Nogmaals de schommel

Gert van Barneveld
SLO Enschede

Samenvatting

De beweging van een schommel stond centraal in het artikel van Paul Herfs uit Wiskrant nr. 2 van deze jaargang.
Dit artikel is daarop een reactie en wel een tweeledige: kanttekeningen bij de reacties van leerlingen en leraren en anderzijds: hoe is die grafiek nu werkelijk?

Summary

The movement of a swing is a rich context for mathematical activities, as described in an earlier article.
This article is a reaction. The author discussed the reactions of teachers and pupils. On the other hand he pays attention to the mathematical background of the movement of a swing.

Dit artikel is voor een deel een reactie op het stuk: "De schommel, een wiskundig rijke context", van Paul Herfs, uit de N.W. nr. 2 van februari 1985.
Ik wil wat kanttekeningen maken bij de reacties van de leerlingen en van de docenten uit de lesverslagen die Paul Herfs in zijn artikel heeft opgenomen. Ik wil ook wat zeggen over de conclusies die hij eruit trekt. Maar een flink deel van mijn verhaal zal gaan over de schommel zelf. Ik wil nu wel eens weten hoe het zit met dat ding en hoe de grafiek er nu echt uit ziet.

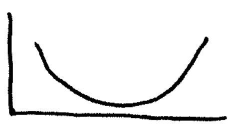
Het begon allemaal met de volgende opdracht uit het SLO pakketje "Grafiekentaal":

Teken een grafiekje waarin je kunt (laten) zien hoe jouw afstand tot de grond verandert als je aan het schommelen bent.
Hebben jullie in de groep allemaal precies dezelfde grafiek? Of zou dat niet zo hoeven te zijn? Praten jullie dáár 's over.

In de vakdidactische literatuur [1] (Janvier, Swan, Krabbendam & Speelpenning) is sprake van "het bergeffect" bij het tekenen van tijd-afstand-grafieken. Leerlingen zijn geneigd om de baan die een auto aflegt te tekenen in plaats van de grafiek van de afgelegde weg, of ze tekenen de berg in plaats van de hoogte als functie van de tijd. Met die wetenschap in het achterhoofd interpreteer ik de tekening van Conchita (tek. 1) als een serie tekeningetjes van de schommelbeweging die achterelkaar gezet zijn: de schommel schommelt immers steeds maar door.

Conchita heeft dit antwoord:

Esther heeft de volgende grafiek:



Esther kan dat niet op papier zetten: "anders lijkt het alsof de schommel vooruit beweegt" (tek. 2).
De reactie van Hans (de leraar) bezorgt me een lichte huiver: "De schommel blijft op dezelfde plaats hangen, maar de tijd loopt door".
Wat moet ik me daar nu bij voorstellen: "Vadertje tijd heeft geen zin in schommelen, hij loopt verder en laat de schommel onaangeroerd?" Wat zouden leerlingen

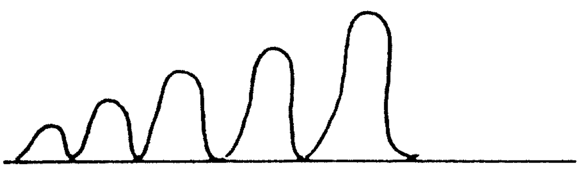
denken als ze dit horen?
Het is buitengewoon moeilijk voor leerlingen om te leren een grafiek goed te tekenen en te interpreteren [2]. Dikwijls denk je dat ze het weten en dan nog weer sta je ineens op het verkeerde been [3]. De dimensie tijd is de storende factor, daardoor *is* het geen plaatje van de berg, ook al ziet het er soms net zo uit.
Het kost tijd om dat te leren, de serie functiepakketjes van de SLO [4] gunt leerlingen de tijd en laat ze intussen een heleboel ervaring opdoen in het werken met grafieken.

De bedoeling die de auteurs met de opdracht hebben staat vrij helder omschreven in de handleiding. Het gaat om het volgende:

a. de overgang van een situatie naar een grafiek;
b. het expliciteren van de grootheden 'hoogte' en 'tijd' langs de assen;
c. het aangeven van het periodieke in de grafiek, als zijnde een belangrijk globaal kenmerk.

Alle leerlingen (behalve Esther) voldoen aan c. en a. Bedoeling b. komt nauwelijks aan bod in de voorbeelden. De docenten gaan er in de nabespreking ook niet op in, althans ... dat blijkt nergens uit.

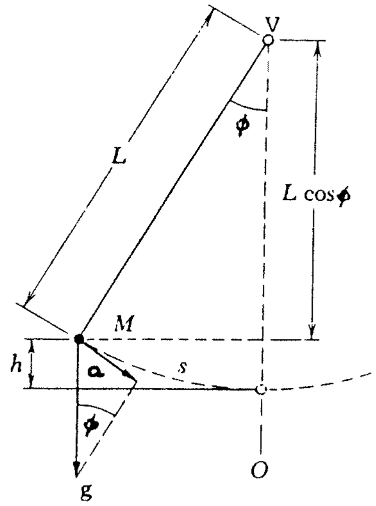
De oplossing van Tasja:



Het is nooit de bedoeling geweest om een precieze grafiek te tekenen, alle oplossingen, behalve die van Esther, zijn acceptabel, die van Tasja is zelfs uitstekend. Het is steeds de docent die begint over de details in de grafiek: in Amsterdam over de punten in de grafiek van Conchita en in Deventer over de hoogte van de minima in de grafiek. Mijn indruk is dat de leerlingen er zeker geen probleem van maakten, maar dat de docenten meer wilden dan de bedoeling van de opdracht was. Met de conclusie in het artikel van Paul Herfs dat dit een ingewikkelde opdracht is, ben ik het ook niet eens. Het is ook niet zo dat leerlingen deze opdracht redelijk precies zouden kunnen oplossen, het ontbreekt hun eenvoudig aan wiskundig gereedschap daarvoor.

In het artikel treffen we ook de weergaven van enkele "theorietjes" aan waarin wordt betoogd dat de grafiek van boven spitse punten heeft of juist niet, of dat ze aan de onderkant zouden zitten. De schrijver geeft hier een juist beeld van de werkelijkheid: ook onder wiskunde-onderwijsgevenden is het niet ongebruikelijk om via min of meer plausibele redeneringen je vermoeden te onderbouwen. Maar het lijkt me logischer om het gewoon maar even uit te rekenen, met wat mechanica (ooit het gebied van de wiskundigen) moet het wel lukken.

Eerst wat afspraken:
V is het ophangpunt, in M bevindt zich de massa m van de schommel en 0 is het onderste punt.
L is de lengte van de schommel. De massa m bevindt zich in M op een hoogte h boven de grond.
De booglengte s = $L\phi$ (in radialen).



De tangentiële snelheid v van de schommel is dan:

$$V = -\frac{ds}{dt} = -L\frac{d\phi}{dt} = -L\cdot\dot{\phi}\left(\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}\right).$$

(Het "min"-teken moet erbij, omdat de richting waarin s toeneemt precies tegengesteld is aan de richting van v) en de versnelling a, die m ondervindt is dus:

$$a = -\frac{d^2s}{dt^2} = -L\frac{d^2\phi}{dt^2} = -L\ddot{\phi}$$

Uit de tekening blijkt dat de component van de zwaartekrachtversnelling g in de richting van de raaklijn gelijk is aan g sin ϕ, voor niet te grote waarden van ϕ is ongeveer: $g \sin\phi \approx g\cdot\phi$
Voor de versnelling a hebben we dus twee uitdrukkingen gevonden die aan elkaar gelijk moeten zijn:

$$g\phi = -L\ddot{\phi} \text{ of } \ddot{\phi} = -\frac{g}{L}\cdot\phi.$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking is $\phi = \hat{\phi}\cdot\sin(\omega_0 t + \psi)$ waarin $\hat{\phi}$ de maximale uitwijking van de schommel is, ω_0 is 2π maal de schommelfrequentie en ψ is een fasehoek, afhankelijk van het tijdstip waarop je begint met kijken.
Verder is $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ een bekende formule van een slinger.
Verder is uit de tekening te zien dat de hoogte h boven het onderste punt 0 gelijk is aan:

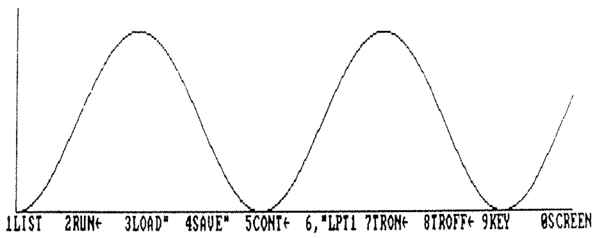
$$h = L - L\cos\phi.$$

Substitueren we nu de gevonden uitdrukking voor ϕ in deze formule dan volgt:

$$h = L - L\cos(\hat{\phi}\sin\omega_0\cdot t + \psi).$$

Deze grafiek kun je nu gaan plotten, als je tenminste voor L, ϕ en ψ enigszins realistische waarden invult. We kiezen hier L = 3 m, $\phi = 30°$ en $\psi = 0°$, een rustige speeltuin derhalve.

De grafiek is getekend door een IBM PC:



De grafiek lijkt sprekend op een gewone sinusgrafiek wat ons enigszins zou kunnen verbazen.
De hier gegeven afleiding gaat niet meer op voor grote waarden van ϕ. Voor een zeer heftige schommelbeweging klopt de formule niet meer. Maar h(t) blijft steeds differentieerbaar, er komen dus per se geen punten in de grafiek, al ga je nog zo hoog!
Er zijn nog veel meer manieren om de grafiek te verkrijgen behalve deze algebraïsche aanpak. Bijvoorbeeld door stroboscopische foto's te maken en van daaruit een grafiek te construeren. Een minder bewerkelijke manier wil ik hier nog laten zien, we hebben er wèl de formule bij nodig, maar het verklaart tenminste een beetje waarom de grafiek zo op een sinus lijkt.

$h = L - L\cos(\hat{\phi} \sin \omega_0 t + \psi)$. Kies $\psi = 0$ voor het gemak.

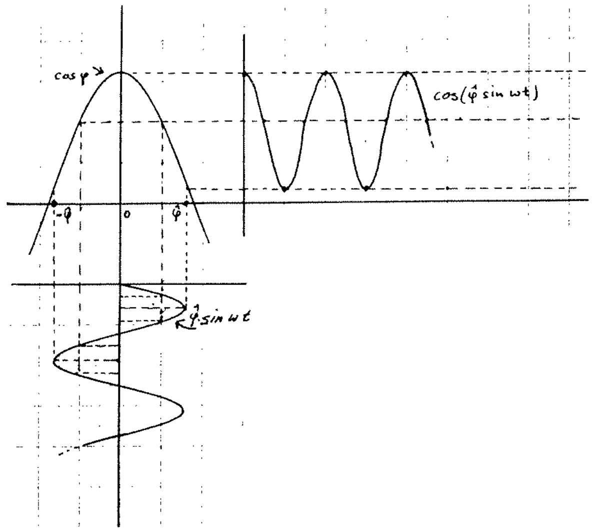
En in plaats van

$L - L\cos(\hat{\phi} \sin \omega t)$

gaan we

$\cos(\hat{\phi} \sin \omega t)$ tekenen.

Dat gaat als volgt:
De grafiek van $\hat{\phi} \sin \omega t$ wordt 'geprojecteerd' tegen de grafiek van $\cos \phi$. Het resultaat is een grafiek van $\cos(\hat{\phi} \sin \omega t)$.
Nu kun je 'zien' dat de bewuste toppen van $\cos(\hat{\phi} \sin \omega t)$ ontstaan doordat een bij benadering recht stuk van $\sin \omega t$ geprojecteerd wordt tegen de top van $\cos \phi$,



de resulterende top zal dus niet veel afwijken van de top van $\cos \phi$. Aan de andere kant ontstaat de onderste top door de top van $\sin \omega t$ te projecteren tegen een bij benadering recht deel van $\cos \phi$, ook hier zal het resultaat qua vorm niet veel afwijken van een sinustop. Merk ook nog op dat de frequentie verdubbeld is. En zo hoort het ook. Over dit resultaat mogen we best tevreden zijn.
Alleen Tasja deed het nog beter. Zij liet ook nog zien dat de amplitude toeneemt als je gaat schommelen!

[1] Zie bijvoorbeeld:
Janvier, C., *'The use of situations in mathematics education'*, Educational Studies in Mathematics, 1981-12.
Swan, M., *'The language of Graphs'*, Nottingham.
Janvier, C., *'The interpretation of complex cartesian graphs representing situations'*, Nottingham.
Krabbendam, H., *'Globaal of lokaal'*, Nieuwe Wiskrant 1982-4.
[2] Zie ook Leen Streefland in de Nieuwe Wiskrant nrs. 4-1 en 4-2: *'Snelheid in Grafieken'*.
[3] Zie het artikel van Rijkje Dekker in de Nieuwe Wiskrant nr. 4-1: *'Josè'*.
[4] *Grafiekentaal; Hoe langer hoe meer; Regelrecht; Uitstippelen.*