

# Landbouwplanning in Israël

## Het gebruik van de computer bij een lineair programmeringsprobleem

H.B. Verhage

OW & OC, RU Utrecht

### Samenvatting

*Volgens de opvatting van de auteur moet de computer in het onderwijs vooral ingezet worden als snelle verwerker van gegevens, niet zozeer als leermachine. Dit betekent dat programmatuur ontwikkeld moet worden die gebruikt kan worden als gereedschap. Het werken met dit soort programmatuur maakt het mogelijk dat leerlingen interessantere of realistischere problemen aankunnen, omdat de technische kanten van het probleem geen belemmering meer zijn. In dit artikel wordt een concrete invulling van deze opvatting rond het wiskunde A-onderwerp 'lineair programmeren' nader uitgewerkt.*

"Je hebt suiker en katoen, maar óók A en B."  
"Moet je nu alles bij elkaar doen, of moet je splitsen."  
"Maar dan krijg je ook twee doelfuncties, één voor A en één voor B."  
"Ik zou de kibbutzim laten fuseren."  
"Bij aardrijkskunde doen we dat anders, als je niet genoeg water hebt, is je grond ook waardeloos, die grond telt dan eigenlijk niet mee."  
"Eigenlijk is het heel gemakkelijk."  
"Je schrijft gewoon op wat er staat."

### De opgave

Zo maar wat kreten uit een groepsdiscussie in een wiskunde A-klas die een lastig lineair programmeringsprobleem kregen voorgeschoteld (zie werkbladen).  
Zouden ze eruit komen? Ik wist dat de opgave niet eenvoudig was, dat was al gebleken op een nascholingsbijeenkomst waar een groep leraren heel wat tijd nodig had voor dit probleem. De uitdaging om de opgave ook aan een groep leerlingen voor te leggen was er alleen maar groter door geworden. De ervaringen waar dit artikel op gebaseerd is, zijn opgedaan met leerlingen uit een 5VWO wiskunde A-klas van het St. Ignatius College te Purmerend. De klas telt 29 leerlingen, 11 jongens en 18 meisjes. 14 leerlingen hebben ook wiskunde B in hun pakket. De leraar, Redmer Kuiken, geeft dit jaar voor het eerst wiskunde A. De leerlingen hadden de eerste vijf hoofdstukken van het HEWET-boekje 'Lineair Programmeren' als Lange-Termijn-Opdracht opgekregen en op eigen kracht thuis doorgewerkt. Tussendoor was er één keer een klassikale les aan het onderwerp besteed.

### Summary

*According to the opinion of the author, the computer should be used in education primarily in the role of data processor, less as a teaching machine. This means that software has to be developed to be used as a tool. Using this kind of software enables students to tackle more complicated real problems. Three dimensional linear programming – part of the math A-curriculum – offers a wide variety of such problems.*

### Het opstellen van het model

In de praktijk is de moeilijkheid bij lineaire programmering altijd om de gegeven situatie in het keurslijf van een LP-model te passen. Het oplossen van het model is een zuiver technische aangelegenheid, werk dat bij uitstek geschikt is om door een automaat verricht te worden.

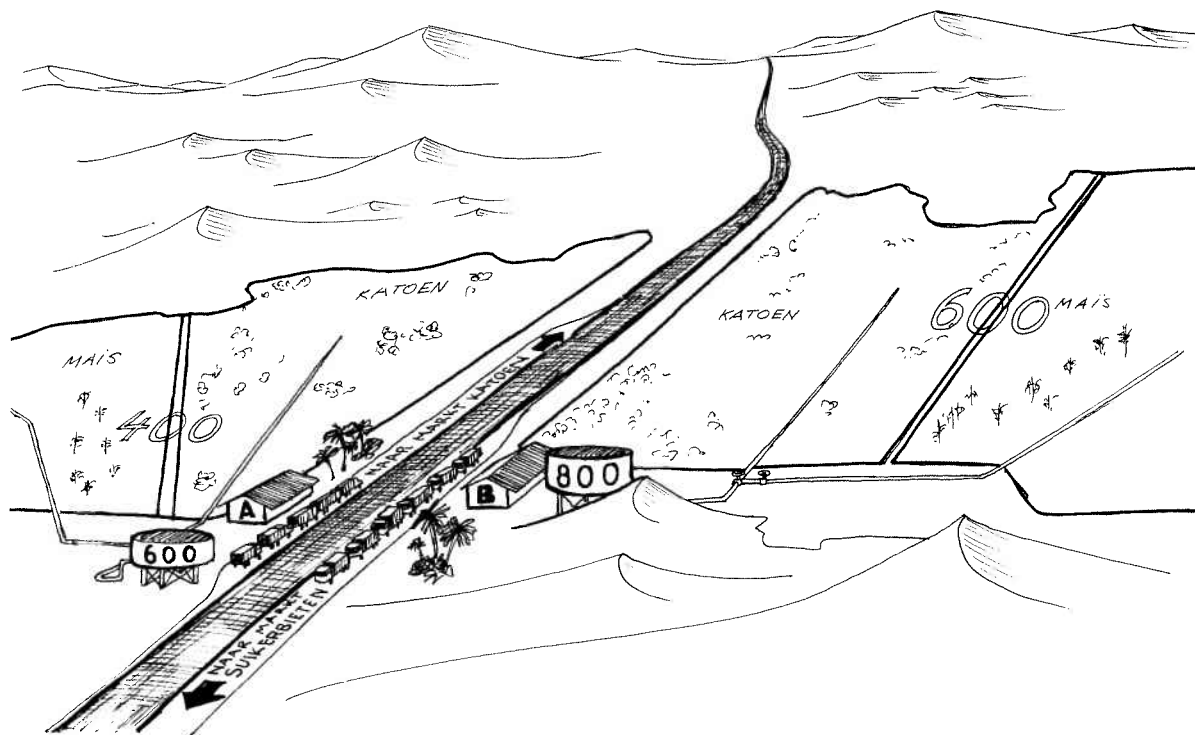
De volgende dialoog geeft aan hoe moeilijk het is om het probleem te formuleren:

Linda: "Je hebt grond, water, suiker en katoen."  
Leraar: "Ja, en wat is de vraag, wat moet je gaan bekijken straks?"  
Linda: "De beperkende voorwaarden opstellen en de doelfunctie bepalen."  
L: "Ja, die moet je opschrijven, maar waar gaat het probleem over? Dat is een eerste vraag die je op weg moet helpen."  
Linda: "Over hoe ze het verdelen."  
L: "Ja, dus wat moet je uiteindelijk weten?"  
Linda: "Wat elke kibbutz verbouwt en hoeveel."  
L: "Ja, dus waar moet je straks iets over zeggen?"  
Linda: "De grond..."  
L: "De grond is verdeeld, maar..."  
Linda: "Ja, maar wat je erop verbouwt, hoeveel..."  
L: "Voor wie moet je dat zeggen?"  
Linda: "Voor A en B."  
L: "Nou wat ligt dan voor de hand dat je in ieder geval als variabele hebt?"  
Manon: "A en B."  
L: "Wel iets dat met A en B te maken heeft."  
Linda: "Dan krijg je toch A is, heeft zoveel suikerbieten en zoveel katoen."

# Landbouwplanning in Israël (1)

Eén van de interessantste sociale experimenten in het Mediterrane gebied is het systeem van de kibbutzim (meervoud van kibbutz) in Israël. Vaak werken enkele kibbutzim samen, bijvoorbeeld met de bedoeling de productie op elkaar af te stemmen.

Kibbutz A en kibbutz B hebben zich verenigd in de Zuidelijke Federatie van Kibbutzim. Het Coördinatie Bureau van de Federatie houdt zich bezig met de planning van de productie van A en B voor het komende jaar. Hierbij moet met een aantal factoren rekening gehouden worden.



In de eerste plaats de hoeveelheid land die beschikbaar is: A beschikt over 400 acres landbouwgrond, B over 600 acres (de acre is een Engelse landmaat, 1 acre is ongeveer 40 are). Vanwege het droge woestijnklimaat moet de grond bevoeid worden. A heeft voor irrigatie 600 acre feet beschikbaar, B 800 acre feet. De twee kibbutzim verbouwen alleen suikerbieten en katoen. Het Ministerie van Landbouw heeft bepaald dat de kibbutzim van de Zuidelijke Federatie gezamenlijk maximaal 600 acres suikerbieten en 500 acres katoen mogen produceren. Suikerbieten hebben 3 acre feet water per acre nodig, katoen heeft 2 acre feet water per acre nodig.

Het Coördinatie Bureau ziet zich voor de taak gesteld voor elk van de produkten te bepalen hoeveel elke kibbutz ervan moet verbouwen. De Federatie streeft naar maximale netto-opbrengst. De netto-opbrengst op suikerbieten is 400 dollar per acre, op katoen 300 dollar per acre.

# Landbouwplanning in Israël (2)

- ▶ 1. Hoe luiden de doelfunctie en de beperkende voorwaarden als rekening gehouden wordt met alle hiervoor genoemde eisen?

Het kan zijn dat het niet mogelijk is de totale hoeveelheid beschikbare landbouwgrond te benutten. Voor dat geval hebben A en B afgesproken de te produceren hoeveelheden 'eerlijk' te verdelen. Met 'eerlijk' wordt bedoeld dat elke kibbutz hetzelfde gedeelte van zijn landbouwgrond kan beplanten. Hierbij wordt géén onderscheid tussen de gewassen gemaakt.

- ▶ 2. Welke beperkende voorwaarde hoort bij deze eis?

Dit lineaire programmeringsprobleem kan teruggebracht worden tot een model met drie variabelen, zodat de drie-dimensionale randenwandelmethode gebruikt kan worden.

- ▶ 3. Herschrijf de doelfunctie en de beperkende voorwaarden zodat een LP-model met drie variabelen ontstaat.

Met behulp van de computer kan nu het toelaatbare gebied bepaald worden.

- ▶ 4. Voer de beperkingen één voor één in de computer in. Teken enkele tussenresultaten bij het tot stand komen van het toelaatbare gebied schetsmatig na en stippel hierbij alles wat eigenlijk niet zichtbaar is.
- ▶ 5. Teken het toelaatbare gebied dat uiteindelijk ontstaan is zo nauwkeurig mogelijk na. Maak een tabel van de coördinaten van de hoekpunten en geef de hoekpunten aan in de figuur. Houdt hierbij de nummering van de computer aan.
- ▶ 6. Voer de doelfunctie in de computer in en laat één of meer niveaувlakken tekenen. Wat denk je dat de optimale oplossing wordt?
- ▶ 7. Controleer dit vermoeden met behulp van de randenwandelmethode. Schrijf de resultaten in de bij ▶ 5. gemaakte tabel.
- ▶ 8. Hoeveel zal elke kibbutz van de beide produkten gaan verbouwen in de optimale situatie? Welk deel van de landbouwgrond wordt benut? Hoe groot is de netto-opbrengst voor elk van de kibbutzim?

Als er geen rekening gehouden wordt met de eis over de 'eerlijke' verdeling, kan het produktieschema er anders uitzien. In dat geval wordt de grootste netto-opbrengst behaald als A en B samen 133,33 acre suikerbieten en 500 acre katoen verbouwen.

- ▶ 9. Hoe kun je dat beredeneren? Welke verdelingen van suikerbieten en katoen over A en B zijn mogelijk?
- ▶ 10. Vergelijk deze situatie met de vorige. Commentaar?

We keren weer terug naar de oude situatie. Kibbutz B heeft de mogelijkheid om 50 acre feet water voor irrigatie aan te kopen. De kosten hiervan bedragen 100 dollar per acre feet. Op verzoek van B berekent het Coördinatie Bureau wat de gevolgen zijn voor het produktieschema en de winst van A en B van een eventuele aankoop van water door B.

- ▶ 11. Is het voordelig voor B om het water te kopen?

Kibbutz B beweert dat kibbutz A ook voordeel heeft van de aanschaf van water door B en dat het dus redelijk is dat A hieraan meebetaalt. A voelt hier niets voor, maar is daarentegen wel bereid al het water zelf te kopen, voor eigen gebruik dus. B mag hier dan gerust van meeprofiteren.

- ▶ 12. Wat is jouw mening over deze redeneringen van A en B?

L: "Ja, dat klopt. Dus die A ga je onderverdelen in suikerbieten en katoen. Probeer eens die vergelijkingen op te schrijven."

Het is niet meteen duidelijk wat nu precies de beslissingsvariabelen zijn: "Je hebt suiker en katoen, maar óók A en B." Voor wie de stap gemaakt heeft naar "suiker voor A en B en katoen voor A en B" volgt de rest snel. De leerling die zich na een half uur intensief ploeteren liet ontvallen "je schrijft gewoon op wat er staat" gaf met deze uitspraak glashelder aan waar de denkactiviteiten van de leerlingen zich tot dusverre op gericht hadden.

Wiskundige modellen maken is immers niet anders dan 'gewoon' opschrijven wat er staat, maar dan op een wiskundige manier. Wel met 'gewoon' tussen aanhalingstekens, want dit proces van mathematiseren (elders in dit nummer van de Nieuwe Wiskrant door Jan de Lange aangeduid met 'horizontale mathematisering') bracht heel wat bloed, zweet en tranen met zich mee. Een opmerking als "eigenlijk is het heel gemakkelijk" onderstreept dit: zoiets zeg je alleen over problemen waarvan je de oplossing in eerste instantie absoluut niet ziet.

Het model dat de leerlingen tenslotte vlot opschrijven ziet er zo uit:

maximaliseer  $400 A_s + 400 B_s + 200 A_k + 300 B_k$   
 onder de voorwaarden:

$$\begin{array}{rcl} A_s + B_s & & \leq 600 \text{ (suikermarkt)} \\ & A_k + B_k & \leq 500 \text{ (katoenmarkt)} \\ A_s + & A_k & \leq 400 \text{ (grond van A)} \\ & B_s + B_k & \leq 600 \text{ (grond van B)} \\ 3A_s + & 2A_k & \leq 600 \text{ (water van A)} \\ & 3B_s + 2B_k & \leq 800 \text{ (water van B)} \\ A_s, & B_s, & A_k, & B_k & \geq 0 \text{ (niet-negativiteiten)} \end{array}$$

De betekenis van de beslissingsvariabelen laat zich raden.

Bij de alinea over het eerlijk delen ontstaan weer problemen over de keuze van de variabelen. Men is het eens over zoiets als  $A = \frac{2}{3}B$ . Volgens één van de leerlingen 'houd je dan S, K en B over'. Tenslotte volgt wel de stap waar de eerder ingevoerde beslissingsvariabelen:  $A_s + A_k = \frac{2}{3}(B_s + B_k)$ .

Dan gebeurt er iets vreemds: een heleboel leerlingen vervangt dit klakkeloos door  $A_s = \frac{2}{3}B_s$ . Geen wonder dat het substitueren van  $A_s$  in de eerder opgestelde ongelijkheden zo vlot verloopt! Naar aanleiding van de verdeelsleutel over de te bebouwen grond ontstaat een discussie over de vraag of het water niet ook op een bepaalde manier 'eerlijk' verdeeld zou moeten worden. Bij aardrijkskunde hebben de leerlingen daar ook het een en ander over geleerd: "als je niet genoeg water hebt, is je grond waardeloos."

De leerlingen leefden zich trouwens enorm in de context van de opgave in: "dan ga je die kibbutzim bij elkaar doen, maar misschien liggen ze wel kilometers uit elkaar."

Na substitutie van bijvoorbeeld  $A_s = \frac{2}{3}(B_s + B_k) - A_k$  ontstaat een model met drie variabelen, dat er zó uit

ziet:

maximaliseer  $666 \frac{2}{3} B_s - 100 A_k + 566 \frac{2}{3} B_k$  onder de voorwaarden:

$$\begin{array}{rcl} 1\frac{2}{3} B_s - A_k + \frac{2}{3} B_k & \leq & 600 \\ & A_k + B_k & \leq 500 \\ \frac{2}{3} B_s & + & \frac{2}{3} B_k \leq 400 \\ B_s & + & B_k \leq 600 \\ 2 B_s - A_k + 2 B_k & \leq & 600 \\ 3 B_s & + & 2 B_k \leq 800 \\ -\frac{2}{3} B_s + A_k - \frac{2}{3} B_k & \leq & 0 \\ B_s, & A_k, & B_k \geq 0 \end{array}$$

De beperking  $-\frac{2}{3}B_s + A_k - \frac{2}{3}B_k \leq 0$  wordt gemakkelijker over het hoofd gezien. Ziet u waar deze beperking vandaan komt?

Het eerste lesuur is voorbij.

## Het computerprogramma

Uit het boekje 'Lineair Programmeren' hebben de leerlingen geleerd dat je door niveaulijnen (bij drie dimensies niveaувlakken) te tekenen, of door langs de randen van het toelaatbare gebied te wandelen, de optimale waarde van de doelfunctie op dat gebied kunt vinden.

Ook voor enkele driedimensionale problemen hebben de leerlingen dit procédé met de hand uitgevoerd. Het toelaatbare gebied zag er dan veelal uit als een rechthoekig blok met een hoekje eraf.

In het onderhavige voorbeeld wordt het tekenen van het toelaatbare gebied voor de wiskunde A-leerlingen een knap lastige aangelegenheid. Bovendien is het tekenen van dit soort gebieden ook helemaal geen doel van wiskunde A, het gaat veel meer om het opstellen van het model en het interpreteren van de uitkomsten ervan. Bij de fase die hier tussen zit, het verwerken van het model met de bedoeling uitkomsten te verkrijgen waar iets aan te interpreteren valt, kan de computer ingeschakeld worden.

Het tweede lesuur verwerkten de leerlingen het opgestelde model met behulp van het voor de BBC-computer ontwikkelde computerprogramma LINPROG.

Het programma bestaat uit twee delen:

Met het eerste gedeelte wordt stap voor stap het toelaatbare gebied opgebouwd. De overgang naar het tweede deel wordt gemarkeerd door het invoeren van de doelfunctie, waarna niveaувlakken getekend kunnen worden en de mogelijkheid tot randenwandelen bestaat. Aan de hand van een serie foto's van beeldschermen wordt de werking van dit programma op de pagina hiernaast besproken.

Om te voorkomen dat eventuele praktische problemen rond het werken met dit programma zouden interfereren met de inhoudelijke aspecten van de opdracht, hadden de leerlingen al een keer eerder met dit programma gewerkt. De opdracht was toen om een plaatje uit het boek op de computer na te tekenen. Een ogenschijnlijk weinig spectaculaire opdracht, die echter toch de nodige vragen bij de leerlingen opriep.

Het veel geuite commentaar "hij doet niks" betekende veelal "ik zie niets gebeuren" en had dan betrekking

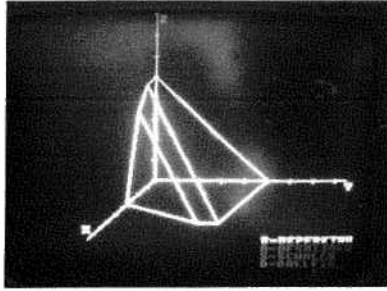


Foto 1:  
Er is een geschikte schaalverdeling gekozen en er zijn enkele beperkingen ingevoerd. De computer heeft het gebied getekend dat tot zover nog toelaatbaar is.

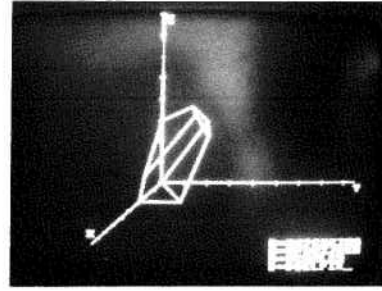


Foto 5:  
Uiteindelijk ziet het toelaatbare gebied er zó uit.

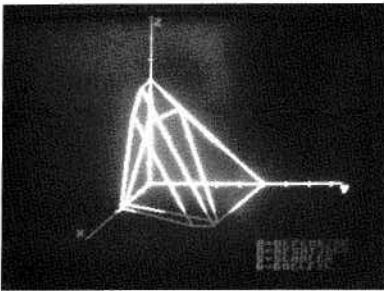


Foto 2:  
De volgende beperking ingevoerd. De computer heeft de doorsnede met het gebied van de vorige foto getekend.

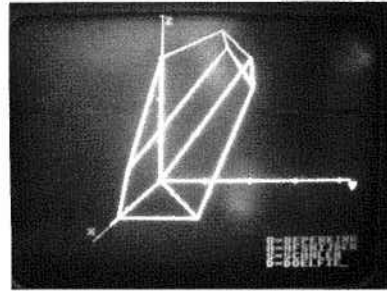


Foto 6:  
Om een wat groter plaatje te krijgen, is een nieuwe schaalverdeling gekozen.

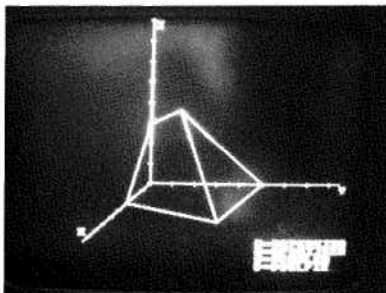


Foto 3:  
Het toelaatbare gebied is nu kleiner geworden, het overtollige deel is "afgesneden".

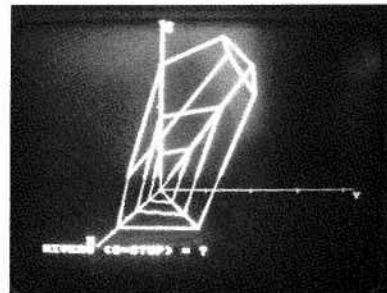


Foto 7:  
De doelfunctie is inmiddels ingevoerd. Hier zijn twee niveaувlakken getekend.

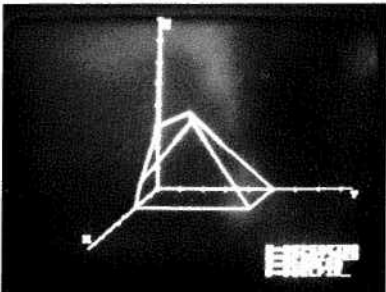


Foto 4:  
De volgende beperking is ingevoerd en er is weer een stuk van het toelaatbare gebied afgesneden.



Foto 8:  
De computer geeft een overzicht van de coördinaten van de hoekpunten. De hoekpunten zijn door de computer genummerd. Deze nummers vormen de invoer bij het randenwandelen. De computer rekt dan de waarde van de doelfunctie in het opgegeven hoekpunt uit.

op één van de volgende situaties:

- bij het invoeren van een volgende beperking werd soms niets getekend;
- het opgeven van een heel laag niveau voor de doelfunctie;
- het opgeven van de optimale waarde als niveau voor de doelfunctie.

Iemand suggereerde mij om de computer in dit soort situaties waar niets zichtbaars gebeurt een boodschap te laten geven. Technisch is zoiets natuurlijk eenvoudig te realiseren, maar waarom zou je dat doen? Juist dit soort conflicten roepen allerlei denkactiviteiten op bij de leerlingen en vormen zodoende het zout in de pap.

Als de leerlingen de reactie van de computer op hun invoer niet meteen begrijpen, verzinnen ze zelf wel een testje. Bijvoorbeeld in het geval dat voor het niveau de optimale waarde werd opgegeven, probeerden de leerlingen andere, iets lagere waarden voor het niveau, met de bedoeling uit te zoeken of ze dan wel iets zouden zien. Op die manier werd meestal de verklaring voor het in de ogen van de leerlingen vreemde gedrag van de computer wel gevonden.

## De verwerking van het model

Terug naar het planningsprobleem van de kibbutzim. De meeste leerlingen begonnen achteloos de eerste beperking in te voeren en kregen dan een plaatje dat ze niet zo erg begrepen. De door de wol geverfde wiskunde A-leerling komt dan al snel op het idee om eens te kijken of de schaalverdeling wel goed gekozen is.

Eén van de opdrachten was om het toelaatbare gebied dat uiteindelijk ontstaan was, na te tekenen. De achterliggende gedachte hierbij is, dat natekenen dwingt tot goed kijken. (Vergelijk een biologiepracticum microscopiseren). Zeker bij computeroutput, die al snel als een razende over het beeldscherm jaagt, is het zaak de vluchtigheid ervan te doorbreken en de leerlingen te dwingen stil te staan bij de resultaten.

Bij dit natekenen van het toelaatbare gebied maakten de meeste leerlingen gebruik van de precieze coördinaten van de hoekpunten zoals die in het overzicht vermeld werden. Eén leerling pakte het echter anders aan: hij mat met z'n geodriehoek de figuur op het beeldscherm nauwkeurig op en tekende het zo na in zijn schrift. In die tekening ontbreekt dan ook de schaalverdeling!

Door wat niveauvlakken te tekenen wordt het duidelijk dat de winst vermoedelijk in (40, 160, 340) optimaal is.

Iemand deed de suggestie om de computer een hele serie niveauvlakken, op regelmatige afstand van elkaar, te laten tekenen. Op die manier zou een soort film ontstaan. Ook hiervoor geldt weer, dat het technisch heel goed mogelijk is.

De leerlingen die ik observeerde, ontdekten zelf dat je een mooi plaatje krijgt als je een serie niveauvlakken laat tekenen en dat deden ze dan ook met zichtbaar plezier. En een beeld voor beeld zelfgemaakte film is toch veel aardiger dan de film van een ander?

Het randenwandelen tenslotte bevestigt het vermoeden dat de doelfunctie in (40, 160, 340) de optimale

waarde aanneemt. De winst in dit hoekpunt bedraagt US\$ 203333,33 en in alle aangrenzende hoekpunten is de winst lager.

Overigens loont het uitstippelen van een slimme wandeling, waarbij elke volgende stap zó gekozen wordt dat het perspectief over de toename van de doelfunctie op z'n gunstigst is, bij een voorbeeld als dit nauwelijks de moeite. Daarvoor is het aantal hoekpunten te gering, en bovendien zijn de coördinaten van de hoekpunten toch al door de computer uitgerekend. Dit laatste in tegenstelling tot wanneer de tekening met de hand gemaakt wordt, dan is het niet nodig alle hoekpunten te berekenen.

## Interpretatie van de resultaten

Door al het werk dat sinds het opstellen van het model verricht is (de verticale mathematisering), is de betekenis van de hoekpunten in termen van de context door sommige leerlingen wat uit het oog verloren.

Het volgende fragment geeft aan hoe het verband tussen probleem en de resultaten van de verwerking weer opgerakeld wordt:

Ivo: "In de optimale situatie..."

Jeannet: "Heb je tweehonderddrieduizenddriehonderddrieëndertigéénderde..."

Ivo: "Je moet dus alleen weten welke grafiek dat is, welke beperking dat is.

Toch?

Er wordt gevraagd...

De winst is zoveel..."

Jeannet: "Ja, maar in dat geval is  $x$  tweehonderdtwintig  $y$  tachtig en  $z$  tweehonderdtachtig en dan ben je er al."

[De leerlingen die  $A_s = \frac{2}{3}B_s$  hadden ingevuld, vonden dit antwoord].

Ivo: "Oh, dat zijn natuurlijk die getallen."

Jeannet: "Ja, dat is  $A_s$ ,  $B_s$  en  $B_k$ ."

Guido komt erbij: "Ja maar hè, nu vragen ze dus hoeveel zal elke kibbutz van beide verbouwen in de optimale situatie."

Jeannet: "Ja nou, dat weet je toch..."

Guido: "Dan moet je toch deze getallen..."

Jeannet: "De hoekpunten..."

Guido: "invullen in de functie die wij hier gemaakt hebben, want daar is die functie toch voor."

Ivo: "Ja, maar wat zij zegt is inderdaad waar, daar komt dat getal uit als het goed is."

Guido: "Dus als je dit, dus driehonderd maal dit..."

Ivo: "Guido, Guido."

Guido: "Plus driehonderd maal dat plus vierhonderd maal dat..."

Ivo: "Ja, en wat komt daar uit? Daar komt uit..."

Jeannet: " $A_k$  is 220..."

Ivo: "Tweehonderddrieduizenddriehonderddrieëndertigéénderde."

Jeannet: "Hallo,  $x$  is tweehonderdtwintig,  $y$  is tachtig en  $z$  is tweehonderdtachtig zijn die drie punten. Dan weet je  $A_k$  is dat,  $B_s$  is dat en  $B_k$  is dat. Nou,  $A_s$  is tweederde  $B_s$  is tweederde van tachtig."

Ivo: "Ja, dus  $A_k$  is..." [hij schrijft het op].

Jeannet: "Tweehonderdtwintig,  $B_s$  is tachtig,  $B_k$  is twee-

*honderdtachtig en A<sub>s</sub> is tweederde van tachtig."*

In de optimale situatie verbouwt A dus  $93\frac{1}{3}$  acre suiker en 160 acre katoen. B verbouwt 40 acre suiker en 340 acre katoen. De winst voor A bedraagt US\$ 85.333, voor B is dat US\$ 118.000. De beide kibbutzim benutten  $63\frac{1}{3}\%$  van hun grond. Het tweede lesuur is voorbij.

## De computer in het onderwijs

Een computerprogramma bij het onderwerp lineair programmeren had er ook heel anders uit kunnen zien. De didactische keuzen die bij het ontwerpen van een computerprogramma als dit gemaakt worden, hangen in de eerste plaats af van de achterliggende visie op het gebruik van de computer in het onderwijs. Wie het leerplan uit het précomputertijdperk als uitgangspunt neemt, zal de computer bijv. willen inzetten bij het trainen van allerlei vaardigheden. In dit geval zou bij lineair programmeren gedacht kunnen worden aan een 'drill-and-practice'-programma, waarmee de leerlingen zich kunnen oefenen in het oplossen van stelsels vergelijkingen met drie of meer onbekenden. Het gekke van deze opvatting over computergebruik is, dat de computer ingezet wordt om precies het dorre rekenwerk te trainen dat de computer in de praktijk van alledag van de mens overneemt. Als dat geen tegenstrijdigheid is! Het gebruik van de computer zou juist ruimte voor denkwerk en creativiteit moeten geven. Alvorens het trainen van allerlei vaardigheden te automatiseren, zou eerst een bezinning moeten plaatsvinden over de vraag welke vaardigheden in het computertijdperk nog zinvol zijn om te beheersen. Alleen vanuit die achtergrond zijn 'drill-and-practice'-programma's te legitimeren. Het vertalen van een willekeurige bladzijde met oefenstof uit een willekeurig boek in een computerprogramma is niet anders dan oude wijn in nieuwe zakken en getuigt van een *conservatieve kijk* op het gebruik van de computer in het onderwijs.

Wie de invloed van de computer op de maatschappij als uitgangspunt neemt, zal de computer vooral als snelle verwerker van gegevens, als stuk gereedschap willen inzetten. In de werkelijkheid buiten de school is de computer meestal een 'black-box': je stop er iets in en er komt iets uit, wat daar tussen in gebeurt is niet duidelijk en doet niet ter zake. Een computerprogramma voor lineair programmeren, waarbij de doelfunctie en de beperkingen ingevoerd worden en de optimale oplossing er even later uitrolt, is van dit type. De gebruiker laat de machine voor zich werken, maar heeft weinig inzicht in de stappen die door de computer genomen worden. In een onderwijssituatie daarentegen, kan dit inzicht wel gegeven worden. De black-box kan als het ware doorzichtig gemaakt worden en de leerling kan meekijken hoe een bepaald algoritme door de computer wordt uitgevoerd. Door deze didactische component kon programma-tuur voor het onderwijs zich onderscheiden van programma-tuur voor bijv. het bedrijfsleven. Deze visie kan er toe leiden dat oude onderwerpen dankzij de computer in de toekomst op een andere

manier aangepakt gaan worden. Bovendien is het ook goed mogelijk dat nieuwe onderwerpen hun intrede doen. Daarom zou ik deze benadering willen typeren als een *progressieve kijk* op het gebruik van de computer in het onderwijs.

## Reacties van leerlingen en leraar

Bij het ontwerpen van het programma LINPROG heeft het als tweede geschetste uitgangspunt voorop gestaan. De didactische vulling van de black-box is gezocht in de stapsgewijze opbouw van het toelaatbare gebied zoals dat in het programma gerealiseerd is. Dit met de bedoeling een bijdrage te leveren aan het inzicht van de leerlingen in de techniek van het ruimtelijk lineair programmeren.

De leerlingen schrijven hier zelf over:

*"Het kibbutzprobleem was moeilijk t.o.v. problemen in het boek. Wel vond ik het gebruik van de computer hierbij een goed idee, omdat je stap voor stap de som (en daarbij het antwoord) op het scherm ziet verschijnen."*

*"Ondanks de computer heb ik niet veel geleerd over het opstellen van een model, voornamelijk omdat ik het zo'n moeilijke som vond. Wel heb ik iets geleerd over de techniek van het oplossen; met die 'tekeningen' van de computer was het allemaal goed te zien."*

De problemen uit de werkelijkheid zijn altijd veel complexer dan de problemen uit schoolboeken. Wiskundige modellen vormen een hulpmiddel om de complexe werkelijkheid in kaart te brengen. Bij de verwerking van deze modellen wordt de computer vaak ingeschakeld. Het leren werken met dit soort modellen is kenmerkend voor wiskunde A. Wat ligt dan meer voor de hand dan om je af te vragen of, door het inschakelen van de computer, de leerlingen overweg zouden kunnen met realistischer en dus vaak moeilijker contexten en lastiger modellen? Vandaar dat de leerlingen bewust een moeilijke opdracht kregen voorgeschoteld. Over het feit dat de opdracht moeilijker was dan de sommen uit het boek, waren alle leerlingen het eens.

Enkele reacties:

*"De kibbutzsom was moeilijker dan de sommen in het boek, maar met de hele groep samen ging het toch nog wel."*

*"Ik weet nu dat er nog ingewikkeldere problemen zijn dan die van het boek."*

*"De kibbutzsom was wel iets moeilijker dan de sommen in het boek, maar het uiteindelijke resultaat bleek niet echt moeilijk (er werd te verfte moeilijk nagedacht, terwijl veel vergelijkingen wat meer voor de hand lagen dan we dachten)."*

Het werken met een computerprogramma zoals dit, kan niet los gezien worden van de presentatie van een (moeilijke) opgave daarbij. De leerlingen moeten eerst een probleem voorgeschoteld krijgen, alvorens de computer een bijdrage kan leveren aan de oplossing ervan. Dáár ontleent de computer z'n bestaansrecht aan.

Uit het enthousiasme waarmee de leerlingen aan deze opdracht gewerkt hebben, bleek dat een moeilijke context waarbij het model nog helemaal opgesteld moest worden, voor deze groep wiskunde A-leerlingen een haalbare zaak is.

*“De kibbutzsom vond ik pittig, het was een som waarvoor je een stap verder moest denken. Overigens was het wel een leuke uitdaging. Zonder computer had ik het oplossen minder leuk gevonden. Het zou dan teveel werk met zich meebrengen.”*

*“Deze kibbutzsom was moeilijker dan de sommen in het boek en dat zit ’m met name in die vierde variabele. Het elimineren daarvan vereist meer algebraïsche kennis dan meestal voorradig is. Met een computer werken vind ik ontzettend leuk, omdat hij zomaar iets voor je doet (als je het goed invoert, tenminste).”*

*“In vergelijking met het boek was dit een moeilijk probleem. In het boek kon je de antwoorden zo opschrijven, de vergelijkingen “rolden” zo uit de tekst. Nu moet je echt werken en nadenken en proberen. De computer was onmisbaar, alleen met pen en papier zou ik hem nooit hebben kunnen oplossen. Want het tekenen van de grafiek vind ik zeer moeilijk werk, om van niveaulijnen nog maar niet te spreken. Deze opgave heeft wel geholpen met opstellen van een probleem. Misschien klinkt het gek maar het traint je in problemen oplossen bij andere vakken (bijv. Aardrijkskunde).”*

Als dat niet mooi gezegd is!

Het is jammer dat de praktische problemen bij het werken met computers op school vaak zo groot zijn. Redmer, de leraar, zegt hierover:

*“Het werken met de computer geeft problemen in de begeleidingssfeer. De klas wordt in twee groepen gesplitst omdat 29 leerlingen op 10 computers te veel is. Dat betekent dat er in twee lokalen gewerkt wordt. Je aandacht is verdeeld over beide groepen. Er wordt in tweetallen bij de computer gewerkt. Dat op zich houdt je het hele lesuur bezig, je begeleidt de wiskundige gang van zaken, maar ook de technische! De leerlingen zijn nog niet zo ingevoerd in het computergebruik dat alles zonder problemen verloopt.”*

En over de lineaire programmeringsopgave:

*“Het aardige van dit probleem – de landbouwplanning – is dat het door de moeilijkheidsgraad en de realiteitswaarde van de opgave (zie de koppeling met aardrijkskunde) beter te begeleiden valt dan het gemiddelde leerboekprobleem. De opgave nodigt uit tot discussie: je komt er met z’n tweeën niet uit, er zijn verbindingen met andere vakken. Er volgen gesprekken over de aanpak, de oplosmethode, de voorwaarden, maar ook over de realiteit van de oplossing. Daarmee stijgt het boven het ‘gewone’ werk uit en ben je waar je met wiskunde A zou willen zijn. Dat lukt niet altijd, wellicht zelden, maar het is de moeite van het proberen waard.”*

## Wat nog ontbrak

Dan wil ik nog een aspect noemen dat minder uit de verf is gekomen: het dynamisch omgaan met de resultaten van verwerking. Eén van de leerlingen schrijft:

*“De kibbutzsom vond ik in vergelijking met de sommen uit het boek een stuk moeilijker. Het gebruik van de computer vond ik zeer handig. Je bent nu niet zo’n tijd kwijt met het tekenen en daardoor heb je meer tijd om varianten te proberen zodat je een beter inzicht kreeg in de som en van het lineair programmeren zelf.”*

Voor vragen als “wat gebeurt er als ik... verander” was geen tijd meer. Maar waarschijnlijk is het niet alleen een kwestie van tijd geweest, het vraagt ook een bepaalde attitude om een opgave niet als afgehandeld te beschouwen als een concreet antwoord is gevonden.

Het gebruik van de computer biedt de ruimte om aan dit soort zaken meer aandacht te besteden, het doorrekenen van veranderingen hoeft dan immers niet veel tijd te kosten.

Voor wie nog zin heeft, de laatste vier opgaven van de werkbladen gaan in deze richting (de leerlingen hebben deze opgaven niet gehad).

Eigenlijk zou je nog verder moeten gaan, een beschouwing over de kwaliteit van het model, mogelijke verfijningen en dergelijke zouden hier op z’n plaats zijn. Op de momenten dat de leerlingen zich het sterkst inleefden in de context, hebben ze overigens impliciet wel over dit soort zaken gesproken. Achteraf zou dat alleen verder geëxpliciteerd moeten worden.

## Tenslotte

Tenslotte nog enkele algemene opmerkingen over de computer in het (wiskunde)onderwijs. Aan de ene kant lees je overal dat er zo’n gebrek aan software is, aan de andere kant weet een ieder die wel eens naar de NOT of een studiedag over computers in het onderwijs o.i.d. is geweest, dat het je daar duizelt van de computers waarop programmatuur gedemonstreerd wordt. Soms lukt het om bij dit soort manifestaties ook even zelf achter het toetsenbord te kruipen. Mijn ervaringen op dit gebied zijn grofweg in te delen in drie categorieën:

- het programma werkt niet goed; als de fouten al te storend zijn is dat jammer, want dan is het niet mogelijk een goede indruk te krijgen van de bedoelingen van het programma;
- ik heb het programma in twee minuten gezien; in dit geval gaat het meestal om oefenprogramma’s, de bedoeling is mij dan snel duidelijk;
- ik begrijp het programma niet goed of vraag mij af wat de bedoeling ervan is.

De laatste categorie is het interessantst. Het is alleen jammer dat het antwoord op de vraag “wat moet je ermee” zo vaak niet gegeven wordt.

De computer heeft dan de onterechte status van doel te zijn gekregen, terwijl het apparaat in verreweg de



meeste gevallen toch niet meer dan een hulpmiddel kan zijn. De aandacht zal dus vooral uit moeten gaan naar het concreet uitwerken van zinvolle leerdoelen, leeractiviteiten en didactische werkwijzen waarbij de computer een functionele rol kan spelen.

Ik hoop dat de voorgaande beschrijving van de opdracht over de landbouwplanning in Israël en de manier waarop de leerlingen daar aan werkten duidelijk heeft gemaakt wat ik daarmee bedoel. Beter één vogel in de hand dan tien in de lucht.

---

## Situatiebeschrijvingen in wiskundeteksten

Uitgave: SLO, Enschede, november 1984

'Contexten': een magisch woord in de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs.

Steeds meer wordt duidelijk dat het leren van wiskundige begrippen en het toepassen daarvan niet alleen binnen de wiskunde moet gebeuren, maar ook – en misschien juist – met behulp van relevante, op de realiteit betrekking hebbende problemen.

Daarmee doen 'contexten met niet-wiskundige elementen' hun intrede in het wiskunde-onderwijs, maar daarmee komen er ook, zoals we weten, een heleboel problemen bij. Want wat zijn goede contexten? Welke kenmerken hebben ze? Waar moet bij gebruik ervan opgelet worden? Enzovoorts, enzovoorts.

Onlangs is over dit onderwerp een boekje verschenen, getiteld: "Situatiebeschrijvingen in wiskundeteksten", uitgegeven bij de SLO en geschreven door een groep bestaande uit Frans Dolmans, Carlo Hollman, Hans Krabbendam, Cor Nagtegaal en Jos ter Pelle.

In het boekje wordt de lezer meegevoerd in de ontwikkeling die de auteurs met elkaar hebben doorgemaakt bij het nadenken over contexten.

De term 'context' wordt overigens in het boekje vermeden, omdat die term langzamerhand meer verwarring dan duidelijkheid schept. Voorgesteld wordt de term 'situatie' te gebruiken en 'situatiebeschrijving' als het gaat om een uitwerking van een situatie in leerlingentekst.

Over die situatiebeschrijvingen gaat het boekje in hoofdzaak.

In de eerste hoofdstukken wordt, aan de hand van vele voorbeelden, een steeds preciezere oriëntatie gegeven op situatiebe-

schrijvingen: Welke gemeenschappelijke kenmerken zijn er te ontdekken? Van welk belang zijn die en hoe zijn ze verwerkt?

Veel aandacht wordt besteed aan antwoorden op de vraag waarom je eigenlijk met situatiebeschrijvingen zou werken in het wiskunde-onderwijs. De auteurs zoeken antwoorden in de volgende richtingen: om leerlingen duidelijk te maken dat wiskunde ergens voor dient, om bepaalde wiskundige begrippen gemakkelijker en beter op de leerling over te brengen, om leerlingen beter te motiveren, enzovoorts.

Hoofdstuk 6 geeft de eerste conclusies van de verkenning die in de hoofdstukken daarvoor is gepleegd en dat levert vele aandachtspunten op die bij situaties en situatiebeschrijvingen een rol spelen, zoals: leerling nabijheid, echtheid, ingewikkeldheid, gestructureerdheid, verifieerbaarheid, authenticiteit.

Hoofdstuk 7 laat zien hoe een situatiebeschrijving wordt ontworpen en hoe die in de loop van het ontwikkelwerk verandert op basis van praktijkervaringen.

Hoofdstuk 8 tenslotte geeft de afronding in de vorm van aanbevelingen bij het gebruik van situatiebeschrijvingen in het wiskunde-onderwijs.

Kortom, een zeer informatief boekje (120 blz.), met zeer veel voorbeelden en herkenbare zaken. Het is vooral bedoeld voor geïnteresseerde docenten die zelf op de een of andere manier in de weer zijn met contexten, voor auteurs van wiskunde-schoolboeken, voor leerplanontwikkelaars, voor didactici en voor lerarenopleiders.

Te bestellen bij: SLO, Postbus 2041, 7500 CA Enschede, tel. 053-840840. Prijs: f 10,-