

# Au sujet de la représentation de l'espace

Chez nos élèves de l'enseignement secondaire; problématique – méthode

Gérard Audibert

Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier Cedex.

## Samenvatting

*Praten met Freudenthal over onderwijs in de wiskunde is niet praten over "Didactische Fenomologie van Wiskundige Structuren", alhoewel dit nu juist de titel is van zijn laatst verschenen boek.*

*Nee, praten met HF over wiskunde onderwijs is praten over een jongetje (Bastiaan?) of een meisje die probeert er iets van te begrijpen en de waarnemer niet zelden verbaasd doet staan.*

*Het onderzoek waar wij ons bij de IREM van Montpellier mee bezig houden is ook geïnspireerd door de belangstelling voor het kind en zijn denken. In dit artikel wordt beschreven waar jaren van onderzoek toe hebben geleid op het gebied van de meetkunde in de ruimte.*

Lorsque le Professeur Freudenthal me parle de l'enseignement des mathématiques il n'est pas question de "Didactical phenomenology of mathematical structures"<sup>1</sup>.

Mais il est question d'un petit garçon ou d'une petite fille qui cherchent un problème; et un Monsieur souriant et parfois émerveillé regarde cet enfant en essayant de comprendre. Les recherches que j'ai menées jusqu'à ce jour se sont inspirées de ce regard que Hans Freudenthal porte sur l'enfant.

Je veux aujourd'hui parler un peu des problématiques et des méthodes que nous employons à Montpellier car avec elles nous essayons d'approcher la pensée de l'enfant, nous voulons retrouver ce regard intelligent et amoureux que nous avons découvert chez Hans Freudenthal.

Je veux parler de nos problématiques et de nos méthodes en me limitant au sujet qui nous préoccupe depuis plusieurs années: la Géométrie de l'espace.

## La problématique – la pré-expérimentation sauvage

Des expérimentations antérieures<sup>2</sup>, portant sur la géométrie euclidienne plane nous ont permis de mettre en place dès le départ une problématique assez large.

## Summary

*Talking with Freudenthal about mathematics education is not talking about "Didactical Phenomology of Mathematical Structures" as the title of his last book may suggest.*

*Discussing mathematics education with Freudenthal is talking about a small boy or a young girl looking for the solution, and trying to understand it. Not seldom the child surprises us with a beautiful solution.*

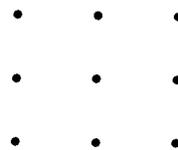
*The research of the IREM of Montpellier is carried out under the same philosophy: interest in the thinking-processes of the child.*

*In this article the author describes the result of a research carried out on the field of the geometry of space.*

Nous avons tout d'abord choisi un champ conceptuel d'une ampleur raisonnable, à savoir la géométrie euclidienne à trois dimensions.

Nous avons aussi décidé d'être attentifs à certaines procédures d'élèves. Nous nous intéressons en particulier au fonctionnement des contradictions, et aux contraintes que se donne l'élève et qui sont à la fois un moteur pour sa recherche et un blocage dans la découverte et que nous appelons contraintes d'équilibre.<sup>3</sup>

Pour bien comprendre ces contraintes d'équilibre nous proposons de chercher le petit problème de géométrie plane suivant:



Etant donné les neuf points constitués par les quatre sommets d'un carré, les quatre milieux des côtés de ce carré et le centre du carré. Tracer 4 segments consécutifs (sans lever le crayon) passant par les neuf points.

Mais la mise en place de notre problématique provient pour l'essentiel d'un regard porté sur nos élèves de 11 à 18 ans durant une longue période de plusieurs trimestres. C'est la phase de pré-expérimentation sauvage<sup>4</sup>. Durant cette phase le centre de nos interrogations est l'élève.

Notre premier soucis est de regarder ce que fait un élève lorsqu'il cherche un problème de géométrie dans l'espace. Pour cela nous posons de nombreux problèmes de géométrie à un grand nombre d'élèves.

C'est ainsi, par exemple, que nous proposons le problème dit "problème des triangles du cube" suivant:

Le dessin d'un cube en perspective cavalière étant donné aux élèves, on choisit des triangles formés par 3 sommets du cube et on demande s'ils sont rectangles? isocèles? équilatéraux? quelconques? (problème des triangles du cube).

Ou encore le problème du bol:

Un bol demi-sphérique recouvre entièrement un cube d'arête 10 cm posé sur la table. Quel est le rayon minimum de cette demi-sphère?

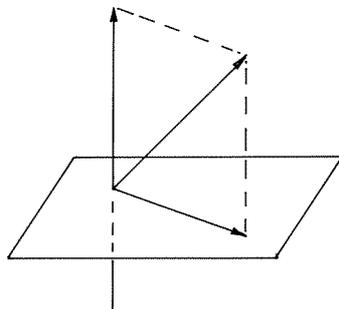
Nous travaillons en équipe. Cette équipe est constituée par une dizaine de professeurs. Chacun d'entre eux enseigne à une centaine d'élèves. Nous pouvons donc observer durant cette phase de pré-expérimentation sauvage au moins un millier d'élèves car:

$$10 \times 100 = 1000.$$

Au cours de cette phase les questions se précisent de plus en plus; c'est ainsi que nous nous posons progressivement les questions suivantes:

- L'élève *dessine-t-il* pour résoudre un problème de géométrie euclidienne à 3 dimensions?
- Quelles sont les différentes *représentations* de l'espace utilisée par les élèves?
- Quelles représentations de l'espace faut-il privilégier dans le déroulement de la géométrie euclidienne à 3 dimensions? Et en particulier, quelle place faut-il donner à la *perspective cavalière* (notée PC)?

Cette phase d'observation est accompagnée au sein de notre équipe d'une réflexion sur les programmes et leur évolution dans le temps, les livres, et la pratique des autres disciplines.



Nous constatons, par exemple, que dans des livres de la classe de première (16-17 ans) nous rencontrons souvent des figures telles qu'aucune explication des règles de dessin n'est donnée, aucune explication portant sur les pointillés n'est fournie. Une telle figure est-elle lisible pour un élève?

Toujours au cours de cette phase de pré-expérimentation sauvage, nous examinons aussi attentivement les différents travaux menés sur la géométrie de l'espace. Nous bénéficions des réalisations des IREM, des Colloques Inter-IREM, des rencontres internationales comme celle de la CIEAEM à Pallanza (Président Hans Freudenthal), ou celle de la sous-commission Belge de la CIEM à Mons<sup>5</sup>.

La pré-expérimentation sauvage permet de mettre en place une problématique<sup>6</sup>. Mais elle a aussi deux autres conséquences. D'une part elle aboutit à l'organisation de l'expérience proprement dite. Et d'autre part elle prépare en profondeur chaque membre de l'équipe car le long contact avec les élèves et la réflexion collective leur donne la maîtrise des objectifs et de la technique expérimentale et renforce du même coup la fiabilité des observations.

## La méthode expérimentale – les hypothèses

Dans deux articles Vergnaud G. (1981, 1983) présente les méthodes utilisées le plus souvent par les chercheurs en didactique. Il distingue: les entretiens individuels, les expériences planifiées papier-crayon, les expériences didactiques en classe, l'analyse des manuels et des pratiques des maîtres, d'autres méthodes comme les enquêtes sur de grands échantillons d'élèves, les études cliniques de cas, les études épistémologico-historiques.

Les expérimentations que nous réalisons pour étudier le champ conceptuel de la géométrie euclidienne de l'espace sont au nombre de deux. Dans la première les élèves sont en situation de recherche individuelle d'un problème. Dans la deuxième les élèves sont en situation proche de la classe. La première est du type: entretien individuel. La deuxième est du type: expérience didactique en classe.

Le but principal de ces 2 méthodes est de dégager des hypothèses. Nous entendons par hypothèse une affirmation de quelques lignes concernant l'enseignement des mathématiques qui est confirmée indubitablement par une de nos expériences. C'est ainsi qu'une première expérimentation où les élèves sont en situation de recherche individuelle d'un problème nous a permis de proposer l'hypothèse P.

Pour résoudre un problème de géométrie euclidienne de l'espace à trois dimensions, l'élève a besoin d'une représentation de l'espace constitué par un dessin dans lequel les trois directions principales longueur, largeur, hauteur sont distinctes; il a besoin d'une perspective. La perspective cavalière est la représentation la plus satisfaisante pour lui.

Mais l'hypothèse n'est pas un texte isolé. Elle se réfère à toute une analyse. C'est ainsi que l'hypothèse P est à associer au texte [7].

De plus l'hypothèse n'est pas un texte figé. Son ébauche est réalisée au cours des pré-expérimentations sauvages. Elle est écrite au cours de l'analyse de l'expérience. Elle peut évoluer d'une expérience à l'autre, s'affiner, être complétée ou même disparaître.

Enfin cette hypothèse est soumise à l'ensemble des chercheurs en didactique afin que d'autres expérimentations indépendantes des nôtres la confirment, la contredisent, l'affinent ou la nuancent. Elle est aussi proposée à l'ensemble des enseignants en activité afin que par une simple lecture, ils prennent position par rapport à ce texte. Leurs réactions, même peu argumentées, sont prises en compte dans nos recherches au même titre que les très nombreuses pré-expérimentations sauvages.

On peut reprocher à ces hypothèses de ne pas être explicitées définitivement avant l'expérience. Nous pensons qu'une telle exigence est un leurre car en définitive le seul produit social de toute expérimentation est un texte rédigé après l'expérimentation. Et en tout état de cause, seules les hypothèses bénéficiant d'un large consensus des chercheurs peuvent se traduire comme des résultats applicables à notre enseignement.

Nous ne présentons pas en détail la méthode expérimentale dans laquelle l'élève est en situation de recherche individuelle d'un problème et qui a été explicitée dans [3] et [9]. Insistons simplement sur les 3 aspects suivants:

- Cette méthode n'est possible que grâce à une longue pré-expérimentation collective.
- L'énoncé du problème minutieusement préparé permet d'éviter certains aléas des entretiens individuels plus classiques.
- Les hypothèses dégagées ne sont confrontées qu'aux seuls compte rendus rédigés à la suite des résolutions individuelles des élèves.

Nous nous heurtons avec la géométrie de l'espace à une difficulté qui avait une moindre importance en géométrie plane. L'élève, dès l'enseignement élémentaire et le premier cycle de l'enseignement secondaire (entre 10 et 14 ans) est relativement familiarisé avec la géométrie plane, il l'est beaucoup moins avec la géométrie de l'espace. Nous sommes donc amenés à mettre en place une expérimentation d'acquisition des connaissances. Dans cette expérimentation les élèves sont en situation proche de la classe. Nous voulons expérimenter un apprentissage du début de la géométrie de l'espace fondé sur une représentation technique particulière, la PC, permettant la maîtrise de la dualité maquette-dessin.

Nous nous plaçons dans un champ conceptuel particulier, celui de la géométrie euclidienne à trois dimensions et introduisons une technique particulière, celle du dessin en PC. Mais, plus généralement, nous essayons de voir si la possibilité d'action qu'offre une technique permet un comportement plus efficace face aux problèmes ou aux situations-problèmes, une plus grande maîtrise des procédures, et une amélioration de la formation des concepts.

Le choix d'une situation proche de la classe est imposé par notre volonté de développer un apprentissage relativement conforme à la situation scolaire: un maître et une classe d'élèves sont présents dans une même salle durant plusieurs séances, le but de l'apprentissage étant fixé.

L'apprentissage fait intervenir: des concepts, des pro-

cédures, des raisonnements, des symboles, un vocabulaire, mais aussi des objets, dessins et maquettes et des techniques de réalisation de dessins et de maquettes.

Dans ses aspects sociaux, cet apprentissage nous oblige à distinguer le maître, la classe, l'élève et le groupe d'élèves (2 ou 4 élèves) et leurs interactions.

Les deux pôles principaux de cet apprentissage sont d'une part ce qui est imposé par le maître, d'autre part les situations-problèmes.

Mais le but est d'expérimenter un apprentissage et non d'assurer un apprentissage. C'est un objectif d'expérimentation que nous poursuivons et non un objectif d'enseignement.

Nous respectons donc un plan d'expérience très strict, les objectifs visés et les effets attendus doivent être clairs et précis.

La mise en place des observations et donc des observateurs, doit être minutieusement programmée et déterminante. Le critère de fiabilité des observations nous oblige à choisir uniquement celles concernées par notre problématique. Nous utilisons des moyens audio-visuels et un observateur pour quatre élèves. Chaque séance donne lieu à un compte rendu d'ensemble et à un compte rendu pour chaque groupe de quatre élèves. Notre analyse ne s'appuie que sur ces compte rendus. Nous pensons étudier le critère de la répétabilité (ou de reproductibilité) en menant deux classes parallèles réalisées selon le même plan d'expérience<sup>7</sup>.

En définitive, les expériences envisagées jusqu'à ce jour par notre groupe et portant sur la géométrie de l'espace sont au nombre de trois. Deux d'entre-elles intitulées problème FIL et problème SEC concernent des élèves en situation de recherche individuelle d'un problème. La troisième que nous intitulons séquence PC concerne des élèves en situation proche de la classe et rappelle par son sigle PC les deux expressions: perspective cavalière, proche de la classe. Nous espérons que la totalité des analyses seront disponibles en fin 1987.

Entre 1970 et 1985, nous avons employé trois méthodes expérimentales:

- La première consiste à observer avec des moyens audio-visuels lourds quatre élèves en situation de recherche collective d'un problème; j'ai utilisé exclusivement cette méthode jusqu'en 1975.
- La deuxième consiste à observer des élèves en situation individuelle d'un problème (je viens d'en parler); je l'ai utilisé exclusivement de 1975 à 1982.
- La troisième consiste à observer des élèves en situation proche de la classe, dans cette méthode les travaux collectifs de groupes de quatre élèves sont pris en compte; les deux dernières méthodes sont utilisées conjointement après 1982.

Nous avons eu deux discussions importantes avec le Professeur Freudenthal, l'une en 1975 à Montpellier, l'autre en 1982 à Orléans. Elles n'ont pas été sans influencer les modifications méthodologiques introduites à ces deux dates dans notre travail. Ce fut pour nous un enrichissement. Hans Freudenthal est un grand mathématicien dont l'attitude vis à vis de l'enseignement est source de création. Qu'il en soit sincèrement remercié.

## Bibliographie

1. Cf. bibliographie [11].
  2. Un résumé d'une partie de ce travail se trouve dans [5].
  3. On peut aussi consulter [3], [9] ou [4] au sujet des équilibres. En ce qui concerne le fonctionnement des contradictions on peut se référer à [3], [9] ou [2].
  4. Cette phase de pré-expérimentation sauvage est présentée dans [8] et [14].
  5. On peut se référer à ce sujet à différents actes de colloques dont [12], [13], [10], [15].
  6. Une étude plus détaillée de cette problématique en géométrie de l'espace est présentée en [6].
  7. Au sujet de ce critère on peut se référer à [1].
- 
- [ 1 ] Artique M., *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques. Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques*. Thèse de Doctorat d'Etat, spécialité Didactique des mathématiques, publication IREM Université PARIS VII, 1984.
  - [ 2 ] Audibert, G., *Les contradictions dans la recherche d'un problème de géométrie*, Actes de la XXXIIIème Rencontre Internationale de la CIEAEM, édités par Michèle Pellerey, Pallanza 2/9 Août 1981 (pages 27 à 35).
  - [ 3 ] Audibert G., *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane* Vol. 1 et 2 IREM-USTL Place Eugène Bataillon Montpellier, 1982. Nouvelle Edition: publication de l'APMEP, 1984 N°56 (831 pages).
  - [ 4 ] Audibert G., *Processus de recherche d'un problème de géométrie chez l'élève de l'enseignement secondaire*. Educational Studies in Mathematics, 14 (1983) (pages 155 à 181).
  - [ 5 ] Audibert G., *Géométrie euclidienne plane dans l'enseignement secondaire*, Bulletin de l'APMEP n° 349; pages 349 à 353, 1985a.
  - [ 6 ] Audibert G., *Une problématique en géométrie de l'espace*, Edition IREM-USTL Place Eugène Bataillon Montpellier (63 pages), 1985b.
  - [ 7 ] Audibert G., *Représentation de l'espace et empirisme dans le problème FIL*, Edition IREM-USTL Place Eugène Bataillon Montpellier (80 pages), 1985c.
  - [ 8 ] Bonafe F., *La genèse du problème SEC* – Edition IREM-USTL Place Eugène Bataillon Montpellier, 1985.
  - [ 9 ] Chevalier A., *Le problème QAT: symétrie, vérification, algorithme de construction, la pratique de l'élève*, Edition IREM-USTL Place Eugène Bataillon Montpellier, 1984.
  - [10] C.I.E.A.E.M., *Processus de géométrisation et de visualisation, compte rendu de la XXXIIIème Rencontre Internationale*, organisée par la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques, 2/9 Août 1981, Pallanza – Edité par Michèle Pellerey.
  - [11] Freudenthal H., *Didactical phenomenology mathematical structures*, Dordrecht/Boston/Lancaster. D. Reidel Publishing Company, 1983.
  - [12] IREM Clermont-Ferrand, *Compte rendu des journées de Clermont-Ferrand sur l'enseignement de la géométrie de l'espace 16/17 Mai 1980*, édité par l'IREM de Clermont-Ferrand, 1981.
  - [13] IREM Marseille, *Actes du colloque Inter-IREM Géométrie, Journées SMF de Marseille*, 1/2 Juin 1984, publication de l'IREM de Marseille, 1984.
  - [14] Pelouzet B., *Phases pré-expérimentales d'une recherche sur la géométrie de l'espace*. Actes du colloque Inter-IREM Géométrie, Journées SMF Marseille, 1/2 Juin 1984, Publication IREM de Marseille, 1984.
  - [15] Sous-Commission Belge de la CIEM, *Colloque International sur l'enseignement de la Géométrie*, Mons 31 Août/2 Septembre édité G. Noël, Université d'Etat à Mons, 1982.
  - [16] Vergnaud G., *Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques*, Recherche en Didactique des mathématiques, Vol. 2.2, pages 215 à 231, 1981.
  - [17] Vergnaud G., *Introduction*, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 4.1, pages 9 à 25, 1983.
-