Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron

L. Streefland
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

Wiskunde als menselijke activiteit is en was de filosofie van het ontwikkelingswerk van IOWO en OW & OC. Freudenthal was de inspirator van veel van het materiaal dat in de loop der jaren werd ontwikkeld.
In deze bijdrage wordt gekeken naar de consequenties van deze filosofie. Concepten als de didactische fenomelogie van wiskundige structuren, het proces van mathematiseren, staan daarbij centraal. Ten slotte concludeert de schrijver dat Freudenthal en z'n medewerkers bijgedragen hebben aan het scheppen van een nieuwe wetenschap: wiskunde-onderwijs.

Summary

Mathematics as a human activity was and is the basic philosophy at the background of the developmental work of IOWO and OW & OC.
Freudenthal inspired the creation of educational material in the spirit of this philosophy over a long period of time. In the present contribution, some of the consequences of taking the stand of mathematics as an activity have been considered in a global way. Concepts like didactical phenomenology of mathematical structures, the process of mathematisation and its essential characteristics, the observation and outline of learning processes are at the core of it.
At last it has been concluded that Freudenthal and his co-workers contributed to the creation of a new science, the science of mathematics education.

"A mathematician should never forget that mathematics is too important to frame its instruction to suit more or less the needs of future mathematicians."
H. Freudenthal, Mathematics as an Educational Task, p. 69.

Voorbeeld als voorwoord

Coen (9;4) wil een vraag. Het wordt de volgende: Twee vrienden beslisten steeds wie met het spelletje mocht beginnen, n.l. wie de hoogste ogen gooide met een dobbelsteen. Op een keer wilden ze wel eens wat anders. De één zei: "Wie 't eerst 'even' gooit begint." De ander: "Nee, wie 't eerst hoger dan 4 gooit begint." Ze besloten beide te doen, dus de één 'even', de ander 'hoger dan vier'.
Vader: "Wat zou jij kiezen?"
Coen telt zachtjes, zichtbaar zijn vingers uitstekend tot drie en zegt dan: "Ik zou voor even kiezen."
V: "Waarom?"
C: "Bij 'even' heb je drie kansen en bij 'hoger dan vier' maar twee."
Vijf dagen nadien.
V: Die jongens van dat spel van laatst wilden nu ganzenbord spelen. Ze beslisten zó, wie beginnen mag: De één: 'Even' gooien met een dobbelsteen. De ander: 'Kop' gooien met een munt.
V: "Wat zou jij kiezen?"
C (onmiddellijk): "Kop gooien met een munt!"
V: "Waarom?"
C: "Nou, bij een munt heb je maar één keer, dat het mis kan gaan, bij een dobbelsteen kun je wel drie keer misgooien."
V: "Ja, dat is zo. Maar, wèlke mogelijkheden heb je bij een munt?"
C: "Twee. Kop en munt."
V: "Dus 'kop' is: één van de twee. Hoe zit dat bij even met een dobbelsteen?"
C: "Drie van de zes."
V: "Nou, wat vind je ervan? Eén van de twee of drie van de zes?"
C (heel aarzelend): "Allebei hetzelfde?" (Uit zijn aarzeling blijkt, dat hij er zelf niet van overtuigd is.). Dan veert hij ineens op en zegt: "Ja, 't is allebei *de helft.*"

Wat is wiskunde?

Is wiskunde een slijpsteen voor de geest of een slijpsteen voor de geest van enkelen? Of zou de geest juist een slijpsteen voor de wiskunde moeten zijn? Zij is in elk geval een vak dat verplicht zou moeten worden gesteld en Staatssecretaris Ginjaar-Maas is niet de enige die er zo over denkt. Ook K.L. Poll vindt dat [1].
Waarom? Wiskunde ontwikkelt het gevoel voor zekerheid, zo betoogde Poll eens en als zodanig is zij de tegenpool van de poëzie; de 'meest heldere, tijdloze en onpersoonlijke zekerheid' van de wiskunde tegenover de 'meest vage en vluchtige Ahnung' van de poëzie. De wiskunde is waar voor alle mogelijke werelden, zo volgde Poll Wittgenstein na, die van kleuter tot grijsaard en van verbeelding tot waarneembare werkelijkheid, voor de toekomst en voor het verleden. In zes-en-een-halve eeuw blijkt er maar weinig veranderd. Zo laat Umberto Eco zijn 'Sherlock

Holmes' broeder William van Baskerville, anno 1327 belast met het ontraadselen van een mysterieuze moord in een abdij in Noord-Italië tegenover zijn 'Watson' Adson van Melk een kijk op wiskunde ontvouwen, die eveneens lippendienst bewijst aan de wiskunde als onaantastbare en eeuwige waarheid: "Wiskundige kennis bestaat uit stellingen die door ons intellect zijn geconstrueerd op zulk een wijze dat ze altijd als waar gelden, hetzij omdat ze ons aangeboren zijn, hetzij omdat de wiskunde eerder is uitgevonden dan de andere wetenschappen." [2]

Beide standpunten weerspiegelen een van haar wordingsproces vervreemde wiskunde. Onpersoonlijk. Tijdloos. Maar... wèl zekerheid ontwikkelend, ook al zou je dat aan het aantal afhakers en de percentages onvoldoendes bij het eindexamen niet zeggen. Hoe kan dat?
Wel, het gaat om autonoom geworden wiskunde, onthecht van de realiteit, van haar ontstaansproces; wiskunde, waaraan de dynamiek ontbreekt, die alleen nog maar als systeem reproduceerbaar is.
In welk een schril contrast daarmee staat dan ons 'voorbeeld als voorwoord', waarin de jongen met vallen en opstaan op weg is zich het a priori kansbegrip te veroveren, gaand van succes naar feilen en opnieuw naar succes. Dat was het, wat Lakatos, bijvoorbeeld, zo tegenstond in de kijk op wiskunde als altijddurende en onbetwistbare waarheid, nl. het verstikken van mislukking, van eigen vondsten door onderzoek, van avontuur. In zijn weerstreven van deze wiskunde staat Lakatos [3] niet alleen. Met hem haalden Freudenthal, Hilton, Thom, Whitney en anderen deze wiskunde van haar voetstuk. Terwijl Lakatos pleit voor heuristisch wiskunde-onderwijs dat zich voltrekt aan materiaal, dat een rationele reconstructie van de historische ontwikkeling weerspiegelt, wil Freudenthal lerenden de gelegenheid geven het leerproces van de mensheid te herhalen [4]. Zo pleit Thom vóór betekenis, voor 'meaning' en tegen formalisme [5], evenals Whitney [6] dat doet, en Hilton tenslotte benadrukt het belang van investeringen op lange termijn en de eigen produkties en constructies van de lerende in het lange termijn leerproces [7] [8].

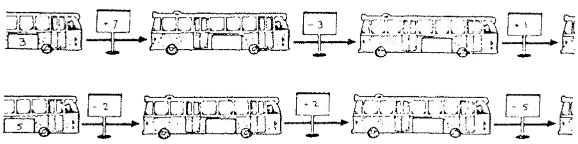
In de realiteit als bron, daar dient de wiskundige activiteit steeds te ontspringen, dat wil zeggen in de reële verschijnselen achter de wiskunde, die men op het oog heeft. Reële bron als startpunt voor wiskunde als menselijke activiteit lijkt nogal voor de hand te liggen, ja klinkt vanzelfsprekend. Immers, de wiskunde die lerenden zich op deze manier toeëigenen, de begrippen, operaties en structuren, die aldus als mentale objecten worden geconstitueerd, worden zodoende met hun reële oorsprong verenigd. Dit nu lijkt extra garanties te bieden voor cognitieve verankering van het geleerde van blijvender duur, dan hedentendage na veel wiskunde-onderwijs het geval is.
Is het nu allemaal wel zo simpel als het lijkt? We zullen proberen enkele consequenties van de stellingname ten gunste van de realiteit als bron voor wiskunde als menselijke activiteit onder ogen te zien.
Het lijkt daarbij onvermijdelijk verschijnselen afzonderlijk te beschouwen die in feite onverbrekelijk samenhangen. Het zij zo.

Uitgaan van de realiteit

Wat houdt dit in? Wel, in de eerste plaats moet worden achterhaald, hoe de wiskunde, die men op het oog heeft, inherent is aan de realiteit. De realiteit van en voor wiskunde-lerende kinderen van uiteenlopende leeftijd, wel te verstaan, inleefbaar, beleefd, doorleefd; experience vécue, daar gaat het om.
Zijn er geen alternatieve basisconcepties? Die zijn er stellig [8]. Daarop gaan we nu verder niet in. We hadden immers al gekozen. Bovendien stonden aan de wieg van de wiskunde allerlei praktici als de koopman, de rekenaar, de boekhouder, de bankier, de landmeter, de bruggenbouwer e.d. De geboorte van de wiskunde had dus niets kunstmatigs. Het was een normale, reële boreling, geen reageerbuisvrucht. Toen nog niet.
Dat nadien, bij de ontwikkeling van de wiskunde als volwaardige wetenschap de distantie tot de alledaagse werkelijkheid enorm is toegenomen doet aan genoemd feit niets af.

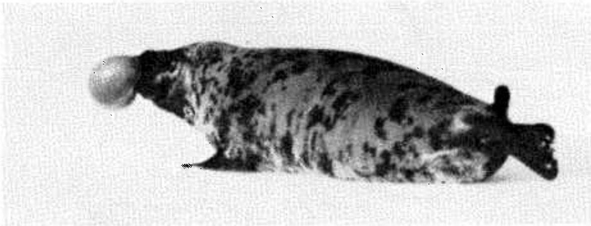
Uitgaan van de werkelijkheid dus, in de ruimste zin van het woord en hoe de wiskunde erin vervat is. Freudenthal heeft samen met de medewerkers van het IOWO in negen inspirerende en bewogen jaren van onderwijsontwikkelingswerk dit idee tot werkelijkheid gemaakt. En daarna ook binnen OW & OC en in andere groeperingen, zij het niet af. Onderwijsontwikkeling is trouwens nooit af, kan niet af zijn.

Welke realiteit? Welke wiskunde? Ik noem opsommenderwijs enkele voorbeelden om te laten zien, dat het hele wiskunde-onderwijs in ieder geval tot aan universiteit en hogere beroepsopleiding bestreken kan worden.



Uit: Wiskobas bulletin; leerplanpublikatie 2.

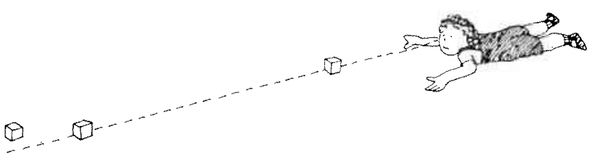
Wel, de realiteit van de autobussen en het komen en gaan van passagiers in en uit de bus, als informele, en vooral dynamische toegang tot de bewerkingen optellen en aftrekken met kleine getallen in natuurlijke samenhang [9]; de realiteit van reus Egbert in "Met de groeten van de reus" [10], waar Egbert's werkelijkheid in de voorstelling van de kinderen (8 à 9 jaar) ècht wordt: hoe lang zou hij zijn als zijn hand vier keer zo lang is als die van de Juf, hoe zit het met zijn zakdoek, zijn krant? Hoe groot is zijn schoenzool? Wat voor stappen neemt hij? enz. Het gaat om de verstrengeling van de leerlijn voor verhoudingen in de visuele werkelijkheid met die, welke op den duur op toenemende numerieke precisie aanstuurt [11]; de realiteit van de wedstrijdschaatsbaan, waar kinderen op tekening uitzoeken, waar je moet starten voor de 500 m, de 1500 m,..., waar nagedacht kan worden over afstand, tijd en snelheid, over meten en kommagetallen, over rijschema's en grafieken en de invloed van valpartijen en tegenwind op gemiddelde snelheid [12]; de realiteit van Gulliver's reizen van Jonathan Swift, waar het effect van lineaire vergroting op oppervlakte en inhoud tot verrassende inzichten kan leiden voor twaalfjarigen (en ouder) [13]; de realiteit van de zichtbare dingen om ons heen, van perspectief en parallelprojectie; van 'licht op schaduw en diepte' en 'zie je wel' voor brugklassers [14]; de realiteit van het vliegen met hanggliders, gliders, zweefvliegtuigen en gemotoriseerde toestellen brengt al mathematiserend vectoren en elementaire gonio- en trigonometrie voort voor 15 à 16 jarigen [15]; de realiteit van verandering in het algemeen en die van verandering van afstand in de tijd in het bijzonder wordt aangewend als toegang tot de differentiaalrekening [16]; en tenslotte noem ik de realiteit van de klapmutsen, een zeehondensoort, die zich voortplant op het Jan Mayeneiland nabij Schotland, waarvan het populatieverloop aanleiding geeft tot de (toegepaste) wiskunde van de Lesliematrices [17].



Uit: "Matrices".

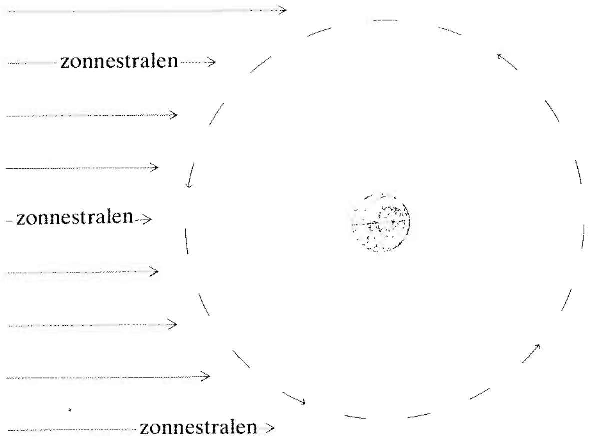
Let wel, stukken onderwijs, niet door Freudenthal ontwikkeld, maar in de geest van de ideeën die hij samen met anderen heeft gecreëerd.

Bovenstaande greep uit een aanzienlijk omvangrijker geheel toont, dat een realistisch curriculum mede, en wellicht wel in de eerste plaats, gestructureerd kan en moet worden naar realiteiten, in plaats van dat het systeem van de wiskunde die structuur afdwingt. Zo veel mogelijk geschikte realiteit en gedurig, in het leerproces, daarop komt het aan, als bron voor de wiskunde en om de wiskunde erin toe te passen. Het zou van oppervlakkigheid en kortzichtigheid getuigen, als we daarmee volstonden: met de opsomming van slechts wat voorbeelden, hoe belangrijk en inspirerend op zichzelf ook.
Een gewichtige volgende kwestie is nu de aard van de relatie tussen de werkelijkheid en de wiskunde, die men nastreeft, vast te stellen. Bedoelde verbinding is immers beslissend voor het verwerven van de wiskunde in het leerproces.
Om de kloof tussen de visie op wiskunde als menselijke activiteit en concreet onderwijs dienovereenkomstig te overbruggen is de methode van de didactische fenomenologie of mathematisch-didactische analyse beschikbaar.

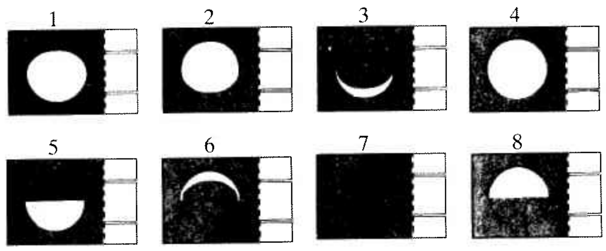


Uit: "Zie je wel".

Bij het toepassen van genoemde, heuristische analysemethode put men uit alle mogelijke bronnen, die men tot zijn beschikking heeft, zoals de taal, de wiskunde, de historie van de wiskunde, leerboeken, de realiteit, kennis die men heeft van leerprocessen enz. De analyse wordt verricht met geen ander doel dan de verschijnselen in de realiteit met de passende wiskunde in verband te brengen teneinde die verschijnselen te ordenen en wiskundig beheersbaar te maken en dit alles met het oog op het leerproces, waarin men kinderen die wiskunde wil laten verwerven [4].



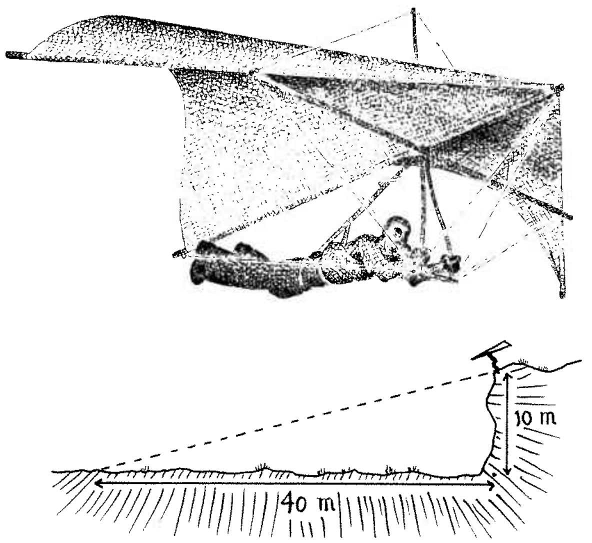
Je kijkt van bovenaf op de aarde. De korte pijltjes geven de route aan die de maan elke 29 dagen aflegt.
Knip de acht maangezichten van de bladzijde daarna uit en vouw ze zoals het tekeningetje aangeeft. Kijk vanaf de aarde naar de maan en zoek dan het juiste maangezicht uit. Stel ze langs de maanbaan op. Zoek de goede plaats voor alle acht. Laat het zien en plak ze dan vast.



Uit: "Schaduw en diepte".

Het moge duidelijk zijn dat hoe rijker iemands persoonlijke kennisbron gevuld is, des te waardevoller de vrucht van zijn analyse als voorontwerp voor realistisch wiskunde-onderwijs kan zijn en dat men bovendien behalve wiskundige kennis ook kennis van het onderwijs en in het bijzonder van leerprocessen dient te bezitten. Zulk een analyse legt macro-structurele verbanden bloot, d.w.z. onthult de globale structuur van een curriculum of deelleergang, die uit de gesystematiseerde wiskunde niet blijken, althans niet voor de handliggend zijn. Bijvoorbeeld.
Een mathematisch-didactische analyse van gebieden als meten, verhoudingen en breuken heeft didactische sequenties aan het licht gebracht, waarin het kwalitatief 'vergelijken' en 'ordenen' van grootheden op meer kwantitatieve methoden vooruitgrijpen. Het ordenen onder het opzicht 'wat is meer? (langer, zwaarder)' e.d. leidt vanzelf tot 'hoeveel meer (langer, zwaarder)', wanneer het probleemveld om grotere

precisie vraagt. Het aftrekken als volgende stap in de didactische sequentie ligt dan 'op de stip' en laat men aan het optellen voorafgaan, terwijl de vaklogische samenhang het aftrekken juist als inverse van het optellen afdwingt. Deze methode vermag ook een stukje wiskunde van de ondergang te redden, wiskunde die mathematisch-didactisch rijk is en gewichtig voor het mathematiseringsproces over langere termijn. Ik doel hier op verhoudingen, die door structuralistische kortzichtigheid tijdens de New-Math-beweging uit elementaire programma's vrijwel geweerd werden ten faveure van de breuken. Het was de didactische fenomenologie, waardoor verhoudingen gerehabiliteerd werden, mede door de rijkdom aan toepassingsmogelijkheden en essentiële wiskundige activiteiten, die aan het licht gebracht werden. De essenties van de wiskundige activiteit, daarom is het te doen. Om het zodanig organiseren van een reëel probleemveld, dat het toegankelijk gemaakt kan worden voor bewerking met wiskundige middelen. Het gaat dan om wiskundig ongestructureerd of weinig gestructureerd materiaal, dan wel om materiaal van wiskundige aard. Mathematiseren dus, *horizontaal*, wanneer we de grensoverschrijding van reëel probleem naar de wiskunde, de wiskundige verwerking en beschouwing van de uitkomsten daarvan in de reële context op het oog hebben, *verticaal* wanneer we de voortschrijding in de wiskunde en herschikking en reorganisatie van wiskundig materiaal op het oog hebben. Het was Treffers, die deze vormen van mathematiseren onderscheidde [18].



Uit: "Vlieg er eens in".

Nu kan het echter gebeuren, dat de nodige wiskundige middelen nog ontbreken, omdat de lerende er nog niet over beschikt. Deze zullen dan in en tijdens de probleemoplossing zelf gecreëerd moeten worden. Bijgevolg zijn (re-)invention en constructie kernbegrippen om het mathematiseren globaal te typeren.

Mathematiseren, Re-invention en Constructie

Reële wiskunde is in de realiteit toepasselijke wiskunde. En wie wiskunde toepast, doet die wiskunde opnieuw ontstaan, herschept haar. Daarvoor deugt panklare wiskunde niet. Re-invention betekent dus zelf voortbrengen, zelf construeren, werktuigen om wiskunde te bedrijven en taal om te beschrijven. Dit is onvermijdelijk; conditio sine qua non. De beginner immers – zoals we al hebben opgemerkt – staat nog met betrekkelijk lege handen als het op wiskundige gereedschappen aankomt. De te construeren werktuigen in de vorm van (visuele) modellen, schema's en symbolen – zo aanstonds weer met een voorbeeld toe te lichten – zullen vooral gedurende de eerste jaren van het wiskundeleerproces hun realistische bron (kunnen) blijven weerspiegelen. De werkelijkheid wordt tot model verschraald, tot 'model van' tot *na*beeld.
Als je iets gemaakt hebt, gemodelleerd, wordt het gemakkelijker er nog eens over *na* te denken, erop te reflecteren, in het denken het maken nog eens mentaal te vervolgen. Een gevolg kan zijn de ontdekking, dat het geconstrueerde model ook bruikbaar is om verwante of nieuwe probleemsituaties te organiseren en te bewerken. Het geconstrueerde werktuig is dan *vóór*beeldig geworden, model vóór het wiskundig gaan beheersen van nieuwe werkelijkheden. In de mentale omslag van nabeeld tot voorbeeld worden bewustwording en niveauverhoging in het leerproces manifest. Genoemde blikwisseling weerspiegelt het nieuw verworven inzicht van de bredere bruikbaarheid van het geconstrueerde model. Nu eerst over tot het toegezegde voorbeeld, waarin één en ander toegelicht zal worden. Vervolgens wordt nog ingegaan op enkele algemene kwaliteiten van het mathematiseren.

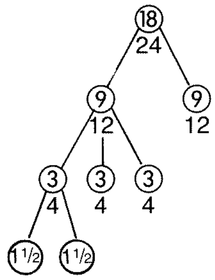
Het is niet ongebruikelijk als concrete bron voor de breuken het breukverwekkend eerlijk verdelen te kiezen met een pizza- of pannekoekenrestaurant als context. Door verdeelsituaties als bijv. '4 kinderen verdelen eerlijk 3 pizza's' te beschouwen en te vergelijken met '8 kinderen verdelen 6 pizza's' e.d. en in verband daarmee problemen op te lossen zowel met als zonder het voltrekken van verdelingen, worden de deelleergangen voor breuken en verhoudingen van meet af aan op ongekunstelde wijze verstrengeld.
Nu zullen ook minder overzichtelijke situaties, zoals '24 kinderen verdelen 18 pizza's' tot meer beheersbare proporties moeten worden teruggebracht.
Ziet u ze al zitten, die 24 kinderen rondom één grote tafel en de 18 pizza's erop? Kinderen van een vierde klas, oude stijl bedachten hiervoor het symbool: ⑱
24
Het had echter ook anders gekund met die 24 kinderen. Rondom twee tafels bijvoorbeeld: ○ ○
12 12
en de pizza's 'à l'avenant': ⑨ ⑨
12 12
Vormden de twee tafels eerst die ene grote, dan was er dus geschikt en geschoven, met en om de tafels:

⑱
24
/ \
⑨ ⑨
12 12

Daarbij hoeft het niet gebleven te zijn:

⑱
24
⑨ ⑨
12 12
③ ③ ③ ③ ③ ③
4 4 4 4 4 4

Zie hier in een notedop enkele aspecten van een mathematiseringsproces van 10 à 11-jarigen. Het horizontale mathematiseren kenmerkt zich door de symboolconstructie, waarbij van het nodige in de context moet worden afgezien.
De schemabouw maakt de poort tot een verticaal mathematiseringsproces vrij door de mogelijkheden tot bezuiniging op het schema, door middel van het snoeien van takken, bijv. èn uitbreiding van de toegepaste methode tot andere situaties, waarin twee grootheden op natuurlijke wijze samenhangen. Op de achtergrond speelt de context van het tafelschikken de rol van *situatiemodel*.



Voordat het echter zover is in het leerproces, dient eerst de nodige objectivering te hebben plaatsgevonden, aleer de situatie echt wiskundig bewerkbaar is in de geest zoals geschetst.
Ongetwijfeld hebt u in het voorgaande de mogelijkheid herkend tot de constructie, tot het genereren van equivalenties, d.w.z. gelet op de portie voor ieder. De weg tot dit inzicht kan echter door sociaal-emotionele overwegingen versperd zijn, zoals bijv.: 'Ik zit het liefst bij $\overset{18}{24}$, want daar zijn de meeste kinderen en dat is tenminste gezellig' [19] [8]. Mathematiseren in realistisch wiskunde-onderwijs omvat ook het verwerken van dergelijke obstakels. In het voorbeeld, hoe beknopt ook, klonken elementen van cognitieve operaties door, die het voortschrijdende mathematiseringsproces kenmerken, nl. *abstraheren*, *generaliseren* en *unificeren*.

Abstraheren, het schikken van de realiteit naar wiskundig model, kwam in het voorbeeld duidelijk tot uitdrukking. De lerende neemt afstand van zijn intuïtieve niveau. (Het heeft dus geen zin abstracties van buitenaf op te leggen).
Abstractie kenmerkt ook het voortgaan binnen de wiskunde zelf met het doel om hogere of algemenere standaards van modelvorming te bewerkstelligen. In het voorbeeld is dit de verbreding van de toepassingsmogelijkheden van het geconstrueerde symbool naar andere dan verdeelsituaties, hetgeen een belangrijke stap betekent op de weg naar de lineaire functie als abstract en definitief wiskundig model voor verhoudingsconstantie.

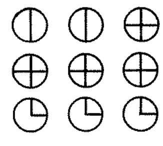
Generaliseren houdt in het werpen van nieuw licht op een speciaal geval teneinde dit onder te brengen in een wijder theoretisch verband.
Met de verwijzing naar het voorbeeld onder abstractie is tevens het begrip generalisatie geïllustreerd. De genoemde toepassingsverbreding werpt immers nieuw licht op de verdeelsituaties, doordat ze in het wijdere verband van de persoonlijke theorie die de leerling voor verhouding heeft, wordt ondergebracht.

Unificeren is het op dezelfde wiskundige noemer zetten van (ogenschijnlijk) uiteenlopende verschijnselen. De geschetste instap in de breuken via verdeelsituaties binnen een veelzijdiger benadering van verhoudingen en breuken brengt op den duur als vanzelf mentale vereenzelviging van equivalentie van beide teweeg. Deze mogelijkheid tot unificeren werd in de New Math a priori uitgesloten, zoals we gezien hebben.

Het leerproces waarvan een stukje getoond werd, heeft in feite dezelfde kwaliteiten als leerprocessen in de wordingsgeschiedenis van de wiskunde. Zonder dit nader uit te werken en onder verwijzing naar publikaties van Freudenthal, noem ik als voorbeelden de voorgeschiedenissen van abstracte begrippen als groep en lichaam [20] [21]. Ook daarbij kenmerkten abstraheren etc. het voortschrijdende mathematiseringsproces, dat in genoemde abstracte concepten zijn bekroning vond. Iets dergelijks geldt ook voor de natuurkunde, waar de grenzen tussen klassieke domeinen allengs vervaagd zijn. In zijn prachtige oratie van 10 juni 1985 formuleerde Nienhuis het aldus: "...dat... uiteenlopende verschijnselen, die op een zeker niveau van beschrijving geen samenhang lijken te vertonen, op een dieper niveau als verschillende manifestaties van eenzelfde effect herkend worden" [22].

Het unificeren kreeg in deze beschouwing tot dusver alleen betekenis als mentale operatie binnen het verticaal mathematiseren, d.w.z. uitsluitend de *globale* betekenis ervan werd belicht. Unificeren kan echter ook van lokale betekenis zijn (generaliseren trouwens ook, evenals abstraheren zoals we gezien hebben).
Laat ik maar weer een voorbeeld beschouwen uit één van de gebieden, die me het meest vertrouwd zijn.
We nemen nu een 'kleine' verdeelsituatie, bijvoorbeeld '4 kinderen verdelen 3 pizza's'. Wie kinderen van 9 à 10 jaar een eerlijke verdeling laat bedenken en maken, niet gericht op precieze techniek – dat leidt maar af en verstoort het leerproces – maar om verdeling en resultaat te laten organiseren met wiskundige middelen, mag uiteenlopende oplossingen verwachten; bijv.:

ieder krijgt $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.
ieder krijgt $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, $3 \times \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$.
ieder krijgt $1 - \frac{1}{4}(3 \times \frac{1}{4})$.



Na een lezing in Klagenfurt met dergelijke voorbeelden, reageerde iemand ontsteld met: u kunt toch niet ieder kind zijn eigen wiskunde laten uitvinden. Zoiets kan toch niet geaccepteerd worden!
In mijn reactie toen moest de verwijzing naar de gedurige interactie tussen de leerlingen onderling in het leerproces – en met de leerkracht – de vragensteller geruststellen. Deze omstandigheden in het onderwijsleerproces staan er immers borg voor, dat de persoonlijke wiskundes van de kinderen niet al te ver uiteen zullen gaan lopen. Nú zou ik er nog aan toevoegen, dat dergelijke open vragen die zulk een uiteenlopende produktie uitlokken, broodnodig zijn

om ook het unificeren *lókaal* te leren voltrekken. Het ligt immers voor de hand de uiteenlopende uitkomsten van de verdeelact alle op 'ieder krijgt $\frac{3}{4}$ pizza's' te stellen.

Zo ongemerkt en bij herhaling heb ik het algemeen beschouwen van het mathematiseren ingeruild voor het observeren van leerprocessen. Men kan het laatste voorbeeld echter ook nog als gedacht experiment beschouwen als onderdeel van een verrichte didactische fenomenologie van de breuken en met het oog op de instap in het mathematiseringsproces in dit gebied. Het observeren van leerprocessen, echter, brengt ons bij onderzoek van wiskunde-onderwijs.

Onderzoek, Leerprocessen

Wie leerprocessen wil observeren zal erbij moeten zijn wanneer ze zich voltrekken. Onderzoek naar leerprocessen, dat doe je dus *in* het onderwijs, in realistisch wiskunde-onderwijs. Als vingeroefening en voorbeeld een individueel leerproces.
Bij verschillende gelegenheden had Coen, destijds omstreeks 7 jaar oud, zijn werkelijkheid verhoudingsgetrouw weergegeven door middel van metende gebaren, om zijn bedoelingen of gevoelens kenbaar te maken. Op zekere dag gebeurde daarna het volgende: Hij (7;3) ontving een ansichtkaart uit New York, Manhattan. Daardoor komt hij met zijn vriendje in gesprek over de Martinitoren in Groningen. Hij kende die toren niet van zien, doch alleen maar van horen zeggen. Hij wilde een uitspraak doen over de hoogte: "1000 meter of 1000 mensen". Hij voelde aan, dat hij op deze manier zijn doel royaal voorbijschoot. Daarom ging hij over op: "Als de Martinitoren nu eens zó hoog is", een hoogte van zo'n $\frac{1}{2}$ meter aanwijzend en vervolgens wierp hij er op heel andere toon tussen: "Ik laat het nu maar even zó klein zien", waarna hij vervolgde met: "....en een mens zo" waarbij hij de afmeting van zijn denkbeeldige mens op luttele centimeters aan de voet van de denkbeeldige Martinitoren gebaarde.

De observatie laat opnieuw de mentale omslag van nabeeld naar voorbeeld zien. De methode van het naar verhouding verkleind weergeven van de werkelijkheid bleef tot dusverre (vermoedelijk) onbereflecteerd, doch is nu bewust geworden en wordt als zodanig toegepast in de onderhavige situatie. Er heeft een niveauverhoging plaatsgevonden. Een buitenkansje noemde Freudenthal dit, zo'n sprong of discontinuïteit in het leerproces te kunnen waarnemen [23]. Wie leerprocessen in deze geest wil stimuleren dient er niet alleen mee vertrouwd te zijn, doch zal het materiaal moeten scheppen en uitlijnen om ze teweeg te brengen. Daarvoor dient o.a. de didactische fenomenologie. Opmerkelijk daarbij is, dat al die kwaliteiten die het proces van verwiskundigen kleuren, op het niveau van het didactiseren terugkeren, als het ware als meta-concepten.
Ik wil dit toelichten aan het begrip blikwisseling of mentale omslag, dat we enkele malen gebruikten en dat Freudenthal als aspect van een mathematische attitude heeft onderscheiden [24].

We hebben laten zien hoe een verdeelsituatie een rijk geschakeerde produktie aan verdelingen met passende beschrijvingen kan uitlokken.
De leraar, leerplanontwikkelaar of ontwikkelingsonderzoeker, die deze instap kiest, zal zich afvragen: Hoe nu verder? Het zou jammer zijn dit materiaal van de kinderen te veronachtzamen. De kunst is nu, en hierin schuilt de didactische blikwisseling, deze kwestie in het verdere leerproces op even natuurlijke als vanzelfsprekende wijze terug te spelen naar de kinderen als de verdeelsituatie de divergente produktie uitlokte en dan ook nog zó, dat niet louter lokale doelen gediend worden, doch dat tevens op doelen wordt vooruitgegrepen, die in het verschiet van de langere termijn liggen.
Men kan bijvoorbeeld de kinderen de voortgebrachte betrekkingen:

$$\text{“}\tfrac{3}{4}\text{”}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{3}{4} &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\\
\tfrac{3}{4} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\\
\tfrac{3}{4} &= 1 - \tfrac{1}{4}\\
\tfrac{3}{4} &= 3 \times \tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

laten registreren. In de eerste plaats wordt op dit symbolische niveau nog eens bevestigd, wat in het materiaal al duidelijk werd, nl. dat in $\frac{1}{2}$ twee kwarten schuilgaan, $\frac{1}{2}$ zal dus in 't vervolg de schuilnaam voor $\frac{2}{4}$ zijn. Bovendien kan men naar het voorstel van de voortgebrachte monografie voor $\frac{3}{4}$ nieuwe 'opstellen' voor breuken laten registreren naar aanleiding van verdelingen of zelf voort te brengen. Dergelijke monografieën kunnen gedurig worden bijgewerkt in het voortgezette leerproces naarmate het aantal voortgebrachte equivalenties, dat is schuilnamen, groeit. Op een dag zal het moment daar zijn de blik te wisselen en het probleem te stellen: Van een monografie (= opstel) viel de titel weg. Er stond $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ in. Wat kan er boven gestaan hebben?

Net als we dit voor de didactische blikwisseling hebben laten zien, geldt iets dergelijks ook voor de andere kwaliteiten van het mathematiseren. Voor het unificeren, zowel lokaal als globaal, lieten we eveneens zien hoe hierop didactiserend zou kunnen worden ingespeeld.

Zonder dat hiervoor nu al te veel bewijskracht is geleverd, zou men kunnen stellen, dat de essenties van de wiskundige activiteit in reële setting als uitgangspunt op het meta-niveau worden tot de essenties van de activiteit van de onderwijzende, van de schepper van leergangen, van de ontwikkelingsonderzoeker. Het is deze in het oog springende eenheid van wiskunde, wiskunde-onderwijs, wiskunde leerproces en ontwikkelingssonderzoek in wiskunde-onderwijs, die de vraag naar haar status en m.n. naar die van de opbrengst van ontwikkelingsonderzoek, rechtvaardigen.

Wetenschap van wiskunde-onderwijs?

We hebben al gezien, dat het bij louter verzamelen van gegevens niet gebleven is. In feite groeide het

werk van het IOWO en later van OW & OC daarboven uit, getuige de wijze, waarop de verzamelde gegevens van meet af aan werden georganiseerd. Dergelijke organisatie kan eveneens worden gekenschetst met kwaliteiten als abstraheren. generaliseren en unificeren, net zoals in de wis- en natuurkunde. Alleen door generalisatie vermag men wetenschappelijke veroveringen te boeken, zo stelde Poincaré in 1900 [25].
Laat ik met de algoritmisering van de natuurlijke getallen als paradigma laten zien, dat de organisatiemiddelen van een probleemveld op lager niveau, object van analyse en reflectie worden op een hoger niveau.

De historische ontwikkelingsgang van de algoritmen voor de bewerkingen met natuurlijke getallen kenschetst zich niet door toenemende complexiteit af te meten aan de toenemende omvang van de getallen – een kenmerk dat voor kort alle algoritmeleergangen in basisschoolmethoden beheerste. Neen, het was veeleer de organisatie van de bewerking – het schema, waarin het rekenen zich voltrok – dat zich globaal wijzigde. De schematisering evolueerde van het gebruik van abacus, via cijfer- of papieren abacus tot het rekenen op schrift volgens zekere standaard- of eindalgoritmen.

Een rationele reconstructie van deze historische ontwikkelingsgang, geïntegreerd in realistische probleemvelden en ingebed in de nodige randvoorwaarde-activiteiten, zoals het onderhouden van basisvaardigheden, resulteerde in een didactiek voor het cijferen – theoretisch omkleed – die zijn superioriteit tegenover de tot voor kort gangbare aanpak reeds duidelijk bewezen heeft [26]. Inderdaad 'gangbaar' met restricties, want het wiskunde-onderwijs in Nederland is in beweging. Leerboeken van realistische snit winnen terrein en de helft van de basisschoolkinderen leert nu al cijferen volgens het principe van de voortschrijdende schematisering. Inmiddels is gebleken, dat dit principe, zij het op andere schema's, zoals de tafelschikkingsboom, die we hebben laten zien, toegepast, ook bij het mathematiseren van bewerkingen met verhoudingen en breuken toepassing vindt.
Men zou naar analogie van de historie van wis- en natuurkunde nu in leertheoretisch opzicht kunnen stellen, dat de grenzen tussen de klassieke gebieden van het cijferen en de breuken vervagen, omdat bij het nemen van de nodige distantie gemeenschappelijke organisatieprincipes kenbaar worden. waar het op de algoritmiseringsprocessen aankomt.

Wat is nu de stand van zaken van dit moment? Er heeft ontwikkeling, onderzoek en theorievorming plaatsgevonden met betrekking tot:
- de kwestie van de doelformulering voor het elementaire wiskunde-onderwijs;
- de onderwijzersopleiding;
- innovatiestrategieën;
- het aanvankelijk wiskunde-onderwijs, het cijferen, de verhoudingen, de breuken;
- het gebruik van rekenmachines en computers [27];
- meetkunde in het voortgezet onderwijs.

Speciaal wil ik noemen het HEWET-project en het onderzoek daarin naar nieuwe evaluatievormen. Vooral het uitlijnen van leerprocessen over langere termijn staat bij het voorgaande in het brandpunt van de belangstelling.

Bepaal S^{365} en met behulp daarvan T^{365}.

$$S^{365} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 365 & 1 & 0 & 0 \\ 66795 & 365 & 1 & 0 \\ 8171255 & 66795 & 365 & 1 \end{pmatrix}$$

$S^{365} \otimes T = T^{365}$

en $T^{365} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ = De hoeveelheden die de sperwer in een jaar gegeten heeft.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 365 & 1 & 0 & 0 \\ 66795 & 365 & 1 & 0 \\ 8171255 & 66795 & 365 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 182,5 & 1 & 0 & 0 \\ 667950 & 7300 & 1 & 0 \\ 40856275 & 667950 & 182,5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 182,5 \\ 667950 \\ 40856275 \end{pmatrix}$$

Hoeveel blad zou er na één jaar gegeten zijn om één sperwer in leven te houden?

De hoeveelheid blad = 40856275 gram!

Dat is 40856,275 kilo !!

Dit is natuurlijk een ontzettend irreële situatie want het zou betekenen dat de laatste ($\frac{1}{2}$) mus 365 dagen rupsen (en dus blad) heeft gegeten en dat al dit blad nog in dat arme musje aanwezig is, dus $365 \times \frac{1}{2}$ gram = 182,5 gram in dat laatste musje... en dat kan natuurlijk niet! (want het is plantaardig voedsel en dat verteerd ook nog!). Maar evengoed was dit een leuke opdracht, en dat wat ik in het begin dacht blijkt dus totaal niet waar. (Mag 't ietsje meer zijn?)

Uit: Leerlingentoets.

Men kan zich afvragen of Freudenthal het altijd bij het rechte eind gehad heeft. Zat hij er nooit eens naast? Heeft hij nimmer misgekleund? In zekere zin: Ja! Freudenthal ontkende steeds theorie en theorievorming voor het wiskunde-onderwijs. Die ontkenning is gelogenstraft. Zijns ondanks en dankzij hem! Er is weliswaar een heel andere theorie voortgebracht dan de onderwijstheorieën die hij bevocht. Want: *Wiskunde als activiteit* is zo'n theorie.

In 1978 publiceerde Freudenthal zijn inleiding tot een wetenschap van wiskunde-onderwijs [24]. Daarvoor en daarna omkleedde, inspireerde en stimuleerde, leidde en begeleidde en participeerde hij in het werk van het IOWO en van OW & OC, niet alleen in direct contact, maar vooral ook met een vloed van publikaties, waarvan enkele in het voorafgaande oppervlakkig zijn beroerd. Publikaties over didactische fenomenologie, over mathematiseren, over de ontwikkeling van

reflectief denken, over wat een wiskundige attitude is, over reflectie als intermediair tussen construeren en bewijzen, over leerprocessen, over toetsen, over onderzoek in onderwijs, over..., over..., over....
Het is geen waagstuk meer te durven stellen – en ik doe dit – dat binnen enkele jaren, zeg 10 jaar nadat Freudenthal zijn voorrede tot een wetenschap van wiskunde-onderwijs publiceerde, de draagtijd voorbij is om een volwaardige, samenhangende wetenschap van wiskunde-onderwijs het licht te doen zien, geïnspireerd op wiskunde als menselijke activiteit vanuit reële bron. Zoiets vraagt om een eigen leerstoel.
De realiteit waarin iets dergelijks, zij het met de nodige tegenslagen, kon gedijen, was er één van *in, met, door* en *voor* het onderwijs èn...met elkaar, ieder met zijn of haar leerproces op eigen niveau, met Freudenthal als leermeester, als voorbeeld, maar ook als nabeeld, want hij leerde zelf ook, naar hij steeds liet merken, een enkele keer ook van ons. Dat waren de buitenkansjes, waar je zelfs letterlijk van opsprong in je leerproces.
Vandaar, dat deze bijdrage ook 'Leerproces' had kunnen heten. En is niet Wetenschap de vrucht van leerprocessen, historisch en individueel?

Literatuur

[1] Poll, K.L.,*Het volwassen verleden*, NRC Handelsblad d.d. 1-7-'85, p. 8. Inleiding gehouden voor het congres op 29-6-'85 van De Vereniging voor Onderwijs, Kunst en Wetenschap met als thema "Geschiedenis: een hoofdvak."

[2] Umberto Eco, *De naam van de roos*, Uitgeverij Bert Bakker, Amsterdam, 1985, p. 227.

[3] Lakatos, J., *Proofs and refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge, England, 1977.

[4] Freudenthal, H., *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren* (Deel I) OW & OC, Utrecht, 1984.

[5] Thom, R., *Modern Mathematics: Does it exist?*, in A.G. Howson (ed), Development in Mathematical Education, Cambridge, 1973, 194-209.

[6] Whitney, H., *Taking Responsibility in School Mathematics Education*, in L. Streefland (ed) Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol II. Plenary Adresses and Invited Paper, Utrecht, 1985, 123-141.

[7] Brink, F.J. v.d. en L. Streefland, *Kroniek*. Het PME (Psychology of Mathematics Education) Congres Antwerpen 1982, in Pedagogische Studiën 1983 (60), 369-373.

[8] Treffers, A. en F. Goffree, *Rational Analysis of Realistic Mathematics Education*, in L. Streefland (ed), 1985, 97-123 (zie bij (7)).

[9] Brink, F.J. v.d., *Het jonge kind*. 10 (4), 1982, p. 109-112.

[10] Jong, R. de (ed), *Oppervlakte (2)*, IOWO-leerplanpublikatie 9, Utrecht, 1978, handleiding 22-43.

[11] Streefland, L., *Search for the roots of ratio. Some thoughts on the long term learning process (Towards... a theory)*.
Part I. *Reflections on a teaching experiment*. Educational Studies in Mathematics, *15*, 1984, *327-348*.
Part II. *The outline of the long term learning process*, Educational Studies in Mathematics, *16*, 1985, *75-94*.

[12] Wiskobasteam, *Overzicht van Wiskunde Onderwijs op de basisschool,* Leerplandeel 2, IOWO, Utrecht, 1975, 251-255.

[13] Als [12], 313-318.

[14] Schoemaker, G., *Zie je wel*, IOWO, Utrecht, 1980.
Goddijn, A., *Schaduw en diepte*, IOWO, Utrecht, 1980.

[15] Lange, J. de., *Vlieg er eens in*, Goniometrie en Vectoren, IOWO, Utrecht, 1980.

[16] Kindt, M. en J. de Lange Jzn, *Differentiëren 1 en 2*, Educaboek, Culemborg, 1984, 1985.

[17] Lange, J. de, *Matrices*, Educaboek, Culemborg, 1984.

[18] Treffers, A., *Wiskobas Doelgericht,* IOWO, Utrecht, 1978.

[19] Streefland, L., *Vorgreifendes Lernen zum Steuern langfristiger Lernprozesse.* Verschijnt in Proceedings van 4. Kärtner Symposium für Didaktik der Mathematik, 1985.

[20] Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task,* Dordrecht, 1973.

[21] Freudenthal, H., *What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education*, in A.G. Howson (ed), Developments in Mathematical Education, Cambridge, 1973, 101-114.

[22] Nienhuis, G., *De Eenheid van de Natuurkunde.* Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van bijzonder hoogleraar vanwege het Natuurkundig Gezelschap in Actuele Onderwerpen van de Natuurkunde aan de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Rijksuniversiteit te Utrecht op 10 juni 1985, RU, Utrecht, p. 10.

[23] Freudenthal, H., *Onderzoek in Onderwijs,* Pedomorfose XLV, 1980, 57-66.

[24] Freudenthal, H., *Weeding and Sowing*, Dordrecht, 1978.

[25] Zie [20], p. 147.

[26] Dekker, A., H. ter Heege en A. Treffers, *Cijferend Vermenigvuldigen en Delen volgens Wiskobas,* OW & OC, Utrecht, 1982.

[27] BINF-Team, *De baas over de computer*, OW & OC, 1985, (2e versie).