*
5000	*55*	*100*
6000	*47*	*120*

a. Teken een grafiek van de produktiekosten per vat afhankelijk van het aantal te produceren vaten.
Zet op de horizontale as het aantal vaten uit en op de verticale as de kosten.
b. Teken in hetzelfde plaatje een grafiek van de opslagkosten per vat.
c. Teken een grafiek van de totale kosten per vat.
d. Bij welk te produceren aantal vaten schat je dat de totale kosten het laagst zijn?

Vanuit economisch oogpunt is het belangrijk om aan te geven wat de afhankelijkheidsrelatie is tussen de variabelen: de kosten zijn afhankelijk van de hoeveelheid te produceren goederen.



figuur 1

Zoals eerder is opgemerkt, is dit vraagstuk afkomstig uit een leerlingenboek over functies en grafieken.
De leerlingen worden daarin geconfronteerd met een grote diversiteit aan functies en de grafieken daarvan, uitgaande van concrete situaties in verschillende vakgebieden (3). Dat geeft hen de mogelijkheid om een goed functionerende mentale voorstelling te vormen van dit wiskundig onderwerp.
De opbouw van het vraagstuk komt overeen met de gangbare opbouw van dergelijke vraagstukken in de economieles: verbale beschrijving – tabel – grafiek – conclusie. De inhoud is echter dermate afwijkend, en soms zelfs onlogisch, dat, zowel leerlingen mét economie als leerlingen zonder economie in hun pakket, in verwarring kunnen raken, zodat een goede begripsvorming juist geblokkeerd wordt.
Op drie punten kan dit probleem ontstaan:

1 De termen.
De kosten zijn gegeven per vat. Gemiddelde kosten dus. Een econoom zou i.p.v. TK, PK en OK zeggen: GTK, GPK en GOK, terwijl daarnaast in de economie ook de begrippen totale kosten, produktiekosten en opslagkosten gebruikt worden als het niet over gemiddelden gaat.
2 Kostensoorten.
Het kader waarbinnen de genoemde kostensoorten worden gehanteerd, wordt gekenmerkt door een tweedeling: variabele kosten (VK) en constante kosten (CK). Het criterium bij deze indeling is de afhankelijkheid van de produktieomvang, in dit geval dus het aantal te produceren vaten. De constante kosten zijn onafhankelijk van de produktieomvang. De gemiddelde constante kosten zullen dus lager worden naarmate de produktieomvang hoger is. GCK zal zich kunnen gedragen als PK (in de opgave). De produktiekosten zijn echter variabele kosten, terwijl de opslagkosten constante kosten zijn. (Vgl. de grafieken in de opgave).
3 De opslagkosten.
Meestal is het zo, dat de opslagkosten minder dan twee keer zoveel zijn als het aantal vaten verdubbelt. De opslagkosten zijn hoogstens dan gelijk en waarschijnlijk lager naarmate het aantal vaten hoger is. De grafiek van OK, die zelfs zeer sterk stijgt, is niet erg realistisch.

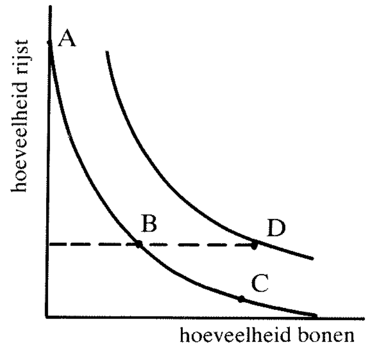
Voorbeeld 2

In de economie wordt veel gebruik gemaakt van isolijnen: tweedimensionale weergaven van driedimensionale grafieken. Wat dit voor lijnen zijn, wat de wiskundige achtergrond is en de wijze waarop ze wordt gebruikt – ook in het voortgezet onderwijs – komt in dit voorbeeld aan de orde.

Een boer uit Thailand verbouwt rijst. Zijn grond is niet geschikt om iets anders op te verbouwen. Om zichzelf en zijn gezin te kunnen kleden en om te kunnen wonen, verkoopt hij het grootste deel van zijn oogst. Per jaar kan hij ongeveer 400 kg rijst reserveren voor eigen consumptie. Dit is het deel van zijn inkomen dat hij kan besteden aan voedsel; zijn budget. Omdat rijst alleen niet voldoende is om in de minimum dagelijkse behoefte aan eiwitten van het gezin te voorzien, moet hij een deel van zijn rijst vervangen door bonen. Hij staat nu voor het volgende probleem: hoeveel rijst moet hij vervangen?
Dit houdt verband met twee vragen:
- wat heeft de boer ervoor over om bonen te krijgen?
- hoeveel bonen krijgt hij voor zijn rijst?

De eerste vraag heeft te maken met de waarde die hij hecht aan de verschillende verhoudingen tussen de hoeveelheden bonen en rijst. Hij hecht meer waarde aan de verhouding 300 kg bonen en 200 kg rijst, dan aan 300 kg bonen en 100 kg rijst. Maar het is heel goed mogelijk dat hij even graag 300 kg bonen en 20 kg rijst heeft als 40 kg bonen en 200 kg rijst. In economische termen luidt de vraag: welk nut kent de boer toe aan de verschillende verhoudingen tussen bonen en rijst? De tweede vraag heeft te maken met de waarden die rijst en bonen hebben op de markt. Oftewel: wat de ruilverhouding is tussen rijst en bonen op de markt.

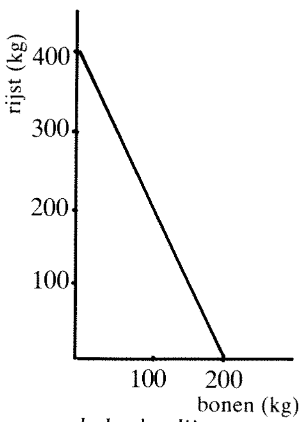
Het onderstaande plaatje is een weergave van een model dat de situatie betreffende de eerste vraag blijkt te kunnen beschrijven. De lijn geeft weer aan welke verhoudingen, bij een gegeven hoeveelheid, de boer hetzelfde nut toekent; het is een isonutslijn, ook wel indifferentiekromme genoemd.



isonutslijnen

figuur 2

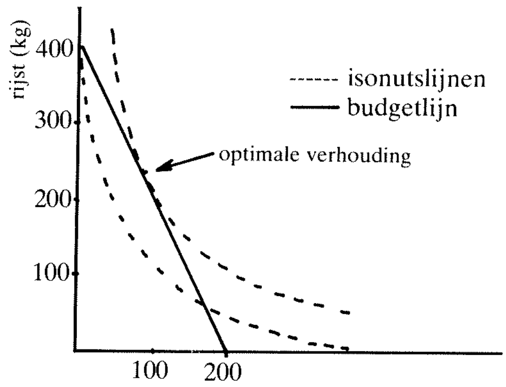
Een, wat simpele, verklaring voor de vorm van de grafiek is als volgt: zolang de boer geen of weinig bonen heeft, zal hij er graag veel voor over hebben om ze te krijgen (van punt A naar punt B). Als hij veel bonen heeft, zal hij zijn rijst duur laten betalen, en veel bonen vragen voor weinig rijst (van punt B naar punt C). Voor hemzelf maakt het niet veel uit welke verhouding hij krijgt: die zijn aangegeven door A, B of C. Punt D daarentegen heeft een hoger nut voor hem. De lijn waar D op ligt is een isonutslijn met een hoger nut.
Zijn keuze zal ook afhangen van wat anderen hem aanbieden. Het model dat de situatie van de tweede vraag beschrijft, gaat uit van een gegeven vaste ruilverhouding tussen bonen en rijst. Bij een gegeven budget van 400 kg rijst en een ruilverhouding van één kilogram rijst tegen twee kilogram bonen, wordt het model weergegeven door de budgetlijn (zie figuur 3).



de budgetlijn

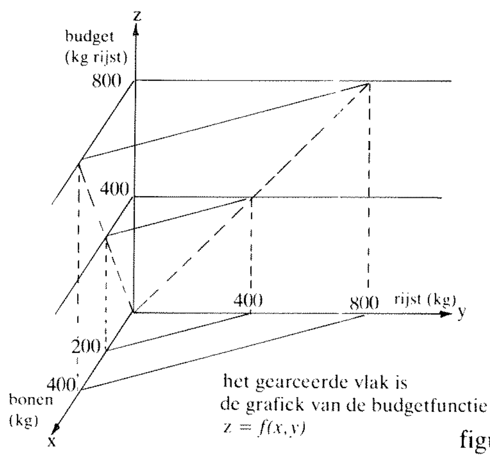
figuur 3

Dus: gegeven een hoeveelheid rijst als budget, dan geeft de budgetlijn aan hoe de rijst besteed kan worden, gezien de situatie op de markt. De budgetlijn is een isokostenlijn.
De voor de boer optimale verhouding wordt gevonden door op een gegeven budgetlijn het punt te vinden met een maximaal nut. Dus door een isonutslijn te vinden die zo ver mogelijk van de oorsprong af ligt en een punt gemeen heeft met de budgetlijn. Dat is de isonutslijn die raakt aan de budgetlijn. Het raakpunt geeft dan de optimale verhouding tussen rijst en bonen weer.



figuur 4

De isonutslijn en de budgetlijn zijn, net als bijvoorbeeld hoogtelijnen, isothermen en isobaren, lijnen die het verband aangeven tussen twee variabelen. Op een heel andere wijze dan in het eerste voorbeeld; er is hier nog een derde variabele in het spel: de grootte van het nut (bij isolijnen) of de grootte van het budget (bij budgetlijnen). De plaats van de isolijn is afhankelijk van de derde variabele.
De grafiek is niet de grafiek van een functie, strikt gesproken. Onder een grafiek, in enge zin, versta ik de verzameling puntenparen $(x,f(x))$ in het platte vlak of in de ruimte, waarbij x origineel is en $f((x)$ het beeld van x onder de functie f. De grafiek van bijvoorbeeld de 'budgetfunctie' is driedimensionaal (zie figuur 5), als gesteld wordt dat het budget (z) afhankelijk is van de hoeveelheden rijst (y) en bonen (x).



figuur 5

De budgetlijnen in het xy-vlak van de figuur vormen een tweedimensionale weergave van de driedimensionale grafiek.

Er is nog een verschil met het eerste voorbeeld: het plaatje functioneert hier als ondersteuning van het verhaal, waarbij het oplossen van de gestelde informatie is weggelaten en relevante informatie sterk naar voren komt.
De betekenis van de punten in het vlak, van de lijnen, van de snijpunten met de assen, van het raakpunt, de plaats van de isolijnen, kortom: de interpretatie van de grafiek staat hier centraal.

Voorbeeld 3.

Marktmechanismen worden in de micro-economie wiskundig beschreven m.b.v. vergelijkingen en functies. Een concrete situatiebeschrijving en probleemstelling is het volgende.

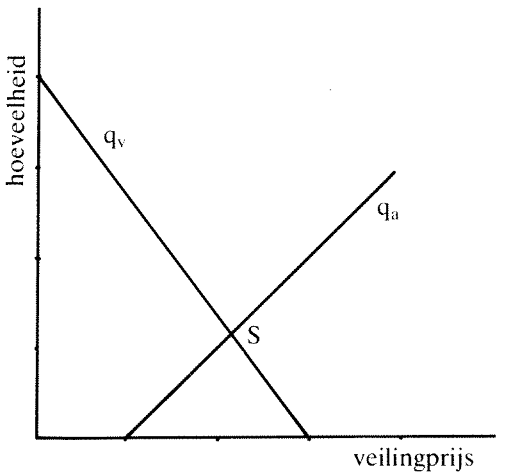
In een dorp op het Groningse platteland is een groentehandelaar gevestigd. Binnen een straal van tien kilometer is er geen andere groenteboer. Het is najaar en de appeloogst is goed. Hij kan probleemloos het hele dorp voorzien van appels. Natuurlijk wil hij er wel op verdienen.
Er is veel vraag naar appels; de mensen hebben genoeg van de smakeloze appeltjes van vorig jaar. Hij besluit om een flinke voorraad op de veiling te kopen. Hoeveel appels moet hij kopen?
In het gebruikelijke model wordt er vanuit gegaan dat er een lineair verband bestaat tussen de hoeveelheid appels die de mensen kopen (q_v, de gevraagde hoeveelheid) en de veilingprijs (p). Deze veronderstelling wordt weergegeven d.m.v. een vergelijking als deze:

$$q_v = -\tfrac{4}{3}p + 4$$

Deze vergelijking beschrijft het gedrag van een consument. Merk op dat naarmate de prijs hoger wordt, de consument minder zal vragen.
Het verband tussen de hoeveelheid appels die de groentehandelaar aanbiedt (q_a) en de veilingprijs (p) is in dit model tevens lineair, bijvoorbeeld:

$$q_a = p - 1$$

Afgezien van het gedrag van de consument zal de handelaar meer willen verkopen, naarmate de veilingprijs hoger is. Dit komt in de vergelijking tot uitdrukking door de positieve coëfficient (+1) van p.
Dit tweetal vergelijkingen wordt grafisch als volgt weergegeven:



figuur 6

Het snijpunt van de twee lijnen heeft een economische betekenis: als de groenteboer niets wil overhouden en toch zoveel mogelijk wil verdienen, dan moet hij de hoeveelheid appels aanbieden die gerepresenteerd wordt door de coördinaten van het snijpunt.
De verbanden tussen de variabelen worden weergegeven d.m.v. vergelijkingen. Echter de rol van de variabelen is niet zo gelijkwaardig als deze representatie suggereert: in deze situatie is sprake van individuele vraag- en aanbod*functies*, waarbij q_v en q_a afhankelijk zijn van p, in tegenstelling tot de collectieve vraag- en aanbodfuncties, waarbij de prijs afhankelijk is van q_v resp. q_a.
Bij een individuele vraagfunctie is sprake van de vraag van één koper, de individuele vraag, terwijl bij de collectieve vraagfunctie q_v de totale vraag van alle kopers tesamen voorstelt. De definitie van de collectieve aanbodfunctie is analoog.

Aan de vergelijkingen is niet te zien hoe de afhankelijkheidsrelatie is, en ook niet aan de grafieken. Want in beide situaties wordt gebruik gemaakt van de genoemde vergelijkingen en voorstellingen. In tegenstelling tot wat in de wiskunde gebruikelijk is, wordt in de economie de onafhankelijke variabele x op de horizontale as óf op de verticale as uitgezet en de afhankelijke variabele $f(x)$ dan op de verticale as óf op de horizontale as.
Economisch gezien is de afhankelijkheidsrelatie tussen de variabelen van belang. Voor de wiskundige berekeningen is deze nuancering vaak onhandig, en daarom wordt gebruik gemaakt van (stelsels) vergelijkingen. Voor leerlingen kan dit switchen grote problemen opleveren, zeker als dit ongemerkt gebeurt.

Problemen waar leerlingen mee te maken kunnen krijgen

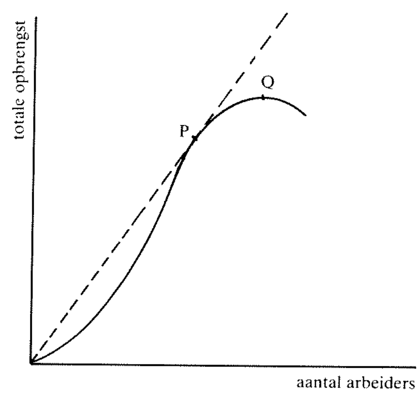
Verschillende soorten grafieken, functies en vergelijkingen zijn belangrijke middelen om verbanden tussen variabelen te beschrijven, te verhelderen, te expliciteren welke factoren een rol spelen in de modellen, problemen op te lossen en begripsvorming te stimuleren.
In de voorbeelden zijn de volgende knelpunten al min of meer ter sprake geweest:

- Het maken, lezen en interpreteren van grafieken blijkt vaak moeilijk te zijn voor leerlingen. Met name de stap tussen een verbale probleemstelling en de vertaling naar tabellen en grafieken, maar ook naar algebraïsche beschrijvingen is erg groot. Het belang van de zogenaamde vertaalvaardigheden wordt door vele onderzoekers erkend (4, 5 en 6).
- Het gebruik van functies én vergelijkingen en het goochelen met verschillende oplossingstechnieken, kan verwarrend werken voor leerlingen.
- De verschillen in benadering van een economisch probleem door wiskundigen en door economen werken ook verwarrend, zoals bij voorbeeld 1 is aangegeven. Zowel het leggen van verbanden met wiskunde in de economieles, als verbanden met economie in de wiskundeles, komt hier in het gedrang.

In het nu volgende zullen de gesignaleerde problemen besproken worden, en zal gezocht worden naar didactische oplossingen van de problemen.
Om de verschillen in aard van de problemen te onderscheiden en aan te sluiten bij hetgeen in de voorbeelden tot uiting komt, is een tweetal onderwerpen gekozen: 'grafieken', en 'functies en vergelijkingen'.

Grafieken

Essentiëel voor het kunnen gebruiken van de wiskunde is, dat de leerlingen de wiskunde herkennen in de stortvloed van woorden die de beschrijving van een economische theorie of een probleem met zich meebrengt. Dit is één van de belangrijkste aandachtspunten bij het leren omgaan met wiskunde in een context. Herkenning kan worden bevorderd door expliciet aandacht te besteden aan vertaalvaardigheden. Het kunnen tekenen van een grafiek vanuit een beschrijving is zo'n vertaalvaardigheid. De eerste grafiek in voorbeeld 2 is daar een goed voorbeeld van. Een ander voorbeeld is de illustratie van het begrip 'verminderde meeropbrengst'.



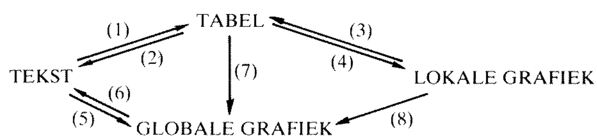
Het principe van 'de verminderde meeropbrengst' kan als volgt beschreven worden: zodra het aantal arbeiders groter wordt dan bij P, zal de *meer*-opbrengst kleiner worden. Bij een nog groter aantal arbeiders kan de opbrengst zelfs lager worden (vanaf Q; de grafiek daalt). figuur 7.

De lezer zal het omgekeerde doen van wat beschreven is: de grafiek bestuderen en beredeneren hoe de totale opbrengst zich gedraagt, afhankelijk van het aantal arbeiders.
Ook dat is een vertaalvaardigheid, die van belang is voor de begripsvorming en de herkenning van wiskunde in een nieuwe situatie.
Deze grafiek, en ook die van voorbeeld 2 en voorbeeld 3, is een *globale* grafiek; er valt niets te zeggen over de waarde van de totale opbrengst bij een gegeven hoeveelheid arbeiders. Het woord 'globaal' duidt op de aard van de (grafische) beschreven kenmerken: verloop, toename, afname etc. (7).
De grafiek kan heel goed dienen als visualisering van een economische proces. Een visueel ingestelde leerling zal het plaatje beter kunnen vasthouden dan het verhaal.

Er zijn aanwijzingen dat het verband tussen de economische realiteit en de wiskundige abstractie door leerlingen beter gelegd wordt als veel aandacht besteed wordt aan het maken en interpreteren van globale grafieken (7). Het boekje 'functies en grafieken' begint met vragen over een aantal grafieken zoals hier beschreven is.

Isonutslijnen en budgetlijnen zijn genoemd als voorbeelden van grafieken. Nogmaals wil ik erop wijzen dat dit geen grafieken in enge zin zijn. Beter ook is het vermijden van de term grafiek in dit geval en te spreken over lijnen of krommen. Hetzelfde geldt als er sprake is van vergelijkingen en lijnen in het platte vlak, bestaande uit punten waarvan de coördinaten voldoen aan de vergelijkingen. In ieder geval is een zorgvuldig taalgebruik van belang.

In voorbeeld 1 wordt ook gebruik gemaakt van grafieken, maar dan van lokale grafieken. Bij elk punt van de grafiek is af te lezen welke waarden van de variabelen erbij horen. (Ook van deze grafieken kunnen globale kenmerken beschouwd worden).
De eerste twee grafieken zijn rechtstreeks uit de tabel afgeleid, de derde is afgeleid uit de eerste twee. Opvallend in het vraagstuk is dat elke bespiegeling van de tabel achterwege is gebleven. Hier is een mogelijkheid tot stimuleren van de herkenning onbenut gelaten: het verbaal beschrijven van wat er uit de tabel geconcludeerd kan worden, is opnieuw een belangrijke vertaalvaardigheid.
In de tabel is direct te zien dat OK lineair is, dat (0,0) op de grafiek ligt en dat 3 maal zoveel vaten 3 maal zo veel kosten per vat oplevert. Als je een tabel maakt van de totale kosten, op grond van de overige gegevens in de tabel, dan kun je al zonder meer concluderen dat er een minimum is dat ongeveer bij 4000 vaten ligt. De conclusie over het minimum aan totale kosten per vat verbinden met dit gegeven, is een vertaalvaardigheid.
De verschillende vertaalmogelijkheden die besproken zijn, kunnen worden gevisualiseerd in het volgende schema:



Geconcludeerd kan worden dat de vertaallijnen (1) en (4) redelijk ingeburgerd zijn geraakt in het onderwijs en dat met name (2), (5), (6) en (7) meer aandacht verdienen.
Het belang van het leren van deze vaardigheden ligt niet alleen in de waarde van de vaardigheden zelf, maar ook zijn leerlingen die deze vaardigheden beheersen, beter in staat om in nieuwe situaties essentiële informatie te destilleren en te hanteren (5).

De projectgroep "Wiskunde 12 – 16" van de SLO (6) heeft een schema opgesteld, waarin vertaallijnen van en naar de volgende representatievormen van een probleemsituatie gegeven zijn: situatie, tabel, grafiek, formule.
Een inventarisatie van de bijbehorende vaardigheden heeft geleid tot het volgende schema:

VAN \ NAAR	SITUATIE	TABEL	GRAFIEK	FORMULE
	interpreteren	modelbouw		
SITUATIE	herstructureren	bijv. meten	schetsen	vinden v.e. formule vanuit een geconstateerd verband
TABEL	lezen en interpreteren van data	omvormen	plotten	vinden v.e. formule bij de gegevens in een tabel
GRAFIEK	interpreteren	aflezen van coördinaten	omvormen	vinden v.e. formule bij een gegeven kromme
FORMULE	herkennen v.e. formule	substitueren, berekenen	schetsen v.e. kromme	herleiden

De stapsgewijze opbouw van het vraagstuk van voorbeeld 1 geeft een goed voorbeeld van de vertaalvaardigheden, die leerlingen nodig hebben voor het oplossen van het probleem: hoe groot moet de produktie zijn, opdat de totale kosten per vat zo klein mogelijk zijn?
In de inleiding, waar de situatie geschetst wordt, is al een verband gelegd tussen de situatie en de tabel. De metingen zijn gedaan en de leerlingen moeten de uitkomst verwerken.
Vanuit de tabel tekenen de leerlingen grafieken: plotten. Ze verwerken de grafieken tot een nieuwe grafiek vanuit het plaatje (omvormen van grafiek naar grafiek), of vanuit een nieuwe tabel (omvormen van tabel naar tabel en daarna plotten).
Bij onderdeel d. worden leerlingen achtereenvolgend aangesproken op twee vaardigheden: het interpreteren van de grafiek (wat betekent het 'laagste' punt in de grafiek?) en het aflezen van de coördinaten.

Functies en vergelijkingen

In voorbeeld 3 komt naar voren hoe in de economie afwisselend gebruik wordt gemaakt van functies en vergelijkingen. Reeds is opgemerkt dat voor leerlingen dit switchen moeilijk is. Dat komt goed tot uitdrukking in de berekening van de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken van de vraag- en aanbodfuncties in voorbeeld 3:

1. Uitgaande van functievoorschriften:
   vraagfunctie $f: x \rightarrow -\frac{4}{3}x + 4$
   aanbodfunctie $g: x \rightarrow x - 1$
   Berekening:

$$\begin{aligned} -\tfrac{4}{3}x + 4 &= x - 1 \quad \Leftrightarrow \\ -\tfrac{4}{3}x - x &= -1 - 4 \Leftrightarrow \\ \tfrac{7}{3}x &= 5 \quad \Leftrightarrow \\ x &= 2\tfrac{1}{7} \end{aligned}$$

   uit $g: x \rightarrow x - 1$ volgt $y = 1\frac{1}{7}$, dus $S = (2\frac{1}{7}, 1\frac{1}{7})$.

2. Uitgaande van vergelijkingen:
   vraagvergelijking: $y = -\frac{4}{3}x + 4$ (1)
   aanbodvergelijking: $y = x - 1$ (2)
   Berekening:

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} y + \frac{4}{3}x = 4 \\ y - \phantom{\frac{4}{3}}x = -1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 4x = 12 \\ 4y - 4x = -4 \end{cases} +$$

$$7y = 8$$

$$y = 1\tfrac{1}{7}$$

   uit (2) volgt $x = y + 1 = 2\frac{1}{7}$, dus $S = (2\frac{1}{7}, 1\frac{1}{7})$.

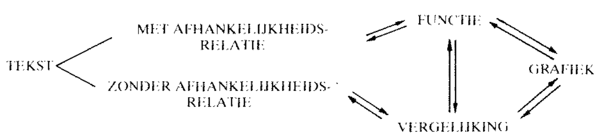
   Bij de berekening volgens de eerste methode maken veel leerlingen de volgende fout:

$$\begin{aligned} -\tfrac{4}{3}x + 4 &= x - 1 \Leftrightarrow \\ -4x + 12 &= x - 1 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Net als bij grafieken is hier het taalgebruik van belang. Een vergelijking geeft een verband weer tussen gelijkwaardige variabelen. Alleen bepaalde combinaties van variabelen voldoen aan de vergelijking. Een grafiek is een visualisering daarvan: door de introductie van een coördinatenstelsel kan een éénduidig verband gelegd worden tussen combinaties van waarden van de variabelen en de punten in het vlak. Omgekeerd kan een figuur in het platte vlak algebraïsch beschreven worden d.m.v. één of meerdere vergelijkingen. Dit laatste is belangrijker in de wiskunde dan in de economie.

Bij een functievoorschrift is, zoals eerder is genoemd, sprake van een afhankelijkheidsrelatie tussen de variabelen; het voorschrift geeft een algebraïsche beschrijving van de wijze waarop een variabele afhangt van één (of meerdere) variabele(n). In die zin geeft een functievoorschrift meer informatie dan een vergelijking. Net als een vergelijking kan een functie gevisualiseerd worden d.m.v. een grafiek; de grafiek functioneert in veel problemen als een verbinding tussen functie en vergelijking. Dat is de reden waarom economen 'ongestraft' van het ene wiskundige systeem over kunnen gaan op het andere systeem.

Ook hier is sprake van vertalingen van een probleem:



Leerlingen die drijven op algoritmen, zullen eerder de genoemde fout in de berekening van de coördinaten van het snijpunt S maken, dan leerlingen voor wie de handelingen betekenis hebben. Aandacht besteden aan de vertaallijnen tussen functie en vergelijking zal hen helpen een goede mentale voorstelling te maken van de probleemsituatie (5).
Het gedachtenloos overstappen van het ene wiskundige systeem naar het andere wordt bevorderd door de verwarrende notaties, omdat leerlingen juist getraind worden in het herkennen van een situatie voor het gebruik van vaste symbolen.

Zowel in de economie als in de wiskunde kunnen de notaties verwarrend werken:
functievoorschriften worden in de wiskunde op verschillende manieren genoteerd:

$$x \rightarrow \mathrm{a}x + \mathrm{b} \qquad (1)$$
$$y = \mathrm{a}x + \mathrm{b} \qquad (2)$$
$$f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b} \qquad (3)$$

Vaak stelt $y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ een functievoorschrift voor, soms een vergelijking. Meestal wordt een vergelijking zó geschreven:

$$y - \mathrm{a}x = \mathrm{b} \qquad (4)$$

In de gelijkheid $q_v = -\frac{4}{3}p + 4$ is geen van de vier vormen direct te herkennen.
Dit is geen pleidooi voor het standaardiseren van de notaties. Integendeel: dat zou juist het gedachtenloos toepassen van algoritmen bevorderen.
Het gebruik van wisselende symbolen, zoals ook bij wiskunde A het geval zal zijn, kan de leerlingen helpen met het flexibel omgaan met symbolen in het algemeen, en zal binnen de economieles minder problemen geven. Ik zal er dan ook niet voor pleiten de economen te bewegen hun (wiskundig soms onhandige) symboliek te veranderen. Eerder zal meer aandacht besteed moeten worden aan het leren omgaan met verschillende symbolen en verschillende voorstellingen van wiskundige begrippen. Ook een economiedocent heeft daarin een verantwoordelijkheid op zich te nemen; hij of zij zal steeds de wiskundige betekenis van de gebruikte notaties expliciet moeten maken.

Besluit

Er is binnen de leerplanontwikkeling van de wiskunde een duidelijke accentverschuiving te bespeuren in de waardering voor de verschillende aspecten van het vak: in plaats van een starre met vaste symbolen (x en y als variabelen, a, b en c als constanten) beklede zuivere wiskunde, krijgt een flexibele, toepasbare en toegepaste wiskunde meer aandacht. Bij de ontwikkeling van met name wiskunde A wordt gezocht naar een methode om de toepassing van de wiskunde in vakken als economie en natuurkunde voor leerlingen beter mogelijk te maken. Ten onrechte wordt het verschil tussen wiskunde A en wiskunde B dikwijls gekenmerkt als een niveauverschil: wiskunde B zou 'moeilijker' zijn. Maar wiskunde A is beslist niet 'gemakkelijker'; het gebruiken van een wiskundige techniek in een nieuwe, door uitgebreide informatie omfloerste situatie, waarin bovendien andere symboliek gehanteerd wordt en andere mechanismen een rol spelen, vergt ook een behoorlijk abstractievermogen (4).

Een onderzoek naar de verhouding tussen het kwalitatief en het kwantitatief deel van de examens economie 1, heeft geleid tot de conclusie dat in 1981 een kentering heeft plaats gehad: van overwegend kwantitatief is het examen overwegend kwalitatief geworden (1). Terwijl binnen de wiskunde op school de economische (en ook de natuurkundige-, biologische- en scheikundige) toepassingen steeds meer aandacht krijgen, kan dit gegeven de suggestie wekkken dat in het economieprogramma de wiskundige aspecten naar de achtergrond verdwijnen. Dat is een onjuiste voorstelling. De meer formele wiskunde wordt geleidelijk aan minder belangrijk binnen de economie op school. Het belang van de wiskunde wordt steeds meer gerelateerd aan de beperkingen van de modellen en de economische consequenties van de uitkomsten. De voorbeelden 1 en 3 zijn onderdelen in het examenprogramma die niet snel zullen verdwijnen. Dat deze onderdelen wiskunde bevatten waar veel leerlingen nog een behoorlijke kluif aan zullen hebben, zal duidelijk zijn.
Juist omdat de leerplannen van beide vakken zo sterk in beweging zijn, is een intensievere samenwerking tussen economen en wiskundigen zeer gewenst.
Ik hoop met dit artikel een bijdrage te hebben geleverd aan de meningsvorming t.a..v. de inhoud van de leerplannen economie en wiskunde in het voortgezet onderwijs.

Literatuur

(1) Schöndorff, R., *De verhouding kwantitatief/kwalitatief*, Tijdschrift voor het economisch onderwijs, 1982 nr. 7.
(2) Moret, A. e.a., *Ze kunnen niet meer rekenen*, Economisch/maatschappelijk didactisch tijdschrift, 1981 nr. 1.
(3) Kindt, M., J. de Lange Jzn, *Functies en grafieken*, docentenboekje, OW & OC, Utrecht.
(4) Janvier, E., *Use of situations in mathematics education*, Educational studies in mathematics, 1981 nr. 12.
(5) Streun, A. van, *De herkenning van wiskundige essenties in realistische probleemsituaties*, Nieuwe Wiskrant, 1983 nr. 4.
(6) Projectgroep "Wiskunde 12 – 16", *In verband met ..... een introductie of functies via verbanden*, SLO, Enschede 1983.
(7) Krabbendam, H., *Globaal of lokaal?*, Nieuwe Wiskrant, 1982 nr. 4.