Een spin gooit met een dobbelsteen

W.H. Doekes
S.g. Oscar Romero, Hoorn

Samenvatting

In dit artikel wordt een project van enkele lessen beschreven dat is uitgevoerd in een wiskunde II groep van het vijfde leerjaar Atheneum/Gymnasium.
Onderwerp van het project is een spin die wandelt langs de ribben van een kubus, daarbij steeds met een dobbelsteen gooiend, om vast te stellen welke richting hij (zij?) in zal slaan.
De wiskundige onderwerpen die hierbij aan bod komen zijn: grafen, verbindingsmatrices, kansdiagram, meetkundige rij, verwachtingswaarde. Daarnaast worden enkele computerprogramma's gebruikt.

Summary

This article describes a project of several lessons which have been tried out in a Math-II-group of the 5th form of the Atheneum/Gymnasium-stream. The project is about a spider walking along the edges of a cube, casting a die all the time to determine which direction it is to follow next. Use of transition, as well as of computer programs.

Het idee voor het project, dat hierna besproken wordt en dat ik zelf "spin en vlieg" heb gedoopt, is afkomstig uit het boek (V)aardig Programmeren van M.M. Stefanski (Wolters-Noordhoff, 1982, pag. 144-146).
Behalve dat dit een aardig onderwerp is voor een simulatie, zoals in dit boek wordt bedoeld, blijkt het ook aanknopingspunten te bieden met verschillende delen van de wiskunde en met name uit het nieuwe wiskunde A-programma.
Omdat dat nieuwe wiskunde A-programma mij sterk aanspreekt èn omdat ik het niet alleen leuk, maar ook belangrijk vind om de leerlingen te laten zien dat wiskunde méér omvat dan in het leerboek staat, ben ik de zaak op papier gaan zetten.

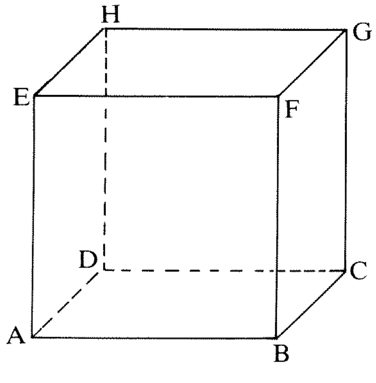
De leerlingen die ik met dit project heb geconfronteerd, vormden de laatste wiskunde II groep in de vijfde klas Atheneum en Gymnasium op het Marnix College te Ede. De groep bestond uit 2 meisjes en 25 jongens, waarvan 80 à 85% steeds voldoende resultaten voor dit vak behaalde.
Het was mogelijk om de laatste drie weken van het schooljaar te vullen met herhalingen vectormeetkunde, afgewisseld met dit project. De tekst die de leerlingen kregen bestond uit 5 pagina's A4 met toelichting, waartussen 29 vragen waren opgenomen en een zesde pagina met enkele Basic-programma's.

Probleemstelling

Het probleem werd de leerlingen als volgt aangeboden:

Inleiding

Spinnen eten, zoals bekend mag worden verondersteld, vliegen. In dit verhaal bevindt zich een spin in het hoekpunt van de kubus, aangeduid met A, terwijl een vlieg zich in punt G ophoudt.



De vlieg is erg sloom en blijft zitten zelfs wanneer de dood dreigt. De spin gaat proberen de vlieg te bereiken *door langs de ribben van de kubus te lopen (spinnen vliegen immers niet), met een snelheid van 1 ribbe per minuut.*

Nu heeft onze spin een slecht oriëntatievermogen en daarom gooit zij (hij?) in ieder hoekpunt een dobbelsteen, om vast te stellen in welke richting de reis verder zal gaan (dat kan ook langs-dezelfde-ribbe-weer-terug zijn).

In dit project zal dit verhaal wiskundig worden behandeld en zullen wiskundige methoden worden toegepast om de volgende vragen te beantwoorden:
- *In hoeveel minuten kan het doel bereikt worden?*
- *Wat is de kans op een reisduur van een bepaald aantal minuten?*
- *Wat is de gemiddelde reisduur?*

Voor bepaalde onderdelen van het project zal een computer worden toegepast.

Aanpak via graaf en verbindingsmatrix

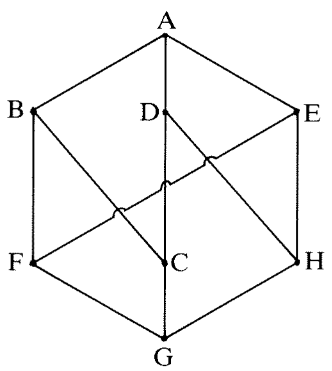
Aan de hand van een voorbeeld werden de begrippen graaf en verbindingsmatrix besproken. Ook werd het vermenigvuldigen van matrices behandeld (daar hebben ze bij wiskunde II ook wat aan!!), zodat het mogelijk was de machten van de verbindingsmatrices te berekenen. Als extra onderdeel kwam bij de grafen nog het klassieke 'Koenigsberger bruggenprobleem' aan de orde dat is opgelost door Euler (zie bijvoorbeeld de Scientific American – bundel: Mathematics, 1978, nr. 22, met een Engelse vertaling van Euler's eigen tekst).

Een graaf van de kubus

Het geleerde werd vervolgens op de kubus toegepast, dat ging zo:

Graaf en matrix van de kubus

Hieronder staat een graaf van de kubus. Omdat de kubus een drie-dimensionale figuur is, zullen bepaalde wegen elkaar in werkelijkheid kruisen. *Je ziet, hoe dit in de tekening aangegeven is.*



De vraag, die we zullen gaan beantwoorden, is: hoeveel k-etappe wegen bestaan er van A naar G? (k = 1, 2, 3, 4, ...)
Uit het voorafgaande blijkt dat we hiervoor de machten van de verbindingsmatrix kunnen gebruiken.

Hierna werd de verbindingsmatrix V opgesteld en d.m.v. een eenvoudig Basic-programma werden op de beschikbare Commodore-64 een reeks machten van V bepaald. Het was inmiddels duidelijk, naar welk getal in die machten gekeken moest worden om het aantal n-minuten-wegen van A naar G af te lezen.
Het leverde de volgende tabel op van het aantal n-minuten-wegen van A naar G:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
aantal wegen	0	0	6	0	60	0	546	0	4920	0	44286

Nu deed zich het probleem voor dat het aantal van 60 (5-minuten-wegen) bij gewoon natellen niet bleek te kloppen. De wegen van A naar G *via G* waren ook meegeteld!
Dit kon met behulp van getallen uit de berekende matrices gecorrigeerd worden:

Totaal aantal 5-minuten-wegen van A naar G = 60

aantal 3-minuten-wegen van A naar G maal
aantal 2-minuten-wegen van G naar G
$= 6 \times 3 = \qquad = 18$ –

42

Totaal aantal 7-minuten-wegen van A naar G = 546

aantal 5-minuten-wegen van A naar G maal
aantal 2-minuten-wegen van G naar G
$= 42 \times 3 = 126$

aantal 3-minuten-wegen van A naar G maal
aantal 4-minuten-wegen van G naar G
$= 6 \times 21 = 126$

252 –

294

En voor de 9-minuten-wegen luidt de berekening:
$4920 - 294 \times 3 - 42 \times 21 - 6 \times 183 = 2058$

Dit levert als gecorrigeerde tabel:

n	3	5	7	9	....
aantal wegen	6	42	294	2058	....

(Ja, inderdaad, steeds 7 × zoveel, zou het een meetkundige rij zijn?)

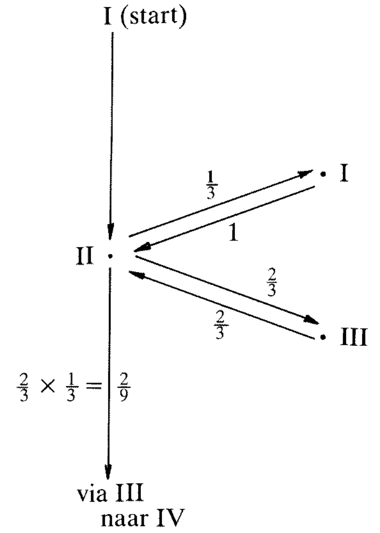
Al eerder was beredeneerd, dat de kans op een bepaalde route van n minuten gelijk moest zijn aan $(\frac{1}{3})^n$, zodat nu het probleem van de kansen opgelost was.

Aanpak via een kansdiagram

Een bevestiging van het voorafgaande werd gevonden door te werken met een kansdiagram.

Omdat de punten B, D en E en evenzo de punten C, F en H in gelijkwaardige posities liggen t.o.v. A en G voer ik vier niveau's in:

niveau I : punt A
niveau II : punten B, D en E
niveau III : punten C, F en H
niveau IV : punt G.
Nu kan het volgende kansdiagram worden gemaakt:



(De leerlingen moesten de kansen bij deze wegen zelf invullen).
De kans op de kortste weg (3 min.) is duidelijk: P(3 min.) $= 1 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{9}$.
Iedere verlenging van de reisduur betekent een "ommetje" van 2 minuten II $\rightarrow$ I $\rightarrow$ II of II $\rightarrow$ III $\rightarrow$ II.
De kansen op deze "ommetjes" zijn resp. $\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ dus tezamen $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$.

Hierdoor is nu gevonden:
P (reistijd is 2k + 3 minuten) $= \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^k$

Bewezen kon worden, dat de som van een toenemend aantal termen van deze rij tot 1 nadert, zoals dat hoort. Hierbij was enige uitleg over meetkundige rijen noodzakelijk.

Verwachtingswaarde

Dit, voor de leerlingen onbekende, begrip werd geïntroduceerd d.m.v. een voorbeeld:

Verwachtingswaarde

Het laatste probleem wat we proberen op te lossen is: Hoeveel minuten zal de spin, als dit experiment héél vaak wordt herhaald, gemiddeld over z'n (haar?) tocht doen?
Wiskundigen zeggen hiervoor: wat is de verwachtingwaarde *van de reisduur?*

Voorbeeld:
Bij een loterij met 100 loten zijn er vijf prijzen van f 10,–; 3 prijzen van f 20,–; één prijs van f 30,– en één prijs van f 50,–.
Wat is de verwachte opbrengst als je één lot koopt?

Dit wordt als volgt berekend:
$0{,}05 \times 10 + 0{,}03 \times 20 + 0{,}01 \times 30 + 0{,}01 \times 50 =$
$0{,}5 + 0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}5 = 1{,}9$

Dit resultaat betekent dat je, als de loterij elke week wordt gehouden en je iedere week één lot koopt, op de lange duur gemiddeld f 1,90 per week zult winnen.

Vraag:

29. Hoeveel zal de organisator van deze loterij voor één lot vragen?

Toegepast op het spin-en-vlieg probleem gaf dit:

$$\text{Verw. waarde} = (2k+3) \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^k$$

Omdat, bij mijn weten, de uitkomst van deze som slechts via reeksontwikkelingen te bepalen is, heb ik in de klas volstaan met een benadering d.m.v. een eenvoudig Basic-programma, waarvan aan het eind van dit artikel de TRS-80 versie is afgedrukt.

Als afsluiting van het geheel werd er nog een programma gedemonstreerd, namelijk een simulatie van de wandelingen over de kubus met vaststelling van de gemiddelde tijdsduur (ook hiervan de TRS-80 versie aan het eind van dit artikel).

Na verwerking geeft dit programma als uitvoer:

SIMULATIE WANDELINGEN OVER DE KUBUS
AANTAL WANDELINGEN: 100
GEM. TIJDSDUUR : 10.24

SIMULATIE WANDELINGEN OVER DE KUBUS
AANTAL WANDELINGEN: 1000
GEM. TIJDSDUUR : 9.914

Een analytische bepaling van de verwachtingswaarde is op de volgende wijze mogelijk (dit valt zeker buiten het bereik van de gemiddelde VWO-5 leerling):

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+3) \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^k =$$

$$\frac{4}{9} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^k + \frac{6}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^k$$

De eerste som is hier het probleem, de tweede is gelijk aan $1 \cdot \frac{1}{1-\frac{7}{9}} = \frac{9}{2}$

Voor $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^k$ is de volgende aanpak bruikbaar:
Eén of ander analyseboek levert:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots..$$

dus:

$$\ln \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots..$$

differentieer tweemaal:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots..$$

vermenigvuldig met x:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots\ldots$$

dus:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{7}{9}\right)^k = 0 + \frac{7}{9} + 2\left(\frac{7}{9}\right)^2 + 3\left(\frac{7}{9}\right)^3 + \ldots$$

$$= \frac{\frac{7}{9}}{(1-\frac{7}{9})^2} = 15\tfrac{3}{4}$$

waarmee de verwachtingswaarde gevonden wordt:

$$\frac{4}{9} \cdot 15\frac{3}{4} + \frac{6}{9} \cdot \frac{9}{2} = 7 + 3 = 10$$

Anders, niet aan gewend, wel leuker

Nadat de laatste weken afwisselend aan herhaling vectormeetkunde en aan dit project waren besteed, heb ik een toets gehouden met vragen over beide onderwerpen. Daarbij heb ik de leerlingen ook gevraagd enig commentaar te geven op vorm, inhoud en moeilijkheidsgraad van het project. De algemene indruk was dat de leerlingen er met redelijk plezier aan hadden gewerkt en het niet bijzonder moeilijk hadden gevonden. De aanpak vanuit een gegeven probleem i.p.v. eerst theorie- dan vraagstukken werd gewaardeerd, al zal het 'nieuwe' ervan zeker een rol hebben gespeeld bij de positieve waardering.

Jan Hendrik: De lessen 'spin en vlieg' vond ik voor de afwisseling wel leuk, vooral omdat het eens wat anders is dan 'droge' sommen. Je kunt je hier iets bij voorstellen. Ik vond het niet moeilijk.
Jos: Moeilijk. Anders, niet aan gewend, wel leuker. Gek, dat je op deze manier andere dingen er in kunt betrekken.
Allard Jan: Niet erg moeilijk, maar je moet niet te snel willen gaan, want dan maak je gauw fouten. Aanpak vanuit een probleem is wel leuk, als het probleem aanspreekt, want het is leuk om te kijken of er uiteindelijk uitkomt, wat je van te voren had verwacht.
Corinne: Ik vond het vrij moeilijk. De aanpak vanuit een probleem vond ik wel prettig, dan zie je het gelijk in de praktijk. Omdat ik de theorie nogal moeilijk vond.
Erwin: In het begin was het nieuw en interessant, maar een paar lessen daarop begon het wel saai te worden.
Makkelijk. prettig, begrijp het beter.
Met het geheel had ik niet veel moeite maar de sommen waren wel langdradig en als je de aanpak of een klein foutje in het begin maakt is de rest van de som ook niet te maken.
Wilko: Ik vond het onderwerp niet moeilijk. Aanpak via een probleem vind ik prettiger, omdat je dan vanaf het begin ziet waar je naar toe werkt.

Slotopmerkingen

Een project als hierboven beschreven, heeft zeker voordelen bij de introductie van bepaalde leerstofonderdelen. Doordat de theorie besproken werd op momenten waarop deze nodig was, maakte deze aanpak op leerlingen een overtuigender indruk. Daar staat tegenover dat het niet altijd eenvoudig zal zijn geschikte onderwerpen te vinden, dat e.e.a. wellicht méér tijd kost dan de gebruikelijke aanpak en dat er zeer veel tijd en energie nodig is om zo'n project goed voor te bereiden, op papier te zetten, enzovoort.
Toch is het mij zo goed bevallen dat ik, wanneer ik een geschikt onderwerp vind, zeker opnieuw zal proberen iets dergelijks te maken.

```
10 REM BENADERING SOMREEKS T.B.V. SPIN-VLIEG PROBLEEM ***
20 CLS: INPUT "BIJ WELKE WAARDE VAN DE TERMEN STOPPEN"; D
25 LPRINT: LPRINT "D= ";D
30 K=0 : A=3 : B=2/9 : S=0
40 T=A*B : IF T>D THEN LET K=K+1: A=A+2: B=B*7/9: S=S+T: GOTO 40
50 LPRINT: LPRINT "SOMREEKS VAN (2K+3) * 2/9 * (7/9) EXP K :"
60 LPRINT: LPRINT K+1; "TERMEN"
70 LPRINT: LPRINT "BENADERING ";S
```

```
100 REM SIMULATIE SPIN EN VLIEG ***********************
110 CLS: INPUT "HOEVEEL KEER LATEN LOPEN";N
130 DIM A(7,3)
140 FOR I=1 TO 7: FOR J=1 TO 3
150 READ A(I,J): NEXT J: NEXT I
160 DATA 2,4,6,1,3,7,2,4,8,1,3,5,4,6,8,1,5,7,2,6,8
170 TT=0
200 FOR I=1 TO N
210 P=1:T=1
220 Q=RND(3): P=A(P,Q): IF P<8 THEN LET T=T+1: GOTO 220
230 TT=TT+T: NEXT I
330 REM RESULTATEN **********************************
310 LPRINT "SIMULATIE WANDELINGEN OVER DE KUBUS"
320 LPRINT: LPRINT "AANTAL WANDELINGEN : ";N
330 LPRINT: LPRINT "GEM.TIJDSDUUR           : ";TT/N
```