

Verbanden, grafieken en functies (2)

Hans Krabbendam/Jan Speelpenning

SLO, Enschede

Samenvatting

'Grafiekentaal' is een leerstofpakket dat in het kader van het SLO-project '12-16' ontwikkeld is. Het gaat uit van de idee dat vele globale inzichten over verbanden te ontwikkelen zijn voordat meer lokale, kwantitatieve aspecten aan de orde komen.

Enkele lesbladen, voor gebruik gereed, passeren de revue.

Deze keer vormen hengelsnoeren de context.

Summary

'The language of graphs' is a booklet aiming at students around the age of 13 years that has been developed by the Foundation for Curriculum Development.

A global insight about the relations has to be developed before looking at local and quantitative aspects.

Some working sheets with classroom-comments are discussed.

Evenals in het vorige artikel [1] zullen we hier enkele kant-en-klare lesbladen laten zien en die voorzien van enkele kanttekeningen. Het is materiaal dat u zonder meer in de klas kunt gebruiken. De bladen 'Uitvissen' (1)–(4) zijn afkomstig uit het pakketje 'Hoe langer hoe meer...' [2], dat voor de eerste klas(sen) van het V.O. is geschreven en voortbouwt op 'Grafiekentaal' [3].

De centrale vraag bij 'Uitvissen' is deze: "kan aan een vissnoertje van 1 mm dikte een vis van 40 kg hangen?" Velen – kinderen en volwassenen – zijn ervan overtuigd dat dit onmogelijk is. Leerlingen denken vaak aan hun eigen gewicht (veelal rond 40 kg) en stellen zich een draadje van 1 mm voor. Zo'n groot gewicht aan zo'n klein draadje!

Als je naar de etikettes van een aantal snoertjes kijkt, dan zie je al gauw dat het verband tussen de dikte van het snoer en de trekkracht (zeg het maximale gewicht dat je aan het snoertje kunt hangen) niet lineair is. Voor leerlingen is dat – in dit stadium – minder duidelijk. Zij moeten immers de precieze aard van een verband nog leren expliciteren. In dit geval is voor hen de regel "twee keer zo dik, dus twee keer zo sterk" intuïtief duidelijk – maar onjuist. In feite is het verband ongeveer kwadratisch. De trekkracht hangt af van de oppervlakte van de doorsnede en niet van de diameter:



'gewoon'/twee keer zo dik/twee keer zo sterk

In 'Uitvissen' wordt iets van een wiskundige methodiek aangekaart. Hoe kun je, met weinig gegevens, toch een voorspelling doen? Anders gezegd: hoe extrapoleer je op basis van enkele gegevens en hoe kom je aan enige zekerheid omtrent de betrouwbaarheid van de extrapolatie?

De grote lijn is de volgende:

- Centrale vraag: kan er aan een snoertje van 1 mm dikte een vis hangen van 40 kg?
- Op grond van de informatie van enkele etikettes van vissnoertjes ontdek je dat het verband dikte-trekkracht niet lineair is; m.a.w. de trekkracht van een snoertje van 1 mm dikte kun je niet eenvoudigweg berekenen door de trekkracht van een snoertje van 0,1 mm met 10 te vermenigvuldigen.
- Een grafiek uit een handboek voor vissers geeft wat meer informatie, zij het – op het eerste gezicht – niet voldoende. De grafiek geeft 'slechts' waarden van de trekkracht voor dikten tussen 0 en 0,45 mm.
- Extrapoleren in de grafiek tot 1 mm kan, maar is onbetrouwbaar. "Hoe trek je de grafiek door? Recht, of een beetje gebogen?" Je hebt kennelijk een sterkere structuur nodig om daar zeker(der) van te kunnen zijn.
- Die sterkere structuur ligt in de ontdekking van de regel "2 keer zo dik – 4 keer zo sterk"; ontdekt op grond van de data die uit de grafiek zijn af te leiden.
- M.b.v. de grafiek wordt geëxtrapoleerd tot 0.50 mm, dat kan redelijk betrouwbaar, je vindt dan een trekkracht van ongeveer 12 kg, en vervolgens

wordt de eerder ontdekte regel gebruikt:

$$\times 2 \begin{array}{l} \curvearrowleft 0,50 \text{ mm} \\ \curvearrowright 1,00 \text{ mm} \end{array} \begin{array}{l} \text{ca. } 12 \text{ kg} \\ \text{ca. } 48 \text{ kg} \end{array} \times 4$$

Achter elk blad zijn nog enkele opmerkingen opgenomen, gebaseerd op observaties in de klas.

Uitvissen (1)

(a) We hebben niemand gezien die Gemma gelijk gaf; "40 kilo aan een draadje van 1 mm, nee, dat kan nooit". Zelfs de (jeugd-) viskampioen van Deventer (die toevallig in een van de klassen bleek te zitten) verkeerde in onzekerheid: "25 kilo kan wel, dat weet ik wel zeker, maar 40..."

"Ik heb iemand een vis zien vangen van wel 40 kilo", roept Gemma als ze thuis komt.

"Dat kan toch niet joh, daar heb je een paal met een dikke kabel voor nodig om die vis uit het water te hijsen", antwoordt vader ongelovig.

"Nee hoor", zegt Gemma, "wat voor hengel het was weet ik niet, maar het was een snoertje van maar 1 mm dikte. Dat riepen ze tenminste."

Vader gelooft er niets van. "Volgens mij kan dat niet. Dan zal die vis wel heel wat minder dan 40 kilo hebben gewogen. Dat overdrijven ze natuurlijk. Ik denk dat dat bij de afdeling sterke verhalen thuis hoort."

Gemma begint wel een beetje te twifelen. Zou het dan toch niet waar zijn? Maar zij had zelf gezien dat het een heel dun draadje was geweest waar die vis aanhing. En ze waren met z'n tweeën in de weer geweest om die grote vis uit het water te trekken. "40 kilo", hadden ze geroepen, "aan een draadje van 1 millimeter". Misschien had zij dat laatste toch niet goed verstaan.

Wat denken jullie, zou Gemma gelijk hebben of niet?

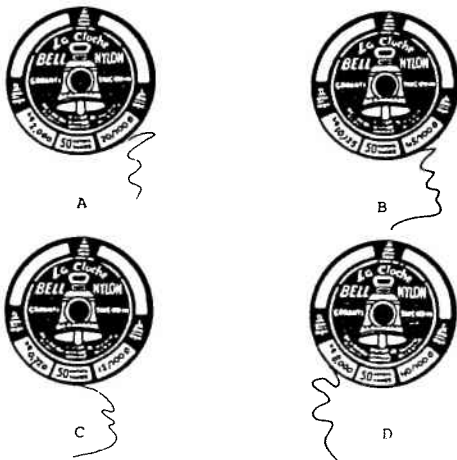
Gemma laat het er (nog) niet bij zitten.

We zullen eens volgen wat Gemma gaat doen. En, vanzelf doen jullie ook mee.

"Wat voor soorten vissnoeren zijn er zoal? Hoe dik zijn die en hoeveel kan daar aanhangen?" vraagt Gemma zich af.

Zij stapt de AVWU, een grootwinkelbedrijf, binnen, want daar verkopen ze allerlei visartikelen.

Ze hebben vier soorten vissnoeren. Dit zijn de etikettes.



Kijk eens naar het etiketje op klosje B. Daar staan een paar gegevens op over het soort snoer dat op dat klosje zit.

"kg 10,125" betekent dat dit snoer breekt als je er iets aanhangt dat meer dan 10 kg plus 125 gram weegt.

"45/100φ" betekent dat de dikte van het snoer $\frac{45}{100}$ mm is. Het tekenje 'φ' wordt bij technische zaken vaak gebruikt als afkorting voor het begrip 'diameter'.

Uitvissen (2)

(b) Sommige kinderen hebben nog steeds moeite met het omzetten van kg naar gram, vandaar dat we leerlingen dwingen deze eenheden in elkaar om te zetten en door elkaar te gebruiken. We hebben ons in deze lesbladen aangesloten bij de in het dagelijks leven (en op de etikettes) gangbare terminologie. Vandaar geen "massa" en "Newtons", maar 'gewoon' gewicht en grammen.

(c) Het is voor leerlingen niet moeilijk te achterhalen welke gedachtengang Gemma gevolgd heeft: dubbel zo dik, dus dubbel zo sterk.

Sommige leerlingen geven zelfs aan hoe Gemma tot 1 mm gerekend zou kunnen hebben:

"het dubbele van 0,45 plus de helft van 0,20... dus, ...20250 gram plus 1000... en dat is lang geen 40 kilo".

Het valt leerlingen niet moeilijk aan te geven dat Gemma's manier van uitrekenen niet goed is:

"0,40 is het dubbele van 0,20 maar er kan veel meer dan het dubbele aanhangen volgens die etikettes", of: "aan de helft van 0,20 zou dan 1000 gram kunnen hangen, terwijl bij 0,12 mm maar 720 gram kan hangen, dus dat klopt niet." Uit de argumenten blijkt dat leerlingen impliciet uitgaan van 'hoe dikker, hoe sterker' en van de idee dat een tegenvoorbeeld voldoende is om aan te tonen dat Gemma's rekenmanier onjuist moet zijn.

Een paar vragen:

- Hoe dik is snoer C?
- Hoeveel kilogram kun je aan het snoertje hangen voordat het breekt? Hoeveel gram is dat?
- Hoeveel meter zit er op het klosje?

Terug naar Gemma.

"Hè, wat vervelend, ik moet weten hoeveel er aan een snoer van 1 mm dikte kan hangen en dat verkopen ze hier niet. En weten doen ze het hier natuurlijk ook niet.

Maar, misschien kan ik er toch wel iets mee doen", denkt zij.

En zij noteert de gegevens van de etikettes overzichtelijk op een papiertje.

- Maken jullie ook even een overzichtje in een tabel. Zet de gegevens van het dunste snoer bovenaan en ga zo verder.

snoer	dikte in mm	trekkracht in g

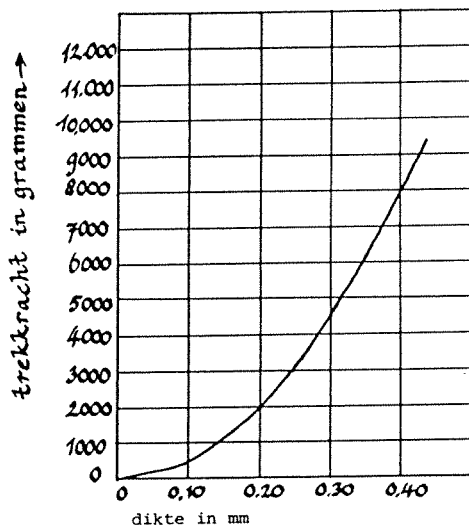
"Met deze gegevens kan ik vast wel iets voorspellen over de andere soorten snoertjes", denkt Gemma. "Zo te zien kan er aan een snoertje van 0,16 mm 1360 gram hangen. En een snoer van 0,30 mm breekt vermoedelijk bij precies 5000 gram."

- e. Hoe zou Gemma dat hebben uitgerekend?
Is dat volgens jullie een goede manier? Geef argumenten.
- f. Kunnen jullie nu al iets zeggen over het 'breekpunt' van een snoer van 1 mm dikte?
- Gemma: "Volgens mijn maniertje komt eruit dat je aan een snoer van 1 mm dikte lang geen 40 kg kunt hangen. Verdorie. Dan zou ik dus ongelijk hebben. Of zou mijn manier van uitrekenen niet goed zijn?"
- g. Wat denken jullie ervan?

Uitvissen (3)

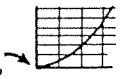
- (a) Behalve het dikste snoertje (B) zijn de snoertjes op de grafiek weer te geven. Snoertje B valt er buiten en brengt leerlingen op de idee de grafiek te extrapoleren: "0,45 klopt niet, maar als je doortrekt, dan wel natuurlijk", vond Marcel.
- (b) "Aan een honderdste millimeter of wat dan ook, daar kun je altijd nog wel iets aanhangen, maar bij nul niks, da's logisch", aldus Ellen.

In de bibliotheek vindt Gemma een boek over vissen, het ALLES-WAT-U-WETEN-MOET-boek over ZOET- EN ZOUTWATERVISSSEN.
"Net wat voor mij", denkt Gemma en begint te bladeren. Plotseling valt haar oog op deze grafiek.



"Hmm, een grafiek waarin ik bij elke dikte de sterkte kan aflezen, dat is handig! Even kijken of dat klopt met de AVWU-snoertjes."

- a. Geef in de grafiek de AVWU-snoertjes met een dikke stip weer. Zet ook de letters erbij.

- b. De grafiek is getekend door dit punt: 
Vinden jullie dat goed of niet? Waarom?

Uit zo'n grafiek kun je heel wat aflezen en dat zou wel eens van belang kunnen zijn voor het probleem van Gemma: of er aan een snoer van 1 mm minstens 40 kg kan hangen.

Uitvissen (4)

- (a) Veel leerlingen antwoordden: "tussen de 0,10 en 0,22 mm" en liepen een beetje in de val; een visser neemt ongetwijfeld een snoertje dat dik genoeg is.

(b) Dwingt tot verder extrapoleren, wat de meeste leerlingen vanzelfsprekend vinden. Het is natuurlijk de vraag hoe je dat doet: "recht doortrekken" of "in dezelfde bocht doorlopen" waren twee suggesties die veel voorkwamen.

Ook zijn er nogal wat kinderen die de grafiek doortekenen tot aan het punt rechtsboven in het rooster.

Probeer uit de grafiek van de vorige bladzijde te weten te komen:

- a. Hoe dik moet het snoer zijn van een visser die makreel (tussen de 1/2 kg en 2 1/2 kg) probeert te vangen?
- b. Bij hoeveel gram breekt een snoer van 0,50 mm dikte?
- c. Een paar bladzijden terug heb je gezien dat Gemma voorspellingen deed over de trekkracht van snoertjes van 0,80 en 0,90 mm. Jullie hebben over haar maniertje al een 'oordeel' gegeven. Nu hebben jullie de grafiek ter beschikking. Kunnen jullie iets zeggen over de volgende vraag: geeft Gemma's maniertje te hoge of te lage voorspellingen?
- d. Durven jullie al een voorspelling te doen over het breekpunt van een snoer van 1 mm?

Terug naar Gemma.

"'s Kijken", mompelt Gemma, "een snoer van 0,10 mm heeft een breekpunt van... eh... .. gram. En een snoertje van 0,20 mm heeft er een van eh... .. gram.

Twee keer zo dik snoer dus en wel eh... .. keer zo sterk. Wat betekent dat? Ook 's kijken bij 0,15 en 0,30 mm... Hé, ik geloof dat ik het heb!! Want zo kan ik uitrekenen hoeveel er aan 1 mm-snoer kan hangen!"

Na een tijdje klaart Gemma's gezicht helemaal op. Opgetogen klinkt het:

"Ik had toch lekker gelijk!"

- e. Proberen jullie te achterhalen wat Gemma gedacht en berekend heeft. Vul de ontbrekende getallen op de streepjes in en ga na of Gemma gelijk had of niet. Schrijf jullie conclusies en berekeningen hieronder op.

- (e) De meeste leerlingen zien de regel:

$$2 \times \text{zo dik} - 4 \times \text{zo sterk}$$

zonder veel moeite, al ontbreekt bij velen het gevoel dat het noodzakelijk is die te controleren bij andere waarden, zoals, bijvoorbeeld, bij 0,15 en 0,30 of 0,20 en 0,40.

Om de treksterkte bij 1 mm te vinden moet de zojuist gevonden regel nog worden toegepast op 0,50 mm. Die stap gaat voor veel individuele leerlingen te ver, maar hierop komen veel in het algemeen wel uit, zij het soms nog met enige moeite.

Daarmee is 'Uitvissen' een probleem dat de kracht van de groep t.o.v. de individuen sterk illustreert, niet alleen in onze ogen, maar ook in die van de leerlingen.

Literatuur

- [1] Krabbendam, H. en J. Speelpenning, *Verbanden, Grafieken en Functies (I)*, Nieuwe Wiskrant jrg 4, nr 3.
- [2] *Hoe langer hoe meer...* is experimenteel lesmateriaal bestemd voor de 1ste (of 2de) klas. Het is verkrijgbaar bij SLO, Enschede (053-840840).
- [3] Zie ook: Krabbendam, H. *De taal van grafieken*, Nieuwe Wiskrant, jrg. 2, nr 4, mei 1983.

Uitvissen (1)

"Ik heb iemand een vis zien vangen van wel 40 kilo", roept Gemma als ze thuis komt.

"Dat kan toch niet joh, daar heb je een paal met een dikke kabel voor nodig om die vis uit het water te hijsen", antwoordt vader ongelovig.

"Nee hoor", zegt Gemma, "wat voor hengel het was weet ik niet, maar het was een snoertje van maar 1 mm dikte. Dat riepen ze tenminste."

Vader gelooft er niets van. "Volgens mij kan dat niet. Dan zal die vis wel heel wat minder dan 40 kilo hebben gewogen. Dat overdrijven ze natuurlijk. Ik denk dat dat bij de afdeling sterke verhalen thuis hoort."

Gemma begint wel een beetje te twijfelen. Zou het dan toch niet waar zijn? Maar zij had zelf gezien dat het een heel dun draadje was geweest waar die vis aanhing. En ze waren met z'n tweeën in de weer geweest om die grote vis uit het water te trekken. "40 kilo", hadden ze geroepen, "aan een draadje van 1 millimeter". Misschien had zij dat laatste toch niet goed verstaan.

Wat denken jullie, zou Gemma gelijk hebben of niet?

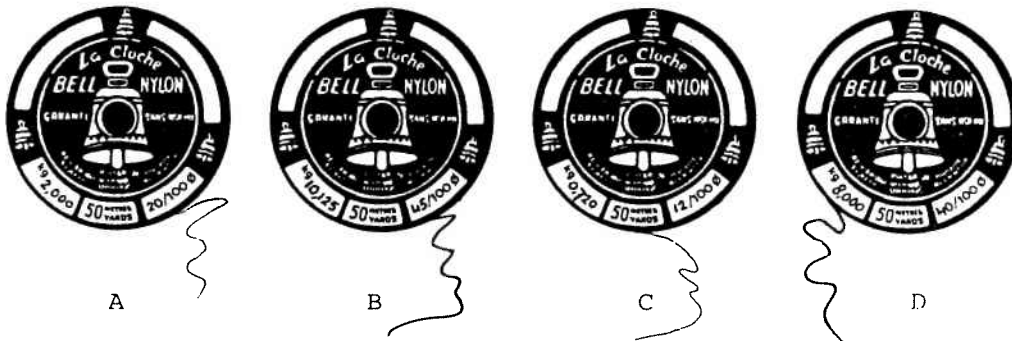
Gemma laat het er (nog) niet bij zitten.

We zullen eens volgen wat Gemma gaat doen. En, vanzelf, doen jullie ook mee.

"Wat voor soorten vissnoeren zijn er zoal? Hoe dik zijn die en hoeveel kan daar aanhangen?" vraagt Gemma zich af.

Zij stapt de AVWU, een grootwinkelbedrijf, binnen, want daar verkopen ze allerlei visartikelen.

Ze hebben vier soorten vissnoeren. Dit zijn de etiketjes.



Kijk eens naar het etiketje op klosje B. Daar staan een paar gegevens op over het soort snoer dat op dat klosje zit.

"kg 10,125" betekent dat dit snoer breekt als je er iets aanhangt dat meer dan 10 kg plus 125 gram weegt.

"45/100 ϕ " betekent dat de dikte van het snoer $\frac{45}{100}$ mm is. Het teken 'φ' wordt bij technische zaken vaak gebruikt als afkorting voor het begrip 'diameter'.

Uitvissen (2)

Een paar vragen:

- Hoe dik is snoer C?
- Hoeveel kilogram kun je aan het snoertje hangen voordat het breekt? Hoeveel gram is dat?
- Hoeveel meter zit er op het klosje?

Terug naar Gemma

“Hè, wat vervelend, ik moet weten hoeveel er aan een snoer van 1 mm dikte kan hangen en dat verkopen ze hier niet. En weten doen ze het hier natuurlijk ook niet.

Maar, misschien kan ik er toch wel iets mee doen”, denkt zij.

En zij noteert de gegevens van de etiketjes overzichtelijk op een papiertje.

- Maken jullie ook even een overzichtje in een tabel. Zet de gegevens van het dunste snoer bovenaan en ga zo verder.

snoer	dikte in mm	trekkracht in g

“Met deze gegevens kan ik vast wel iets voorspellen over de andere soorten snoertjes”, denkt Gemma. *“Zo te zien kan er aan een snoertje van 0,16 mm 1360 gram hangen. En een snoer van 0,30 mm breekt vermoedelijk bij precies 5000 gram.”*

- Hoe zou Gemma dat hebben uitgerekend?
Is dat volgens jullie een goede manier? Geef argumenten.
- Kunnen jullie nu al iets zeggen over het ‘breekpunt’ van een snoer van 1 mm dikte?

Gemma: “Volgens mijn maniertje komt er uit dat je aan een snoer van 1 mm dikte lang geen 40 kg kunt hangen. Verdorie. Dan zou ik dus ongelijk hebben. Of zou mijn manier van uitrekenen niet goed zijn?”

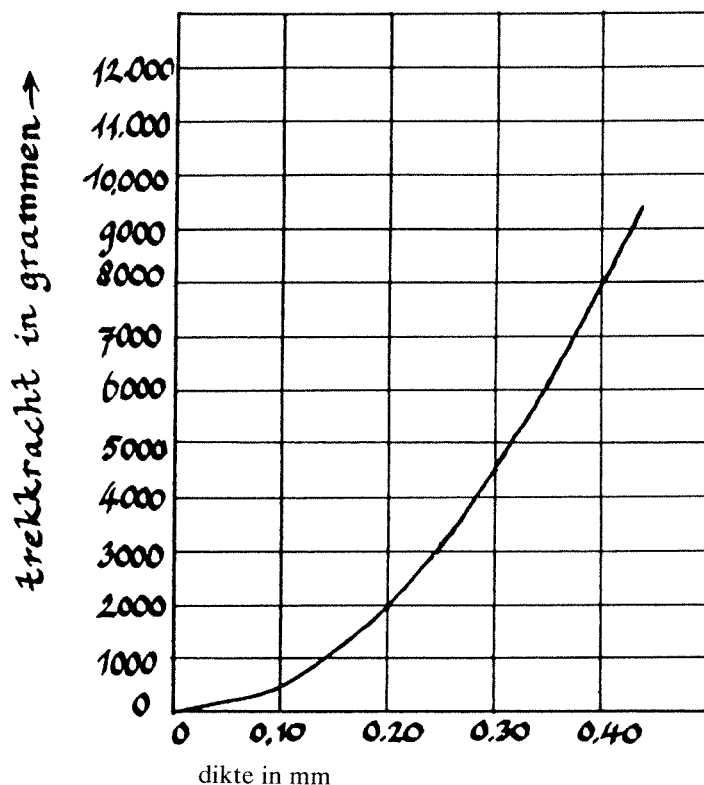
- Wat denken jullie ervan?

Uitvissen (3)

In de bibliotheek vindt Gemma een boek over vissen, het ALLES-WAT-U-WETEN-MOET-boek over ZOET- EN ZOUTWATERVISSSEN.

“Net wat voor mij”, denkt Gemma en begint te bladeren.

Plotseling valt haar oog op deze grafiek.



“Hmm, een grafiek waarin ik bij elke dikte de sterkte kan aflezen, dat is handig! Even kijken of dat klopt met de AVWU-snoertjes.”

- Geef in de grafiek de AVWU-snoertjes met een dikke stip weer. Zet ook de letters erbij.
- De grafiek is getekend door dit punt:
Vinden jullie dat goed of niet? Waarom?



Uit zo'n grafiek kun je heel wat aflezen en dat zou weleens van belang kunnen zijn voor het probleem van Gemma: of er aan een snoer van 1 mm minstens 40 kg kan hangen.

Uitvissen (4)

Probeer uit de grafiek van de vorige bladzijde te weten te komen:

- Hoe dik moet het snoer zijn van een visser die makreel (tussen de $\frac{1}{2}$ kg en $2\frac{1}{2}$ kg) probeert te vangen?
- Bij hoeveel gram breekt een snoer van 0,50 mm dikte?
- Een paar bladzijden terug heb je gezien dat Gemma voorspellingen deed over de trekkracht van snoertjes van 0,80 en 0,90 mm. Jullie hebben over haar maniertje al een 'oordeel' gegeven. Nu hebben jullie de grafiek ter beschikking. Kunnen jullie iets zeggen over de volgende vraag: geeft Gemma's maniertje te hoge of te lage voorspellingen?
- Durven jullie al een voorspelling te doen over het breekpunt van een snoer van 1 mm?

Terug naar Gemma.

" 's Kijken", mompelt Gemma, "een snoer van 0,10 mm heeft een breekpunt van... eh... ... gram. En een snoertje van 0,20 mm heeft er een van eh... ... gram.

Twee keer zo dik snoer dus en wel eh... ...keer zo sterk. Wat betekent dat? Ook 's kijken bij 0,15 en 0,30 mm... Hé, ik geloof dat ik het heb!! Want zo kan ik uitrekenen hoeveel er aan 1 mm-snoer kan hangen!"

Na een tijdje klaart Gemma's gezicht helemaal op. Opgetogen klinkt het:

"Ik had toch lekker gelijk!"

- Proberen jullie te achterhalen wat Gemma gedacht en berekend heeft. Vul de ontbrekende getallen op de streepjes in en ga na of Gemma gelijk had of niet. Schrijf jullie conclusies en berekeningen hieronder op.