In en uit het lood

M. Kindt
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

De stelling over loodrechte stand van lijn en vlak wordt bij de invoering van het examenvak ruimtemeetkunde op het v.w.o. weer actueel. In de stereometrieboeken van vroeger werd de stelling uitvoerig bewezen, de vraag is of we dit nu ook nog willen.
Het aanbieden van een concrete situatie zoals het oprichten van een mast geeft de leerling vermoedelijk meer inzicht dan welk formeel bewijs ook. Het verdient aanbeveling om tegelijkertijd met loodrechte stand ook scheefstand van lijn ten opzichte van vlak te behandelen; dat laatste biedt de mogelijkheid van een meetkundige verklaring van de variërende daglengte op aarde.

Summary

The theorem about perpendicularity of line and plane plays a fundamental role in space geometry. How to prove this theorem in the classroom? Turning a flagpool until the vertical position gives an intuitively clear demonstration and one can wonder if a formal proof supplies to more understanding.
Hand in hand with orthogonality, skewness between line and plane can be tackled and this leads to an interesting application: a geometrical reason for seasons.

Bij het leren omspringen met de stelling van Pythagoras (ik denk nu aan de 2e of 3e klas v.o.) is een uitstapje naar de ruimte heel aantrekkelijk.
Een bekende aardige vraag is bijvoorbeeld: hoe lang is de langste stok die, niet gebogen, in het lokaal past? Voor de ongeoefende leerling geen eenvoudige opgave, maar het probleem daagt uit en roept een variatie aan oplossingsstrategieën op, wat wil een mens nog meer! [1] [2].
Uiteindelijk zal de oplossing, 'tweemaal Pythagoras', in het zonnetje worden gezet, want daar was het tenslotte om begonnen. Vermoedelijk zal er geen leerling zijn die daarbij twijfelt aan de rechtheid van de hoek tussen vloerdiagonaal en een opstaande ribbe.

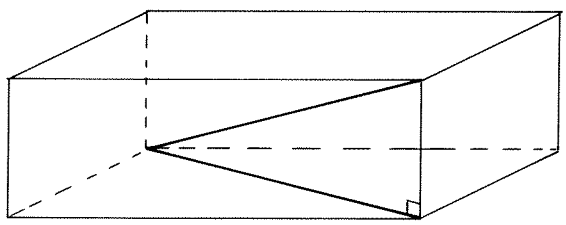


Fig. 1

Wordt de hulpdiagonaal in zij- of achterwand gekozen, dan zijn er misschien wèl twijfelaars in de klas...

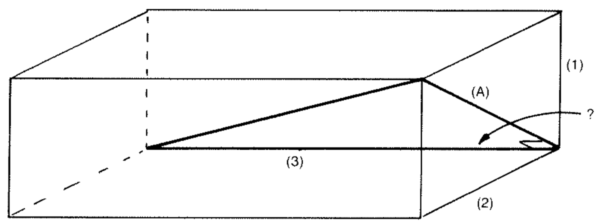


Fig. 2

Totdat er één op het idee komt het 'lokaal' te kantelen, zodat die diagonaal toch weer op de vloer komt.
In het stereometrie-onderwijs van vóór 1968 werd loodrechte stand heel serieus genomen. Bij een sommetje als hierboven moest wel even worden opgemerkt dat de ribbe (3) loodrecht staat op de ribben (1) en (2) alvorens de driehoek waar het om begonnen was rechthoekig te noemen. De stelling: '*een lijn die loodrecht staat op twee snijdende lijnen in een vlak, staat loodrecht op alle lijnen in het vlak*' stond in hoog aanzien. En terecht.
In het tijdperk van de vectormeetkunde is deze stelling wat naar de achtergrond gedrongen door een even handig als fraai instrument: het *inprodukt* van vectoren.

Wie echter in bovenstaand geval redeneert, na coördinaten te hebben ingevoerd, dat (3) loodrecht op (4) staat omdat het inprodukt van (0, b, 0) en (a, 0, c) gelijk is aan nul, pleegt boerenbedrog. Althans de kans daarop is groot. Want berust de inproduktformule $(\vec{v} \cdot \vec{w}) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$ in menig schoolboek niet op de cosinusregel, waarbij zonder schroom gebruik wordt gemaakt van de-langste-stok-in-het-lokaal-formule, $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$, en is daarmee de vicieuze cirkel niet gesloten? [3].
Die cirkel kan wel worden doorbroken, bijvoorbeeld door de inproduktformule te baseren op de bilineaire eigenschappen:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{cases}$$

maar daarbij moet worden beseft dat, uitgaande van de 'arbeid-definitie' van het inprodukt, de eerste van de twee wetten ook weer berust op de stelling over loodrechte stand van lijn en vlak. Zie maar:

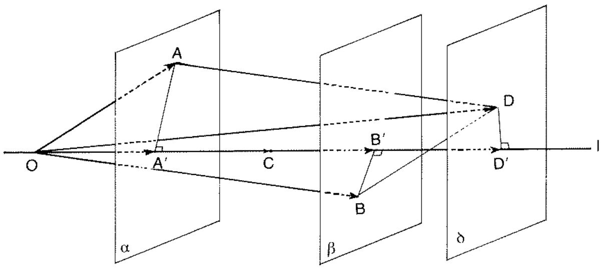


Fig. 3

D is het vierde hoekpunt van het parallellogram op $\vec{OA}$ en $\vec{OB}$.
Het vlak δ door D dat parallel is met AA' ($\perp l$) en BB' ($\perp l$) bevat alle richtingen loodrecht l, dus ook DD'.
Uit OA' = B'D' volgt dan de distributie-regel voor het inprodukt.
Ook in de vectormeetkunde kan men niet goed om de lijn-loodrecht-vlak-stelling uit de stereometrie heen, al is dat niet altijd onderkend.
In de nieuwe ruimtemeetkunde die zowel elementen van de stereometrie als de vectormeetkunde zal bevatten, zal de stelling zeker expliciet aan de orde moeten komen.
De vraag is dan of de stelling moet worden bewezen en zo ja, hoe streng.

Intuïtieve aanpak

De opstaande ribbe van een balk staat loodrecht op de bodem. Dat zie je zó. Zoals je ook zó ziet of de korfbalpaal netjes recht op het veld staat, of de schoonspringster netjes recht in het water duikt, of de spijker netjes recht in de muur gaat, of... .

Hoewel, dat met die spijker is misschien toch wat lastiger omdat de muur niet horizontaal is. Een timmerman die het niet in de vingers heeft, zal geneigd zijn om, behalve van boven, ook nog even van opzij te kijken of het wel recht gaat. Van twee kanten is voldoende, als hij over timmermansogen beschikt. Waarom van twee kanten?
In *Lessen in Ruimtemeetkunde 1* (nieuwe versie) [4] komt de volgende situatie voor.
De vlaggemast op de tegelvloer is met even lange touwen getuid en maakt dus een rechte hoek met de lijn ZN.

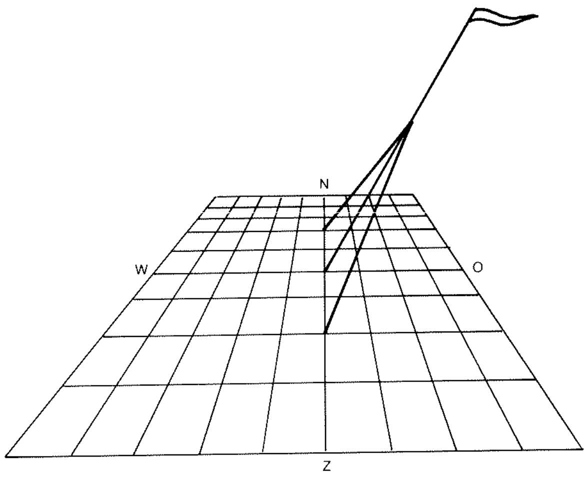


Fig. 4

Loodrecht op één richting betekent nog niet 'in het lood'. Er zijn meer touwen nodig, om er voor te zorgen dat de mast ook loodrecht op OW komt te staan.

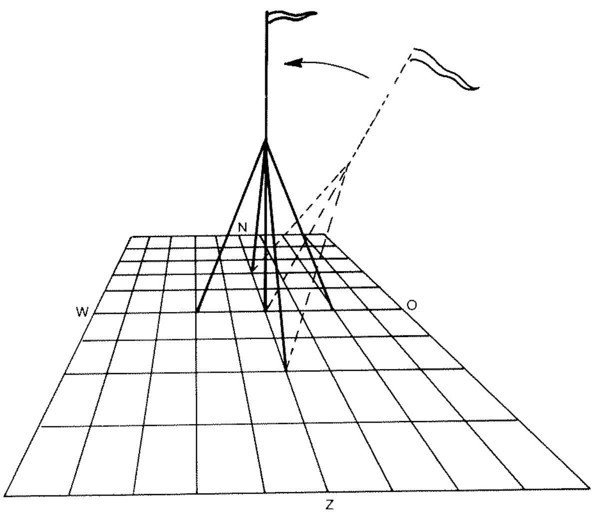


Fig. 5

Rechterop kan niet. Natuurlijk hadden we de mast ook in een ander vlak kunnen draaien. Met hetzelfde resultaat. 'Loodrecht op twee richtingen' garandeert 'loodrecht op alle richtingen'. Hiermee is de stelling, met een vleugje dynamiek, op intuïtieve wijze inzichtelijk gemaakt.

Grappig is het dat de situatie van de mast met de tuitouwen ook een waterdicht formeel bewijs oplevert.
Dat geef ik maar even als toetje.
Noem het bevestigingspunt van de touwen op de mast M en de bevestigingspunten op de vloer A, B, C en D.
Vierhoek ABCD is in de hier getekende situatie een vierkant, maar als, wat zou moeten, twee willekeurige richtingen op de vloer zijn gekozen, in elk geval een parallellogram.
Kortom: ABCD is puntsymmetrisch. Dat betekent dat ABCD elke lijn op de vloer, die door het voetpunt van de mast gaat, in twee gelijke stukken OP en OQ verdeelt.

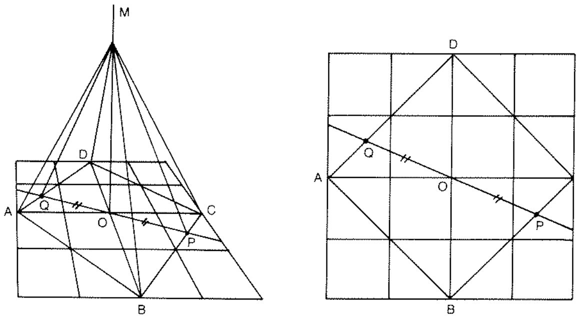


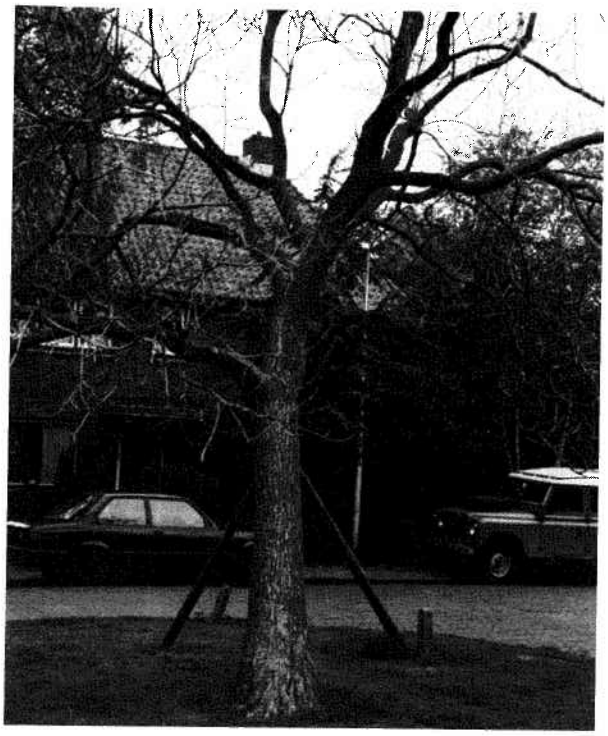
Fig. 6

Omdat AQ = CP (vanwege de puntsymmetrie!) en $\triangle$ ADM $\cong$ $\triangle$ CBM volgt nu MP = MQ. Uit OP = OQ en MP = MQ weten we: OM $\perp$ PQ.
Het was voor mij heel verrassend en stimulerend te ervaren dat ik, werkend aan een nieuwe versie van *Lessen in Ruimtemeetkunde*, dit bewijs vond vanuit de situatie met de mast. Eerst was er de mast en toen het bewijs, niet andersom.

Scheefstand

Kenmerkend voor een rechtopstaande mast is dat de hoek met de horizon steeds 90° is, vanwaar je ook kijkt.
Bij een scheve hoek is het juist zó dat de hoek tussen mast en horizon varieert met de positie van de waarnemer.
Ja, in figuur 4 is het zo dat je vanuit O en W de mast zelfs rechtop ziet. (Vanuit 'O en W' worden scheve dingen recht gezien, dat wist u toch al?) Bij schoonspringwedstrijden is de positie van de jury van belang en de plaats recht tegenover de springtoren is de minst geschikte als het om de beoordeling van het neerkomen in het water gaat.
De vraag dringt zich op hoe scheefstand te meten. Leuke vraag om zo open aan de klas voor te leggen.
Een oplossing kan zijn: zoek die plek van waaruit je de mast het scheefst ziet, dus waar de hoek met de horizon het kleinst is. Misschien heeft de fotograaf van de boom dat gedaan,

nadat hij eerst deze foto had gemaakt.



Een andere oplossing: kijk hoeveel graden mast of boom uit het lood staan. Met andere woorden: meet de hoek met de normaal.

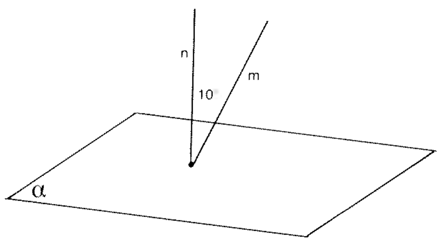


Fig. 7

'10° uit het lood' betekent: hoek tussen m en α = 90° − 10° = 80°.

Bij de langste stok in het lokaal zal de leerling geneigd zijn de helling te meten met behulp van opstaande ribbe en vloerdiagonaal. De hellingshoek is dan de hoek tussen de lijn en zijn projectie op het vlak. De drie methoden komen op hetzelfde neer.
Dat de kleinste hoek die een lijn m met vlak α maakt de hoek tussen m en zijn projectie is, dat is weer iets dat je zó ziet maar niet onmiddellijk naadloos kan verklaren.
De verklaring berust overigens weer op de lijn-loodrecht-vlak-stelling.
Bijvoorbeeld:

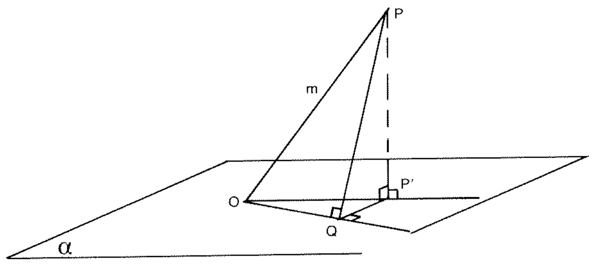


Fig. 8

PQ > PP′ ⇒ sin ∠ POQ > sin ∠ POP′.
Of met gebruikmaking van het inprodukt:
de cosinus van de hoek tussen de vectoren (1, 0, a) en (1, b, 0) is

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+b^2}}$$

en dat is bij vaste a maximaal voor b = 0; bij de maximale cosinus hoort de minimale hoek.
De veranderlijkheid van de hoek tussen een draaiende lijn in een vlak α en een lijn m die scheef ten opzichte van dat vlak staat, heeft vèrgaande consequenties voor het leven op aarde.
Neem voor α de ecliptica en voor m de aardas die zoals bekend 23½° uit het lood staat.
Bij zijn jaarlijks reisje om het punt Z zon varieert de hoek met de zonnestraal van 66½° via 90° tot 113½° en vice versa. Een eenvoudige meetkundige analyse leert dat de hoek tussen zonnestraal en aardas van invloed is op de daglengte, op elke plaats buiten de evenaar.

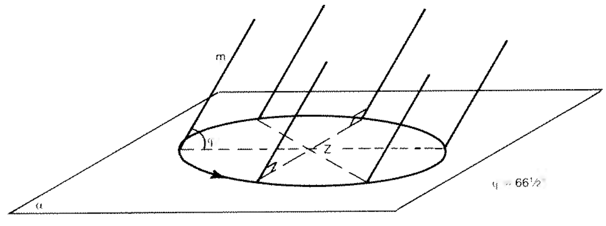


Fig. 9

In de stereometrie van weleer zou zo'n aardse toepassing niet hebben misstaan, maar aan zulk werk kwam men niet toe: het systeem had het te druk met zichzelf.
In de recente vectormeetkunde zijn leraar en leerling steeds meer verstrikt geraakt in de netten van algebraïsche relaties. De met ingang van 1986 in te voeren ruimtemeetkunde biedt kansen voor een enigszins realistisch meetkunde-onderwijs. De ervaringen in de HEWET-experimenteer-scholen zijn, hoe kan het anders, zeer gevarieerd. Vaak hoor ik dat leerlingen het zeer pittig vinden, maar tegelijk heel enthousiast zijn: 'Ze werken door de bel heen'. Het welslagen van het vak hangt mede af van de bereidheid van de leraar om meetkundige zaken concreet te willen maken, materialen en modellen te willen gebruiken, op toepassingen te willen ingaan.
Van de vectormeetkunde kan men zeggen dat zij zich te eenzijdig heeft ontplooid de afgelopen jaren, dat zij enigszins uit het lood is geraakt. De ruimtemeetkunde, beoogt in elk geval een meer evenwichtig meetkundeprogramma te bieden. Een evenwicht tussen werkelijkheid en wiskunde, intuïtie en vaardigheid, handelen en begrijpen, construeren en rekenen.
Kortom: een programma in het lood.

Literatuur

[1] Kindt, M., *Kent u Pythagoras*. Wiskrantboek 13 t/m 24, p. 227, 228.
[2] Polya, G., *How to solve it*.
[3] Kindt, M. en J. de Lange, *Oriëntatie op ruimtemeetkunde*, Educaboek.
[4] Kindt, M. en J. de Lange, *Lessen in Ruimtemeetkunde 1*, Educaboek.

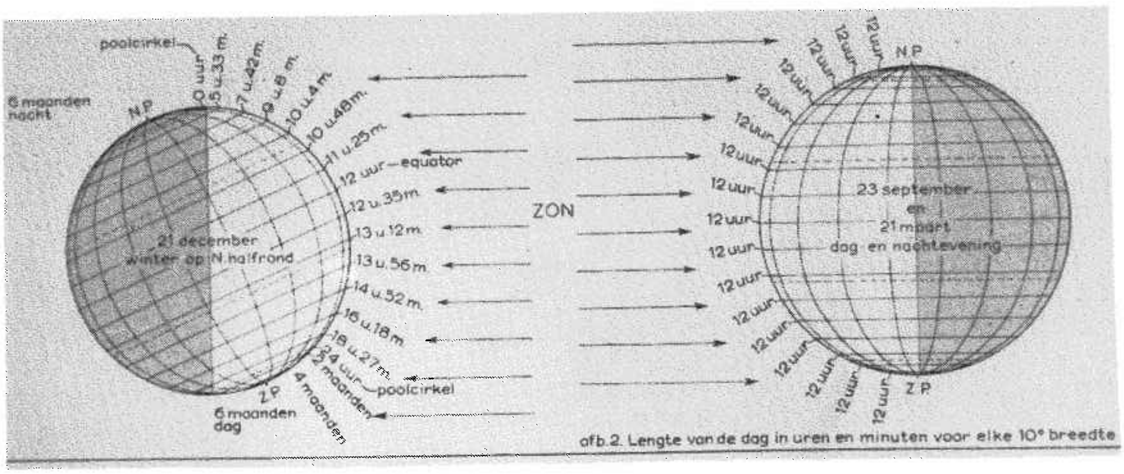


Fig. 10