Toetsen bij wiskunde A

J. de Lange Jzn
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

De landelijke invoering van wiskunde A deze zomer is een feit. Een geheel nieuw vak, dat voor velen nog vraagtekens bevat.
In dit artikel wordt een poging gedaan enkele van die vragen te beantwoorden. De uitgangspunten van wiskunde A worden kort belicht, de rol van de context en tenslotte het grote probleem: het toetsen van wiskunde A.
Het tot nog toe verrichte onderzoek lijkt tot de conclusie te leiden dat er naast de gewone toetsen méér nodig en wenselijk is.

Summary

This summer the much discussed Math A-program will be introduced nationwide in the Netherlands. A curriculum where applications play a vital role.
This introduction will confront teachers with new problems. Not only the role of applications makes many teachers feel incertain. One of the major problems is the construction of achievement tests.
A report on research carried out on this subject.

De onvrede van wiskundedocenten in het midden van de jaren 70, gepaard aan groeiend onbehagen in het hoger onderwijs, heeft Nederland in 1985 een primeur op wiskunde-onderwijsgebied opgeleverd: vanaf augustus 1985 zal het nieuwe wiskundeprogramma voor de laatste twee jaren van het V.O. ingevoerd worden. Voor Nederlandse begrippen ongewoon snel, na een relatief korte maar hevige experimenteerperiode. De directe oorzaak van de onvrede was het feit dat de sociale en economische faculteiten besloten wiskunde I verplicht te stellen voor hun studenten. Wiskunde I werd een selectiemiddel, een functie die niemand bij de introductie voorzien had. De gevolgen laten zich raden: meer en meer studenten kozen wiskunde I, terwijl dat voor heel andere studenten ontworpen was. Daarnaast signaleerden de universiteiten een verontrustend groot gebrek aan ruimtelijk inzicht, zelfs bij studenten die wiskunde II (vector-meetkunde) hadden gekozen.

Herverkaveling

In 1979 werd het Interimrapport van de werkgroep van advies HEWET [1] (Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde Eén en Twee) gepubliceerd met de aanbeveling wiskunde I en II te herverkavelen tot wiskunde A en B.

Het wiskunde A-programma is bestemd voor leerlingen die één van de γ-wetenschappen gaan studeren; het B-programma is bedoeld als vooropleiding voor exacte studierichtingen aan universiteiten en hogescholen.
De eerder gememoreerde primeur is wiskunde A: voor het eerst zal in een regulier curriculum een 'toegepaste wiskunde' een plaats vinden.
Op het ICME-5 congres in Adelaïde (1984) verzuchtte Gabrielle Kaiser [2] nog dat er al jaren en jaren over de wenselijkheid van toegepaste wiskunde wordt gepraat, maar dat nog geen enkel land het op het leerplan voor het secondair onderwijs heeft staan.

De werkgroep kwam in haar eindrapport tot de volgende onderwerpen voor wiskunde A:
- toegepaste analyse;
- matrices en toepassingen;
- kansrekening en statistiek;
- automatische gegevensverwerking.

De experimenten startten in augustus '81 op twee scholen, werden in augustus '83 uitgebreid met tien scholen, terwijl de laatste ronde van experimenten in augustus '84 inging met nog eens veertig scholen.
Tegelijkertijd werd de nascholing opgestart, zodat voor de landelijke invoering in augustus '85 in veel

gevallen twee docenten per school met het nieuwe vak wiskunde A hebben kennisgemaakt.
Deze kennismaking is een eerste vereiste, daar door vele docenten het vak als 'revolutionair' wordt ervaren. De invulling van het rapport door de leden van het Hewet-team is qua onderwerpen geheel binnen het in het rapport gestelde, maar de manier waarop dit gebeurd is maakt duidelijk dat het begrip 'herverkaveling' als een eufemisme opgevat kan worden.
Natuurlijk, het leerlingmateriaal was 'maar' experimenteel materiaal, maar vrijwel alle proefscholen hebben dit gebruikt, en het is beeldbepalend voor wiskunde A, althans tot op dit moment.
De reguliere auteurs volgen aarzelend en de eerste resultaten duiden erop dat ook de 'gewone' boeken sterk op het experimentele materiaal leunen. Dit is niet al te verbazend daar er regelmatig contact is geweest tussen Hewet-team en uitgevers en/of auteurs.
Een zeer gewettigde vraag – gezien het beeldbepalende karakter van de Hewet-boeken – heeft de ontwerpers van het experimentele materiaal voor ogen gestaan? Welke zijn de doelstellingen?

Wiskunde A

Náást het aanleren en onderhouden van basisvaardigheden op de vier eerder genoemde gebieden staat centraal in het wiskunde A-programma: het mathematiseren.
Mathematiseren is een organiserende en structurerende activiteit; een activiteit die erop gericht is in de eerste plaats een probleem te vertalen naar een wiskundig gesteld probleem.
Onder deze *horizontale* mathematisering vallen o.a.:

- de omvorming en inpassing van een probleem naar een bekend model;
- het identificeren van het specifiek mathematische in een algemene context;
- het op verschillende manieren formuleren en visualiseren van één probleem;
- het herkennen van isomorfie van verschillende problemen;
- het ontdekken van regelmatigheden en schematisering.

Als het probleem eenmaal getransformeerd is tot een mathematische probleemstelling kan dit verder met wiskundige middelen worden aangepakt.
Dit wordt wel *verticale* mathematisering genoemd.
Men kan daarbij denken aan:

- het gebruik van verschillende wiskundige modellen;
- het opsporen van betrekkingen;
- het weergeven daarvan in een formule;
- het combineren en integreren van modellen.

Een andere belangrijke activiteit bij wiskunde A, en ook als zodanig door de werkgroep genoemd, is het doorzien van manipulatie m.b.v. statistische gegevens, of korter, kritisch kijken. Tenslotte kan gesteld worden dat er naast de cognitieve aspecten van het wiskunde A-programma een belangrijk ander aspect is: de leerlingen een positieve attitude bijbrengen ten aanzien van wiskunde.

De doelen zoals hierboven kort geschetst dienden door het Hewet-team vertaald te worden naar een *didactiek*. Men hoeft het materiaal niet al te nauwgezet te bestuderen om te ontdekken dat hier gekozen is voor zgn. realistisch wiskunde-onderwijs. Dit kenmerkt zich doordat het probleemgebied eerst uitgebreid intuïtief benaderd wordt. Eerst wordt getracht vermoedens te formuleren. Pas later komt de schematisering, modelvorming. Deze worden waar mogelijk niet aangeboden, maar zo mogelijk door de leerlingen ontwikkeld. Dat pasklaar aanbieden van het model als eerste activiteit is juist een kenmerk van het structuralistisch wiskunde-onderwijs. Immers, vanuit structuralistisch standpunt bezien is wiskunde een vak waarvan de inhoud is afgeleid uit de wetenschap 'wiskunde'. De vaksystematische ordening wordt niet ter discussie gesteld, want het bouwwerk 'wiskunde' is af.

Context

Bij realistisch wiskunde-onderwijs daarentegen wordt wiskunde in de eerste plaats als menselijke activiteit gezien; de aanduiding 'realistisch' typeert de gerichtheid van deze aanpak op de realiteit. Dit betekent dat contextproblemen een grote rol spelen. Deze kunnen namelijk een brugfunctie vervullen tussen de realiteit en het formele systeem.
Kenmerkend is daarbij het gebruik van contexten van de derde soort [3]: hierbij wordt de context daadwerkelijk gebruikt om een wiskundig concept aan te brengen. Bekende voorbeelden van dit soort contextgebruik zijn de glijverhouding als instap voor de tangens [4], of het kroosmodel bij exponentiële groei [5].
Naast dit derde soort contextgebruik – kenmerkend voor de realistische benadering – wordt veelvuldig gebruik gemaakt van contextgebruik van tweede en eerste soort.
Van de eerste soort is een voorbeeld:

> *"De groeifactor van een bacteriesoort is gelijk aan 6 (per tijdseenheid).*
> *Op tijdstip 0 zijn er vier bacteriën.*
> *Bereken het tijdstip waarop er 100 bacteriën zijn."*

Een simpele 'vertaalslag' brengt dit probleem terug tot $4.6^x = 100$. Hoe eenvoudig dat vertalen hier ook lijkt, het moet wel aangeleerd worden.
Zodra het contextgebruik zódanig is dat van een eenvoudige vertaalslag geen sprake meer is, maar er sprake is van meerdere organiserende en structurerende activiteiten, kunnen we spreken van contextgebruik van de tweede soort. Een voorbeeld uit het wiskunde A-materiaal is b.v. de jacht op de klapmuts: er wordt studie gemaakt van het probleem dat de klapmutsen mogelijk met uitroeien worden bedreigd [6].
Daarnaast dienen de contexten ook echt te zijn, zeker als we over problemen praten waarbij niet het aanbrengen van nieuwe concepten, maar het gebruiken van reeds aanwezige kennis centraal staat. Tenslotte dienen de contexten motiverend te zijn.

Het feit dat bij wiskunde A vaak vanuit een verschillende optiek tegen de problemen aangekeken kan worden, maakt het mogelijk dat er géén eenduidig bepaald antwoord is: afhankelijk van de manier waarop het probleem wordt opgelost kunnen de antwoorden verschillen. Dit laatste facet maakt velen onzeker, maar is een essentieel facet van wiskunde A.

Toetsen

Na deze korte schets over achtergrond, doelstelling en didactische invulling van het wiskunde A-programma nu ter zake van de kern van dit artikel: de toetsproblematiek.
Het rapport van de werkgroep van advies rept er met geen woord over. En ook het Hewet-team komt aanvankelijk niet verder dan de constatering dat het lastig is om goede proefwerken te maken. Duidelijker wordt de problematiek bij het ontwerpen van schoolonderzoeken, maar pas bij het construeren van opgaven voor het Centraal Schriftelijk Examen wordt de problematiek echt duidelijk: veel van de doelen van wiskunde A lijken onvoldoende getoetst te kunnen worden tijdens een 'restricted-time-written-test'. Natuurlijk, vaardigheden en kennis kunnen vaak heel goed afgevraagd worden op een schriftelijke toets, maar hoe zit het met het *proces* dat tot het *produkt* leidt?
Hoe komt een leerling tot het antwoord?
Waarom komt hij tot dat antwoord?
Dat soort procesvragen zijn wezenlijk belangrijker dan de antwoorden. En hoe zit het met de activiteit van de leerlingen die ze b.v. kunnen tonen bij een kritische beoordeling van hun model, of bij het verfijnen van een model?
Dit soort zaken komt op z'n best zeer onvolledig aan bod in de proefwerken, schoolonderzoeken zoals die in de loop van het experiment geproduceerd zijn.
Deze zaak is dus te belangrijker daar gevreesd moet worden dat het examen een bedreiging zou gaan kunnen vormen voor het vak wiskunde A. Niet dat dit verschijnsel iets nieuws of typisch Nederlands is: Van Hiele [7] schreef in 1957 al:
"Maar al spoedig, véél te spoedig, doet het eindexamen z'n invloed gelden... Het gevolg van deze omstandigheid is dat het examen een lange tijd van voorbereidende werkzaamheden vereist, van werkzaamheden die voor de begripsvorming van geen of negatieve betekenis zijn."

De National Council of Teachers of Mathematics is in z'n "An Agenda for Action" (1980) [8] heel duidelijk:
"It is imperative that the goals of the mathematics program dictate the nature of evaluations needs to assess program effectiveness, student learning, teacher performance, or the quality of materials.
Too often the reverse is true: the tests dictate the programs or assumptions of the evaluation plan are inconsistent with the program's goals."
Het Cockcroftrapport (1984) [9] doet er nog een schepje op:
"It therefore seems clear that, if assessment at 16+ is to reflect as many aspects of mathematical attainment as possible, it needs to take account not only of those aspects which it is possible to examine by means of written papers, but also of these aspects which need to be assessed in some other way."

Méér toetsen

Deze "some other way" is precies datgene dat ons voor ogen stond bij het zoeken naar alternatieve manieren van toetsen bij wiskunde A, waarbij méér dan bij beperkte-tijd-schriftelijke-test recht kon worden gedaan aan de doelstellingen van wiskunde A en bovendien dat de toetsen "should be such that they enable candidates to demonstrate what they do know rather than what they don't know." (Cockcroft). Dit houdt in dat leerlingen hun creativiteit en flexibiliteit ook moeten kunnen tonen. Bij de honderden verzamelde opgaven van proefwerken, schoolonderzoeken en examens die de eerste vier jaren van het experiment hebben opgeleverd, komt dit aspect nauwelijks aan bod.
Dit verzamelen van proefwerken en schoolonderzoeken heeft systematisch plaatsgevonden. Daarbij werd niet voorbijgegaan aan de resultaten en de moeilijkheden die leerlingen en docenten ondervonden. Als eerste resultaat van dit verzamelen ontstaat een soort proefwerkbank: een verzameling van voorbeeldtoetsen zoals die verschenen in *Hewet & Toets 2* [10]. Daarnaast worden deze proefwerken geanalyseerd om een antwoord te vinden op de vraag:

- Zijn de onderwijsdoelstellingen van het vak wiskunde A terug te vinden in de proefwerken? En als dat niet zo is, ligt de oorzaak dan in het feit dat de doelstellingen door de docent niet zó zijn geïnterpreteerd als in de bedoeling van het Hewet-team lag, òf zijn bepaalde doelstellingen vrijwel niet in proefwerkvorm te toetsen?

alsmede om enig zicht te krijgen op het probleem:

- Zijn de opgaven van de proefwerken alleen geformuleerd binnen de aangeboden context van het lesmateriaal, en lijken ze veel op de voorbeeldopgaven, of wordt de context van het les- en oefenmateriaal vaak verlaten om te kijken of de transfer van de wiskunde A-leerstof geslaagd is?

Zoals reeds opgemerkt lijkt het erop dat veel docenten noch de contexten verlaten (of althans dicht in de buurt blijven), noch de doelstellingen volledig operationaliseren in de toetsen.

In dezelfde periode ('81-'82) is dankzij de bereidwilligheid van zowel docenten als leerlingen exploratief onderzoek gedaan naar meer adequater toetsingsmogelijkheden naast de gebruikelijke vormen van toetsing. Daarbij is er vanaf het begin vanuit een ruimere doelstelling van het toetsen uitgegaan dan veelal gebruikelijk in de dagelijkse schoolpraktijk: er wordt niet (alleen) getoetst 'om een cijfer te halen' zoals bijna alle leerlingen het ervaren. Natuurlijk wil zowel de docent als leerling meer: ze weten de zwakke punten waar nog wat aan gedaan moet worden.
Vrijwel ieder proefwerk meet wat een leerling *niet*

weet: hij kan geen kant op als hij het antwoord niet weet. Een motiverende invloed kan uitgaan van een toets die leerlingen in staat stelt zijn inzicht en creativiteit te tonen: ze kunnen laten zien wat ze wèl weten.
Verder kan een toets ook heel goed dienen om de prestaties van leerlingen te verbeteren: door het vereiste oriënteren dat bij veel van de gebruikte meer open toetsvormen mogelijk en/of gewenst is, leert de leerling er zaken bij terwijl bovendien "the likelihood that the learning will be of greater permanent value to the students [11]."
Bij het zoeken naar andere dan 'restricted-time-written-tests" stond dan ook voorop:
- zoveel mogelijk de doelstellingen van wiskunde A operationaliseren;
- de leerlingen de kans geven te laten zien wat ze weten; nìet wat ze niet weten;
- de leerlingen de kans geven creativiteit en flexibiliteit en inzicht te tonen;
- dat de kwaliteit van de toets niet in de eerste plaats bepaald wordt door de mogelijkheden tot mechanisch of streng genormeerd scoren;
- onderzoek welke waarde gehecht kan worden aan inter-subjectief-scoren.

In de afgelopen periode werden de volgende soorten van toetsing op enkele van de 52-Hewet-scholen uitgeprobeerd:
- mondeling;
- mondeling met half uur voorbereiding: lezen van artikel;
- essay aan de hand van korte-open-opdracht;
- thuistoets; opdracht in de vorm van een verhaal met een serie vragen op hoger dan het boekniveau thuis te maken;
- tweetrapstoets.

In dit artikel wil ik me voornamelijk beperken tot de laatste vorm van toetsen: de tweetrapstoets.

Tweetrapstoets

Prof. Van der Blij kwam met de idee om een toets te ontwerpen waarbij de leerlingen eerst op school de toets als een 'gewoon' proefwerk maken. Het was de leerlingen van te voren duidelijk gemaakt dat het niet de bedoeling was alle vragen uitgebreid te beantwoorden. Dit zou door de aard van de vragen en de beschikbare tijd onmogelijk zijn. Nadat het werk ingeleverd en nagekeken was – bij voorkeur binnen 1 à 2 dagen – kregen de leerlingen het werk terug met het cijfer en enkele aantekeningen. Vervolgens kregen ze drie weken de tijd om er in tweede instantie 'iets moois' van te maken.
Het waarom van de twee fases werd in eerste instantie ingegeven door de zorg omtrent de 'objectieve' scoring. Immers bij de in een eerder stadium afgenomen 'thuistoetsen' richtte de kritiek van docenten en toetsmakers zich vooral op dat facet. De leerlingen kregen inderdaad een pittige toets mee naar huis – ruim boven het niveau van het boek – en mochten zoveel hulp inschakelen als ze wilden. Alhoewel een dergelijke organiserende activiteit ook positief gewaardeerd kan worden, rijst de vraag welk gedeelte van de vaak voortreffelijke toets door de leerling zelf gemaakt is. In een aantal gevallen waar deze vraag gerechtvaardigd leek werd een afdoende antwoord gevonden door een kort, maar indringend gesprek met de betreffende leerlingen dat aan alle twijfel een einde maakte; de leerlingen beheersten de materie op dat moment volledig.
Dit contrôle-mondeling-onderzoek kan men ook institutionaliseren: één van de scholen zal volgend jaar het schoolonderzoek als volgt inrichten:
- eérst een thuistoets (scriptie/essay); indien mogelijk iedere leerling een andere;
- daarna een mondeling onderzoek over de scriptie.

Op deze wijze lijkt een redelijke indruk van het niveau van de leerlingen niet uitgesloten.
Een op dergelijke wijze ingericht schoolonderzoek is ook een tweetrapstoets, zij het van een andere aard als degene die in dit artikel centraal staat.

Het voordeel van de tweetrapstoets lijkt:
- De leerlingen krijgen eerst een restricted-time-written-test; hiervan wordt algemeen aangenomen dat deze redelijk objectief scoorbaar is. (Kijken wat de leerling *niet* kan).
- De leerlingen krijgen thuis de kans *zonder* tijdsdruk de toets in min of meerdere mate te verbeteren; uit te breiden etc. (Kijken wat de leerling *wèl* kan).
- De docent krijgt de kans om meer van de doelstellingen van wiskunde A te toetsen.

Na afloop en vergelijking met de thuistoets bleek nog een voordeel:

- Doordat de eerste fase een proefwerk is ligt het niveau van de eerste opgaven laag: er is een lage drempel. Bij de thuistoets bleek voor een enkele leerling de drempel te hoog.

Elders in dit artikel kunt u de toets in z'n geheel afgedrukt vinden. Voor hen die zich reeds verder in wiskunde A verdiept hebben is het misschien aardig eerst de toets grondig te bekijken.

Het *onderwerp* dat getoetst moest worden was nogal beperkt: 'matrices'. Beperkt, omdat daarvoor integratie met andere onderdelen niet mogelijk was.

De *leerlingen*: een twintig-man sterke groep van leerlingen die uitsluitend wiskunde A in hun pakket hebben, en een evengrote groep van bijna uitsluitend dubbelkiezers: deze leerlingen hadden zowel wiskunde A als wiskunde B in hun pakket.

De *leraar* had reeds eerder een groep leerlingen naar het wiskunde A-examen gebracht en vond beide groepen erg verschillend: de A-groep was zeer geanimeerd met het vak bezig en voelde goed aan waarom het ging. De A/B-groep vond A-wiskunde eenvoudig en soms nogal onzinnig: de bekende vraag: "is dit wel wiskunde?" werd hier frequent gesteld. Tempo en resultaten lagen bij de A/B-groep duidelijk boven die van de A-groep.

De *toets* gaat over bosbeheer. De *context* is echt; er wordt bij bosbeheer van het onderhavige model gebruik gemaakt. De afstand tot de bekende voorbeelden is aanwezig; weliswaar is er enige overeenkomst

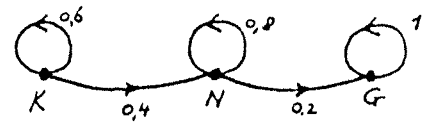
Twee-traps-toets

Een bosbouwer heeft een stuk land met 3000 kerstbomen. Vlak vóór Kerst wordt een gedeelte gekapt om te verkopen.
De bosbouwer heeft de bomen in drie *lengte*-categorieën ingedeeld:

korte, normale en *grote* bomen.

De korte boompjes zijn jonge aanplant die (vrijwel) niets waard is, de normale bomen brengen *f* 10,– per stuk op en de grote *f* 25,–.
Hij heeft, vlak na Kerst, 1000 korte, 1000 normale en 1000 grote bomen. Deze laat hij allemaal groeien tot vlàk vóór de volgende Kerst.

Uit ervaringen van collega's weet hij ongeveer hoe hard de bomen groeien in zo'n periode van (vrijwel) één jaar: 40% van de korte boompjes wordt van normale lengte, en 20% van de normale wordt groot.
Of, in een graaf:



Deze kan ook weergegeven worden in een matrix, de zogenaamde *Groeimatrix*:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & VAN & \\ K & N & G \end{array} & \\ NAAR & \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} & \begin{array}{c} K \\ N \\ G \end{array} \end{array}$$

► 1. Vul de groeimatrix G aan.

► 2. Bereken met behulp van G hoe het bos eruit ziet vlak vóór de volgende Kerst (als de bosbouwer niets kapt of bijplant).

► 3. Na het kappen èn bijplanten van (korte) jonge boompjes wil hij weer de beginsamenstelling B (1000 van iedere soort) hebben.
Hoeveel en van welke soort moet hij dan kappen?
Hoeveel jonge boompjes moeten er worden bijgeplant?

► 4. Het kappen van één boom kost *f* 1,–; het planten *f* 2,–.
Hoeveel brengt deze eerste Kerst hem op na aftrek van kosten?

De bosbouwer vraagt zich af of bovenstaande strategie wel zo handig is. Hij overweegt ook nog twee andere strategieën.
De drie op een rijtje gezet:

I Direct na 1 jaar kappen en bijplanten tot beginsamenstelling B (als boven).
II Pas na 2 jaar kappen en bijplanten tot beginsamenstelling B.
III Direct na 1 jaar alléén de grote bomen kappen (zoveel dat er 1000 overblijven) en hetzelfde aantal bijplanten; en na het tweede jaar óók alleen de grote kappen (boven de 1000) en bijplanten.

► 5. Welke van de drie strategieën levert *per jaar* het meeste op? (Beschouw alleen de eerste twee jaren)

De bosbouwer overweegt een bepaalde mestsoort te gebruiken waardoor de bomen veel sneller groeien. Experimenten wijzen erop dat de volgende groeimatrix tot de mogelijkheden behoort:

$$G_* = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$$

Werkblad behorend bij artikel: Toetsen bij wiskunde A

Twee-traps-toets

► 6. Verklaar hoe je aan de matrix kunt zien dat de bomen in deze situatie sneller groeien.

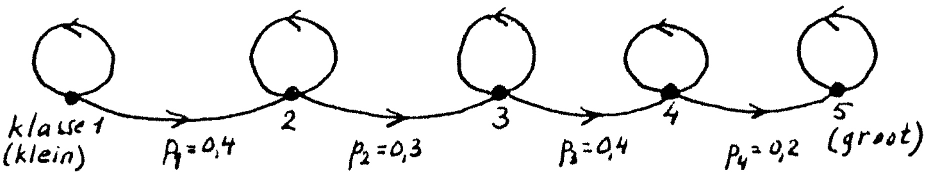
De bosbouwer is heel enthousiast over het idee van de snellere groei, maar twijfelt er intuïtief aan of hij na *iedere* Kerst door bijplanten van jonge korte boompjes wel weer z'n oorspronkelijke beginsamenstelling B terugkrijgt of kan krijgen. Want dat is de garantie voor een veilige bedrijfsvoering vindt hij.

► 7. Kan de bosbouwer na het kappen en bijplanten van jonge korte boompjes, uitgaande van G_*, de oorspronkelijke samenstelling terugkrijgen (dus na 1 jaar)?

► 8. De bosbouwer besluit de mest te verdunnen en wel in die mate dat hij ieder jaar alleen grote bomen behoeft te kappen om de oorspronkelijke verdeling terug te kunnen krijgen (en natuurlijk wel bijplanten).
Hoe kan de groeimatrix G_+ er dan uitzien?

► 9. Als jij de bosbouwer van advies mocht dienen op grond van alle voorgaande informatie, welk advies zou dat dan zijn?

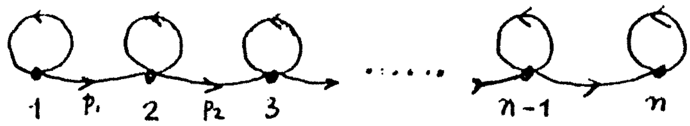
Een andere bosbouwer werkt met vijf lengteklassen:



$$B = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

► 10. Geef een beschouwing met daarin:
- de groeimatrix voor deze situatie;
- welk effect heeft deze matrix na 1 jaar door combinatie van groei, kappen en bijplanten;
- kan de oorspronkelijke verdeling na 1 jaar worden terugverkregen;
- zo niet: verander één der p_i zó dat het wèl kan;
- het effect als een boom in één jaar zo snel groeit dat hij bijvoorbeeld van klasse 3 naar klasse 5 gaat.

► 11. Zie je ook kans de matrix voor het algemene geval op te schrijven:



- Hoe kun je direct aan de matrix zien of de beginpopulatie

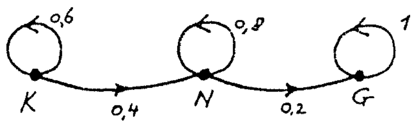
$$B = \begin{pmatrix} 1000 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1000 \end{pmatrix} \quad \text{terug te krijgen is?}$$

► 12. Wat zijn de beperkingen van dit model?
Welke verfijningen zou je aan kunnen brengen?

► 13. Strategie III (zie vraag 5) luidde:
'ieder jaar alleen de grote bomen (boven de 1000) kappen en eenzelfde kleine bijplanten.'
Bedenk wat het effect van deze strategie op de lange duur zal zijn.

met migratie en Lesliematrices, maar ook voldoende verschil.
Een gevaar dat een grote toets over één probleem bedreigt is de stapelvraag. De leerlingen moeten niet geblokkeerd raken als ze in het begin een vraag niet kunnen oplossen. De toets is daarom slechts 'locaal gestapeld'; iets verderop in de toets kan men weer verder.
Juist om o.a. stapelproblemen te voorkomen wordt het model reeds gebruiksklaar aangeboden; dat is de prijs die ook betaald moet worden door de beperkte tijd die in de eerste fase beschikbaar is. Maar er blijven genoeg doelen te toetsen. De eerste vragen zijn zeer eenvoudig en in korte tijd te beantwoorden. Zoals reeds eerder vermeld: de drempel is zeer laag bij deze toets. Dat wordt mede bewezen door de scores van de leerlingen.
Op de drie vragen:

1. Vindt bij de graaf:



de groeimatrix.

2. Bereken hoe het bos er volgend jaar uitziet.

3. Hoeveel bomen kunnen er gekapt en bijgeplant worden?

wordt een vrijwel perfecte score gehaald (95%). Ook het rekenwerk van de vierde vraag levert tijdens het proefwerk weinig problemen op. Vanaf de vijfde vraag wordt het lastiger. Hier wordt de leerlingen gevraagd drie strategieën te vergelijken.

De bosbouwer vraagt zich af of bovenstaande strategie wel zo handig is.
Hij overweegt ook nog twee andere strategieën.

De drie op een rijtje gezet:
I. Direct na 1 jaar kappen en bijplanten tot beginsamenstelling B (als boven).
II. Pas na 2 jaar kappen en bijplanten tot beginsamenstelling B.
III. Direct na 1 jaar alléén de grote bomen kappen (zoveel dat er 1000 overblijven) en hetzelfde aantal bijplanten; en na het tweede jaar óók alleen de grote kappen (boven de 1000) en bijplanten.

Opgave 5
Welke van de drie strategieën levert per jaar *het meeste op?*

De leerlingen hadden nauwelijks moeite met strategie I en II, maar des te meer met III. De problemen waren: je moet zo goed lezen, dat gaat slecht onder tijdsdruk en de redactie is misschien niet optimaal.
De vragen 5 en 6 zijn weer betrekkelijk eenvoudig: de leerlingen krijgen een nieuwe matrix aangeboden en wel:

$$G_* = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$$

in plaats van:

$$G = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ze moeten nu uitleggen waarom in het geval dat G_* de groeimatrix is, de groei sneller plaatsvindt dan bij G.
Dit levert voor de leerlingen geen problemen op, maar wel voor de bosbouwer: hij kan zijn beginpopulatie van 1000 kleine, 1000 middel en 1000 grote bomen niet meer terugkrijgen door bijplanten van kleine en kappen van grote en middelgrote bomen:

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 900 \\ 1500 \end{pmatrix}$$

Door kappen (500 grote) en bijplanten (400 kleine) is de populatie:

$$\begin{pmatrix} 600 \\ 900 \\ 1500 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ -500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 900 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

De bosbouwer wil graag na iedere Kerst de driemaal duizend populatie terughebben. De leerlingen wordt gevraagd de mest (die tot G_* leidde) zodanig te verdunnen dat een groeimatrix G_+ het resultaat is die wèl de drie-maal-duizend populatie teruggeeft.
De meest voorkomende oplossing:

$$G_+ = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}$$

Bij deze vraag haakten al heel wat meer A-leerlingen af dan A/B leerlingen. Datzelfde gebeurde bij vraag 11: de generalisatie van de bosbouwmatrix.
De vragen:
- Welk advies zou je de bosbouwer geven? (9)
- Geef een beschouwing met daarin:
  - de groeimatrix (5 klassen);
  - effect na één jaar;
  - of de oorspronkelijke verdeling terug kan keren;
  - een alternatieve matrix vinden als dit *niet* kan;
  - het effect als één boom een klasse overslaat (10).
- Geef de beperkingen van dit model en geef mogelijke verfijningen (12) alsmede:
  - het effect van strategie III op lange termijn (13);

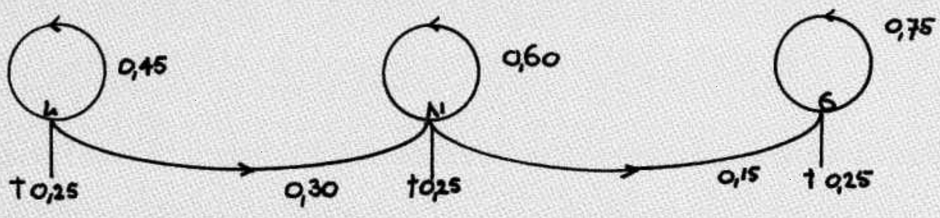
werden nauwelijks beantwoord tijdens de proefwerkfase.

Het antwoord van een leerling (1)

Dit is het antwoord van een leerling op vraag 12 van de tweetrapstoets:

Aan dit model van de bosbouwer zitten wel een heleboel beperkingen nl.:

- Men gaat ervan uit dat alle bomen verkocht zullen worden, men houdt dus geen gekapte bomen over → geen verlies.
- Men staat er niet bij stil dat er o.i.v. concurrentie halverwege de verkoop de prijs zal moeten dalen, anders verkoopt men niet alle bomen, de inkomsten kunnen dan minder zijn per boom.
- Ook wordt geen rekening gehouden met storingen in een groeiproces, niet ieder jaar zullen de bomen even hard groeien, door bv:
  - insectenplaag;
  - zure regen;
  - droogte etc.
- Als door bijvoorbeeld zure regen een kwart van de bomen aangetast wordt, zal de opbrengst daarvan verloren gaan, terwijl er wel kosten voor het kappen zijn. Het gevolg voor bosbouwer 1 zal zijn:



- Hij zal ook geen kunstmest toe mogen voegen als het onweert, want er zou dan wel eens zure regen naar beneden kunnen komen en dan krijg je denitrificatie, de kunstmest spoelt uit naar de dichtstbijzijnde sloot en je krijgt waterbloei, want je bemest de sloot, heel veel planten in de sloot, de onderste gaan rotten onder zuurstofarme omstandigheden en je krijgt CH_4 en H_2S-gas. Hier moet de bosbouwer ook wat aan doen, dus zullen zijn opbrengsten ook hierdoor omlaag gaan.

Bij zure regen alleen zal zijn opbrengst zijn:
De opbrengst die hij had bij I (ƒ 5800) en daarvan afgetrokken $(\frac{1}{4}\cdot G + \frac{1}{4}\cdot N)\cdot$ ƒ 1,– (voor het kappen) + (1000 − het aantal jonge bomen dat je dan weer bij moet planten)$\cdot$ƒ 2,– + de eventuele verwerkingskosten van besmette bomen.

Je kan dit ook via een matrix berekenen, groeimatrix I

$$I = \begin{array}{c} \\ K \\ N \\ G \\ \dagger \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} K & N & G & \dagger \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}30 & 0{,}60 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}75 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \dagger = \text{dood}$$

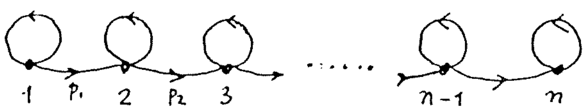
$I \times B$:

$$\begin{pmatrix} 0{,}45 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}30 & 0{,}60 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}75 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 300 + 600 \\ 150 + 750 \\ 250 + 250 + 250 \end{pmatrix}$$

Open

Interessant is om de vragen 10, 11 en 12 onderling met elkaar te vergelijken. En dan met name de mate van openheid. Ter voorkoming van misverstanden: onze definitie van open en gesloten sluit niet aan bij die van vele toetsdeskundigen die iedere niet-multiple-choice vraag al snel tot een open vraag verheffen.
De opgave: *Los op* $4.6^x = 100$ is ook gesloten, zelfs als deze opgave ingekleed is. Er is immers geen enkele vrijheidsgraad voor wat betreft de mogelijkheid die de leerling heeft.
Bezien we nu vraag 11, 10 en 12 van deze tweetrapstoets in deze volgorde op mate van openheid en de volgens velen daarmee samenhangende mogelijkheden tot objectief scoren of examenrijpheid.

Opgave 11
Zie je ook kans de matrix voor het algemene geval op te schrijven:



Hoe kun je direct aan de matrix zien of de beginpopulatie:

$$B = \begin{pmatrix} 1000 \\ \vdots \\ 1000 \end{pmatrix}$$

terug te krijgen is?

Deze opgave is bijna gesloten.

Alhoewel de leerling bij de tweede vraag nog een behoorlijke vrijheid van handelen heeft. Een dergelijke vraag heeft waarschijnlijk nog wel een kans om in enigerlei vorm op een examen te komen. (Natuurlijk niet zoals in de toets: "Zie je ook kans..." kan natuurlijk niet, want het antwoord zou 'ja' of 'nee' mogen zijn. Geen leerling die dit doet, maar...).

Opgave 10
Geef een beschouwing met daarin:
- *de groeimatrix voor deze situatie;*
- *welk effect heeft deze matrix na 1 jaar door combinatie van groei, kappen en bijplanten;*
- *kan de oorspronkelijke verdeling na 1 jaar worden terugverkregen;*
- *zo niet: verander één de* p_i *zó dat het wèl kan;*
- *het effect als een boom in één jaar zo snel groeit dat hij bijvoorbeeld van klasse 3 naar klasse 5 gaat.*

De vraag is natuurlijk al heel wat opener. Ik zou zeggen van de tweede orde. Dit lijkt op een wiskunde A-examen binnen de huidige traditie vrijwel geen kans te maken. Onterecht: op het economie- en geschiedenisexamen zijn zulke vragen dit jaar (1985) wel gesteld, en al naar gelang het inhoudelijke belang of toetsbelang prevaleert, stak het wiskunde A-examen daarbij ongunstig of gunstig af.

Opgave 12
Wat zijn de beperkingen van dit model?
Welke verfijningen zou je aan kunnen brengen?

Een dergelijke vraag gaat velen te ver. Velen, maar de leerlingen niet. Bij een dergelijke vraag komen alle door Van Hiele, NCTM, Cockcroft e.d. belangrijke punten zoals inzicht, creativiteit, flexibiliteit aan bod. Dit komt bij de huidige examens zelden voor – wel bij Nederlands opstel – maar later in de maatschappij des te vaker.

Resultaten

Voor menig ingewijde was het overigens verrassend te zien hoeveel de leerlingen afkregen en hoe goed dat werd gedaan: vooral voor de A/B-leerlingen was deze toets aan de eenvoudige kant. Gemiddeld scoorden de leerlingen bijna een 7½, terwijl de A-leerlingen niet verder kwamen dan een zesje.
Spannend was het om te zien wat de tweede fase opleverde. Niet alleen werd uitgezien naar de resultaten, maar ook naar de reacties van de leerlingen.
Welnu, de resultaten waren indrukwekkend en de leerlingen die de eerste ronde gefaald hadden, hebben de kans om één en ander te corrigeren met beide handen aangegrepen. Niet alleen de inhoud was vaak uitstekend, maar ook de vormgeving en verzorging. En bovendien hadden sommige leerlingen verder dan hun matricesneus gekeken en een flinke scheut grafische verwerking en/of automatische gegevensverwerking in hun verhaal gestopt. Bovendien hadden een aantal leerlingen kans gezien de antwoorden impliciet in de vorm van een essay te geven.
Elders treft u een dergelijk opstel aan, van een in dit geval modale leerlinge.
Tenslotte, voor wat het leerlingenwerk betreft, het antwoord van één van de leerlingen op vraag 12. (Zie bijgevoegde uitwerking).

Het zal duidelijk zijn uit het bovenstaande antwoord dat deze leerlinge de geboden kans redelijk volledig benut heeft: ze laat weten goed over de zaak nagedacht te hebben, laat zien dat wiskunde A meer is dan wat regeltjes toepassen en rekenvaardigheid. Kortom, ze maakt deze toets zó dat zowel het vak als de leerling helemaal uit de verf komt.

Scoren

Het door iedereen naar voren gebrachte probleem van objectieve cijfering blijft, maar de vraag is in hoeverre dit een ernstig probleem is. Voor leerlingen is het zeker niet het grootste probleem. Zeker niet bij een tweetrapstoets, waarbij de eerste fase volgens velen redelijk objectief te scoren is. Maar de tweede fase, hoe zit het daarmee? De docent kijkt natuurlijk voornamelijk naar de inhoud.
Zo maakte de docent een lijstje waarin hij wat positieve en negatieve punten naar voren bracht. Dit lijstje bepaalde in de eerste plaats het cijfer, maar de uitvoering speelde wel een rol. Dit was de leerlingen van te voren ook meegedeeld. Er waren echter geen regels vastgesteld van: de inhoud $x\%$, de vorm $y\%$...

Het antwoord van een leerling (2)

Zijn populatie wordt dan:
- kleine bomen 450
- normale bomen 900
- grote bomen 900
- dode bomen 750

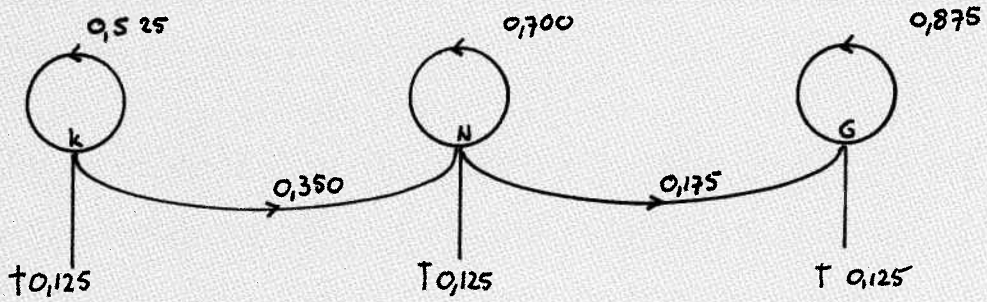
kosten kappen *f* 1,–
kosten planten *f* 2,–
kosten voor de verwerking van besmette bomen *f* 2,–

hij moet kappen 750 besmette bomen; de kosten $1 \times 750 + 2 \times 750 =$	*f* 2250,–
als hij dan genoegen neemt met het niet terugkomen op beginsamenstelling B van de normale en grote bomen, heeft hij alleen maar $1000 - 450 =$ 550 boompjes te planten, kosten zijn 550×2	*f* 1100,– +
	f 3350,–

hij heeft geen inkomsten, dus een verlies van *f* 3350,– gulden.

Stel dat door het beleid van de EEG de vervuiling minder wordt, dus ook de zure regen minder wordt, hij neemt af met 50%

In graafvorm:



In matrixvorm:

$$I_* = \begin{array}{c} \\ K \\ N \\ G \\ \dagger \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} K & N & G & \dagger \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}525 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}350 & 0{,}700 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}175 & 0{,}875 & 0 \\ 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}125 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Zijn populatie voor de vorige kerst was:

$$\begin{pmatrix} 450 \\ 900 \\ 900 \end{pmatrix} \text{ hij plant 550 jonge boompjes, zijn populatie } B_* = \begin{pmatrix} 1000 \\ 900 \\ 900 \end{pmatrix} \text{ wordt dan}$$

Zijn populatie nu (vlak voor kerst):

$B_* \times I_*$

$$\begin{pmatrix} 0{,}525 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}350 & 0{,}700 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}175 & 0{,}875 & 0 \\ 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}125 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1000 \\ 900 \\ 900 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 525 \\ 350 + 630 \\ 157{,}5 + 787{,}5 \\ 125 + 112{,}5 + 112{,}5 \end{pmatrix}$$

etc. die toetsenmakers zo gaarne zien.

Enkele leerlingenbeoordelingen:
+ doorgroei meerdere klassen;
+ grafieken stabiele opbouw;
+ afsterven uitgewerkt;
– rekenfoutjes.

– grotere winst verdunde mest alleen opgemerkt;
– 5 klassen aanpassing niet volledig;
+ doorgroei meerdere klassen;
+ boomsterfte.

– doorgroei niet als voorbeeld;
+ verzorging werkstuk;
– uitwerking van 13 (conclusie wèl goed);
+ verdunde mest, meerdere strategieën; goede conclusie.

Veel van de toetsen zijn rondgestuurd aan docenten ter beoordeling. Op deze manier hopen we meer inzicht te krijgen in de objectiviteit van de scores.
De resultaten van de tweede fase lagen hoog en in tegenstelling tot bij de eerste fase, ontliepen de resultaten van de A-groep en van de A/B-groep elkaar nu niet veel – minder dan een half punt. Daarover later meer.

Reacties

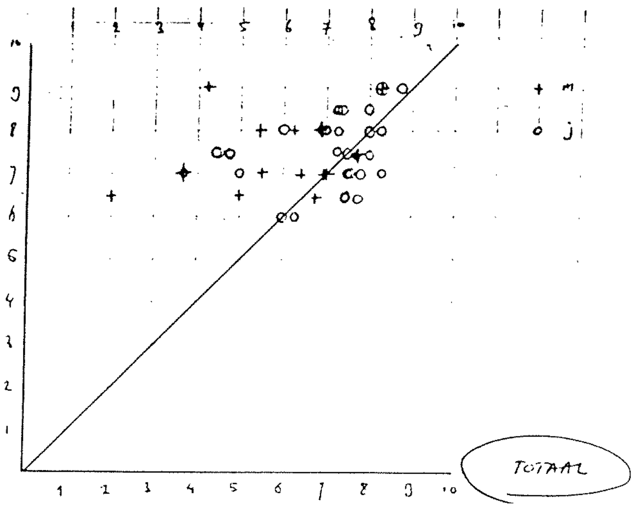
De reacties van de leerlingen waren nogal verschillend. Daarbij liep direct in het oog dat de A-groep veel enthousiaster reageerde dan de A/B-groep. Gelukkig bleek de oorzaak daarvan niet te liggen in het feit dat A-leerlingen hun cijfer meer hadden kunnen ophalen dan de A/B-leerlingen. Neen, de argumenten waren veel inhoudelijker van aard. Veel gehoord: "je leert er veel meer van", of "je kunt je inzicht beter tonen", of "het is niet fout of goed, je kunt meer kanten op".

Deze reacties kwamen van de 'echte' A-leerlingen. De A/B-ers waren heel wat minder enthousiast. Zij gebruikten wèl het argument dat ze toch al een goed cijfer hadden en zo'n tweede fase overbodig en weinig wiskundig werk was. Maar er waren er ook die vonden dat de tweede fase wel zinvol was: het was alleen niet duidelijk hoe ver je moest gaan. Gevraagd naar de wenselijkheid van herhaling reageerde de A-klas overweldigend positief: 3 leerlingen vonden het redelijk, de rest heel leuk en 'eerlijk' om b.v. één keer per kwartaal te toetsen naast de gewone proefwerken. Bij de A/B-groep vond een drietal leerlingen het maar niets; een evengroot aantal leuk en de rest was redelijk positief gestemd. Het mocht dan wel wat moeilijker vond men.

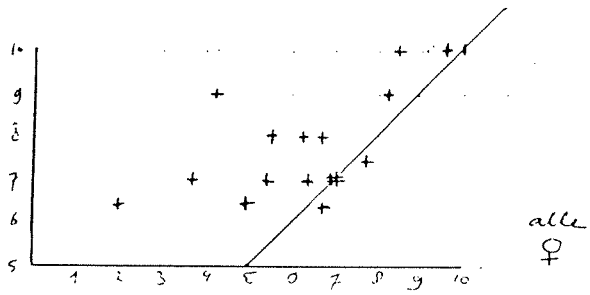
Cijfers

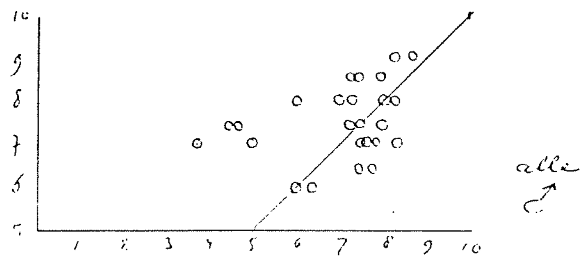
Als we de resultaten van deze 40 leerlingen wat nader bekijken, vallen enkele zaken op. Op zich zou het misschien wat overdreven zijn daar aandacht aan te besteden, ware het niet dat deze resultaten voorgaande indrukken van andere alternatieve toetsen binnen wiskunde A lijken te bevestigen.

De volgende grafiek toont het verband tussen de cijfers van de eerste ronde en die van de tweede:



Duidelijk is dat de tweede ronde hogere resultaten oplevert, maar dit is geheel volgens verwachting bij een tweestapstoets. Splitsen we de resultaten uit naar jongens en meisjes, dan krijgen we:





Hieruit blijkt dat – althans bij deze toets – de meisjes vooral 'geprofiteerd' hebben van de tweede fase. Hun gemiddelde lag in de eerste fase duidelijk onder dat van de jongens, maar bij de tweede fase nauwelijks. De beste werkstukken waren van meisjes.
Ook valt een uitsplitsing te maken naar alleen A-leerlingen en A/B-leerlingen, alhoewel dit niet zonder gevaar is vanwege het geringe aantal meisjes (5) in de A/B-groep.

Het antwoord van een leerling (3)

De populatie wordt dan:

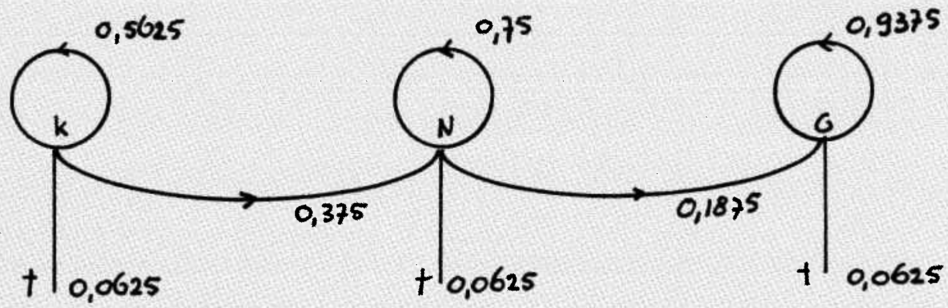
– kleine bomen	525	
– normale bomen	980	
– grote bomen	945	
– dode bomen	350	

$$B_+ = \begin{pmatrix} 525 \\ 980 \\ 945 \\ 350 \end{pmatrix}$$

Hij heeft nog steeds verlies, maar al minder, namelijk:

– voor de besmette bomen $f\,2,– \times 350 + f\,1,– \times 350$	f 1050,–
– en jonge boompjes planten $(1000 - 525) \times f\,2,–$	f 950,– +
een totaal verlies van	f 2000,–

Als het volgende jaar de zure regen weer met 50% afneemt, krijg je:



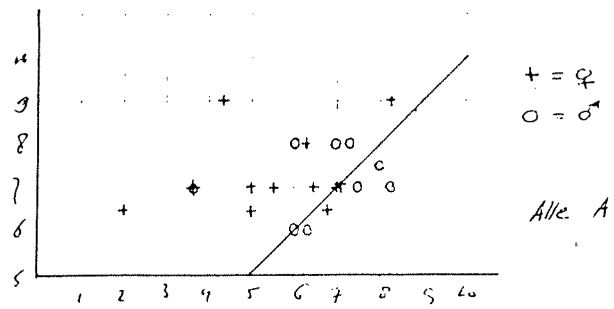
$$I_+ = \begin{array}{c} \\ K \\ N \\ G \\ † \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} K & N & G & † \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}5625 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3750 & 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1875 & 0{,}9375 & 0 \\ 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

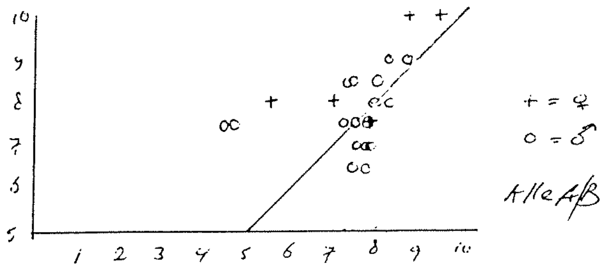
Zijn populatie wordt dan	I_+	$\times$	B_+
– kleine bomen	295		563
– normale bomen	932		1085
– grote bomen			1070
– dode bomen			183

Hij kan nu dus ook weer bomen kappen om deze te verkopen

– inkomsten $(1085 - 1000) \times f\,10,– + (1070 - 1000) \times f\,25,–$	f 2600,–
– kosten $183 \times f\,2,– + f\,1,– \times 183 + f\,1,– \times (70 + 85) + (1000 - 563) \times f\,2,–$	f 1578,– +
inkomsten	f 1022,–

Na verloop van tijd zal hij dan zijn geleden verlies weer kunnen dekken.





Zo we al een conclusie mogen trekken, lijken de A-leerlingen meer 'geprofiteerd' te hebben dan de A/B-leerlingen. Dit wordt voor een (groot) deel veroorzaakt door de meisjes.

Zoals reeds opgemerkt strookt dit met eerdere ervaringen bij 'alternatieve' manieren van toetsen: vooral meisjes lijken zich beter te ontplooien tijdens een thuistoets, tweetrapstoets, essay, of mondeling. Nogmaals, de steekproeven zijn klein, dus al te veel waarde kan men niet aan deze conclusies hechten, maar de trend is onmiskenbaar.

Slot

Doel van het onderzoek naar de mogelijkheden van alternatieve toetsen was – het is reeds eerder opgemerkt – meer recht te doen aan de doelstellingen van het vak wiskunde A. Daardoor doet men vanzelf meer recht aan de leerlingen. Wiskunde A is ontworpen vanuit de filosofie van de realistische stroming. Dat wil zeggen, dat een belangrijke rol is weggelegd voor de intuïtie en voor het globale denken. Terwijl bij de wiskunde I de nadruk altijd gelegen heeft en nog ligt bij het logisch analytisch digitale denken, lijkt het erop dat bij wiskunde A ook het analoge-globale denken een belangrijke rol speelt. En intuïtie wordt niet voor niets wel een vrouwenlogica genoemd. [12]. Ligt het mathematiseren vrouwen beter?
Daarop een antwoord geven gaat mij te ver, maar het lijkt er wèl op dat bij wiskunde A een minder eenzijdig beroep wordt gedaan op het denken van leerlingen dan bij wiskunde I. En dat zou best mogen blijken uit de toetsen.

Literatuur

[1] Rapport van de Werkgroep van Advies Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde Een en Twee, Staatsuitgeverij, Den Haag, 1978.
[2] Gabrielle Kaiser deed een onderzoek naar de mate waarin toegepaste wiskunde (g)een plaats heeft gevonden in het reguliere secondaire onderwijs. Zij is verbonden aan de Universiteit van Kassel, West-Duitsland.
[3] Lange Jzn, J. de, *Contextuele problemen*, Euclides, 55e jrg pp 50-60.
[4a] Lange Jzn, J. de, *Vlieg er eens in*, IOWO/OW & OC, Utrecht 1980.
[4b] Jacobs, H.J. e.a., *Moderne wiskunde* 4e ed, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1983.
[5] Lange Jzn, J. de, *Exponenten & Logaritmen*, Educaboek, Culemborg 1984.
[6] Lange Jzn, J. de, M. Kind, *Matrices*, Educaboek, Culemborg 1985.
[7] Hiele, P.M. van, *De problematiek van het inzicht*, proefschrift RU, Utrecht 1957.
[8] NCTM, *An Agenda for Action*, Reston 1980.
[9] Cockcroft, W.H., *Mathematics Counts*, HMSO, London, 1982.
[10] Lange Jzn, J. de (ed.), *Hewet en Toets 2*, OW & OC, Utrecht 1984.
[11] Gronlund, N., *Constructing Achievement Tests*, Englewood Cliffs 1968.
[12] Watzlawick, P., *Wie weet is het ook anders*, Van Loghum Slaterus, Deventer 1978.