Een matrix in de economie

L. Klaren/J. Onderstal
G.S.G. Emmen

Samenvatting

In deze 'alternatieve toets' is getracht de leerling met de zogenaamde Leontjev-matrix te laten werken. Deze matrix en de bijbehorende input-output tabel worden systematisch geïntroduceerd aan de hand van een gemengd agrarisch bedrijf. De wederzijdse beïnvloeding en afhankelijkheid van de landbouw- en de veeteeltsector vormen een zeer aanschouwelijk voorbeeld. Bovendien komen in de voorbeelden en de opgaven nog grafen, lineaire programmering en het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen aan de orde.

Summary

In this alternative test students are familiarised with the Leontjev-matrix. This matrix and the accompanying input-output schedule are introduced systematically on the basis of a husbandry problem.
The mutual influence and dependence of the agricultural and cattle-breeding sectors provide a very lucid example.
The examples and problems lead to linear programming and solving systems of linear equations.

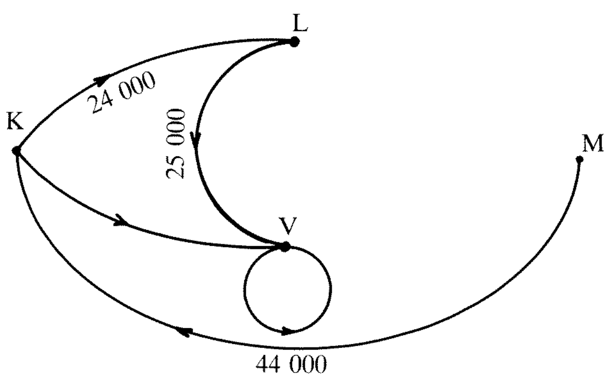
Boer Tange heeft een 'gemengd bedrijf'. Dat wil zeggen: hij doet aan landbouw, maar hij houdt ook vee. Daarbij verbouwt hij onder meer voederbieten voor zijn vee, terwijl de door het vee geproduceerde mest weer voor zijn landbouwgronden onmisbaar is.
Vroeger waren in Nederland zo goed als alle boerderijen op de zand- en dalgronden zulke gemengde bedrijven. Alleen op de zware klei was men op landbouw gespecialiseerd en op de grote weidevlakten in de Friese en Hollandse venen kwam praktisch alleen veeteelt voor.

Onze Boer Tange werkt al jaren volgens het volgende schema:

Zijn landbouw kost hem per jaar *f* 30.000.
Daarvan komt voor *f* 6000 aan mest uit zijn veestallen. De overige *f* 24.000 betaalt hij aan zaai- en pootgoed, aan het loonbedrijf voor ploegen en dorsen, aan een hulpkracht bij drukke werkzaamheden, etc.
Zijn veeteelt kost hem per jaar *f* 50.000.
Maar *f* 25.000 daarvan is voor voeder (hooi, bieten) dat hij van zijn eigen landbouwareaal betrekt. En bovendien wordt nog voor *f* 5000 door de veestapel zelf geleverd: melk voor kalveren. De nog resterende *f* 20.000 zijn voor voeder dat hij zelf niet verbouwt (lijnkoeken), voor verzekeringen, etc.
Wat hij van zijn landbouwprodukten niet voor zijn vee nodig heeft, verkoopt hij op de markt; dit brengt hem *f* 5000 op. Ook de veestapel levert een aantal produkten die op de markt worden verkocht en wel voor *f* 39.000.

We brengen dit verhaal in beeld met een graaf: de knooppunten zijn:

de kas K van de boer, dus zijn portemonnaie
de veehouderij V
de landbouwerij L
de markt M.



Opgave 1.
Maak deze graaf af en zet bij elke gerichte verbinding de grootte van de geldstroom die door die verbinding wordt voorgesteld.

Uit de graaf zien we:

Per jaar gaat er *f* 44.000 het bedrijf in (uit de kas) maar er komt ook *f* 44.000 uit (op de markt).
In het oorspronkelijke verhaal echter was sprake van wel *f* 80.000, namelijk *f* 30.000 voor de landbouw en *f* 50.000 voor de veehouderij.

Om nu te zien hoe dat precies werkt maken we de volgende invoer-uitvoer-tabel (op z'n angelsaksisch *input-output-tabel*)

		invoer L	invoer V	M	Totaal
uitvoer	L	–	25.000	5.000	30.000
	V	6.000	5.000	39.000	50.000
	K	24.000	20.000		
Totaal		30.000	50.000		80.000

Uit deze tabel lezen we bijvoorbeeld af:

V levert *f* 6.000 die naar L gaan
V levert *f* 5.000 die naar V gaan
V levert *f* 39.000 die naar M gaan
de totale output van V is dus *f* 50.000.

Het handige van zo'n tabel zie je nu als volgt:
Stel dat door een epidemie de veestapel van boer Tange tot 80% wordt gereduceerd. Zijn V-input wordt dan ook overal *evenredig* gereduceerd.
We nemen even aan dat de veestapel nog wel de voor de landbouw benodigde mest levert. De input-output-tabel komt er dan als volgt uit te zien:

		invoer L	invoer V	M	Totaal
uitvoer	L	–	20.000	....	....
	V	6.000	4.000	....	....
	K	....	16.000		
Totaal		30.000	40.000		....

Opgave 2.
Maak deze input-output-tabel af. Neem daarbij aan dat de totale outputs van L en V gelijk zijn aan hun totale inputs.

We hebben bij opgave 2 aangenomen dat de *f* 6000 aan mest nog door de eigen veestapel geleverd werd. Maar dat is natuurlijk niet echt mogelijk. De nieuwe veestapel kan deze mest maar voor 80% leveren, dus voor *f* 4800.

Opgave 3.
Verbeter de tabel van opgave 2 nu door de f 6000 te vervangen door f 4800.
Denk erom dat nu ook bij de L-input – net zoals zoëven bij de V-input – alle invoerposten evenredig *worden gereduceerd.*

Iedereen die dit leest zal die evenredige reductie maar vreemd en onnodig vinden. Boer Tange kan toch wat hij te kort komt erbij kopen!
In onze 'open'-economie is dat een bijna vanzelfsprekende zaak. Dit wordt echter anders als dit erbij-kopen-wat-je-te-kort-komt niet zonder meer mogelijk is, bijvoorbeeld:
- omdat het er gewoon niet is; de andere boeren hebben hun mest zelf te hard nodig en kunstmest is niet verkrijgbaar (primitieve economieën);
- omdat het van overheidswege niet wordt toegestaan, zoals dit het geval is bij een strak centraal geleide economie.

Het bovenstaande model is dus in onze westerse open economie niet zo vanzelfsprekend, maar in grote delen van de wereld wel degelijk. Om te zien hoe dit model werkt houden we ons wel verder aan deze evenredige verandering in de invoerkolommen.

Opgave 4.
Maak onderstaande input-output-tabel voor onze boer Tange af; neem daarbij aan dat zijn bedrijfsvoering in het algemeen niet is veranderd. De totale outputs van L en V moeten weer gelijk zijn aan de totale inputs.

		input L	input V	M	Totaal
output	L	....	....	....	....
	V	....	....	....	....
	K	....	24.000		
Totaal		25.000	....		

Uit bovenstaand verhaal is nu wel duidelijk dat je de input-output-tabel kunt opstellen zodra je de verhoudingen in de input-kolommen kent. Bij onze boer Tange is dus het belangrijkste gegeven:

		input L	input V
output	L	0	0,5
	V	0,2	0,1
	K	0,8	0,4
Totaal		1	1

Deze getallen heten de *'technische coëfficiënten'* van de bedrijfsvoering van boer Tange.

Opgave 5.
Boer Derij heeft ook een gemengd bedrijf. Zijn landbouw- en veeteeltarealen verhouden zich echter anders dan die van boer Tange. Ook heeft hij ander soort vee, en verbouwt hij andere gewassen.
Kortom, van zijn bedrijf zijn de technische coëfficiënten heel anders.

		input		
		L	V	
output	L	0,1	0,6	
	V	0,3	0,05	
	K	0,6	0,35	
	Totaal	1	1	

Maak nu een input-output-tabel voor boer Derij bij een totale L-input van f 40.000 en een totale V-input van f 60.000.

We zijn er tot nu toe steeds vanuit gegaan dat onze boeren alles, wat ze niet binnen hun eigen bedrijf kunnen gebruiken, op de markt kunnen verkopen. Dat zal in de praktijk een wat optimistische gedachte blijken. We gaan nu na hoe we binnen dit 'technische coëfficiënten-model' de produktie kunnen richten naar de vraag op de markt.
We gaan terug naar boer Tange en houden ons aan de technische coëfficiënten van zijn bedrijf. We vragen ons nu af:
Hoeveel gaat er:

bij een totale L-input x
en een totale V-input y

naar de markt?

We zetten onze x en y 'gewoon' in de input-output-tabel.

		input			
		L	V	M	Totaal
output	L	0	0,5y	....	x
	V	0,2x	0,1y	....	y
	K	0,8x	0,4y		
	Totaal	x	y		

We zien nu onmiddellijk wat we in de kolom M kunnen verwachten:

aan landbouwprodukten gaat naar de markt
voor x − (0.x + 0,5.y)

........(1)

aan veeteeltprodukten gaat naar de markt
voor y − (0,2.x + 0,1.y)

Stel nu dat boer Tange van zijn coöperatie de garantie krijgt dat hij voor *f* 12.500 aan landbouwprodukten en voor *f* 33.500 aan veeteeltprodukten zal kunnen verkopen, hoe grote totale inputs voor L en V moet hij dan nemen?
Het is duidelijk dat we het volgende stelsel vergelijkingen moeten oplossen:

$$\begin{cases} x - (0.x + 0{,}5.y) = 12.500 \\ y - (0{,}2.x + 0{,}1.y = 33.500 \end{cases}$$

Dat wil zeggen:

$$\begin{cases} x - \tfrac{1}{2}y = 12.500 \\ -\tfrac{1}{5}x + \tfrac{9}{10} = 33.500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 25.000 \\ 2x - 9y = -335.000 \\ 8y = 360.000 \end{cases}$$

d.w.z.: y = 45.000
= 35.000

Hij moet dus uitgaan van een totale L-input van *f* 35.000 en een totale V-input van *f* 45.000.

Opgave 6.
Boer Derij krijgt van zijn coöperatie een garantie voor f 30.000 aan landbouw – en voor f 20.000 aan veeteeltprodukten.
Van welke totale L- en V-input moet hij dan uitgaan?

We gaan nu het stelsel (1) wat eenvoudiger schrijven.
We zullen werken met een bedrijfsvector $\binom{L}{V}$ en een marktvector $\binom{l}{v}$.
De bedrijfsvector $\binom{L}{V}$ heeft als elementen de totale L- en V-inputs. De marktvector $\binom{l}{v}$ de marktopbrengsten van de verkochte landbouw-, respectievelijk veeteeltprodukten.
We waren op stelsel (1) gekomen doordat we de vraag gesteld hadden: "Hoe groot moeten de L- en V-inputs zijn om aan een gegeven marktvraag te voldoen?"
Dat betekent, dat de bedrijfsvector $\binom{L}{V}$ moet worden berekend bij een gegeven 'marktvector' $\binom{l}{v}$. De elementen van deze marktvector $\binom{l}{v}$ zijn dus de verkoopopbrengsten van de op de markt aangeboden landbouw- en veeteeltprodukten.
Omdat $\binom{L}{V}$ moet worden berekend noemden we deze vector $\binom{x}{y}$. En aangezien de marktvector $\binom{l}{v}$ gegeven verondersteld wordt, zullen we deze $\binom{p}{q}$ noemen.
We zetten nu deze vectoren in onze input-output-tabel:

		input			
		L	V	M	Totaal
output	L	0.x	0,5.y	p	x
	V	0,2.x	0,1.y	q	y
	K	0,8.x	0,4.y		
	Totaal	x	y		

Lezen we nu de output-regels, dan staat daar:

$$0.x + 0{,}5.y \quad + \quad p \quad = \quad x$$
$$0{,}2.x + 0{,}1.y \quad + \quad q \quad = \quad y$$

en dit is niets anders dan stelsel (1).
Maar dit kan ook als volgt geschreven worden:

$$\begin{pmatrix} 0.x + 0{,}5.y \\ 0{,}2.x + 0{,}1.y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

en hier staat tenslotte niets anders dan:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{.........} \; (2)$$

De elementen van de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ zijn precies de technische coëfficiënten in het vierkant links boven in de input-output-tabel.
We korten nu de bedrijfsvector $\binom{L}{V}$ af als B en de marktvector $\binom{l}{v}$ als C.
(2) laat zich dan lezen als:

$$A \times B + C \; = \; B \qquad \text{..............} \; (2^*)$$

of:

$$A \times B + C \; = \; E \times B$$

(E is de eenheidsmatrix)

of:

$$E \times B - A \times B \; = \; C$$

of:

$$(E - A) \times B \; = \; C \qquad \text{...............} \; (3)$$

Als je goed kijkt zie je dat hier nog steeds niets anders staat dan in de stelsels die we zoëven hebben opgelost.

Voorbeeld:
Boer Derij krijgt van zijn coöperatie een garantie voor *f* 30.000 aan landbouw- en *f* 20.000 aan veeteeltprodukten.
Van welke totale L- en V-input moet hij dan uitgaan?

Oplossing:
De bedrijfsvector B is de onbekende; stel deze dus $\binom{x}{y}$. De marktvector $C = \binom{30\,000}{20\,000}$. De matrix A lezen we af uit boer Derij's tabel van technische coëfficiënten; we vinden:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}05 \end{pmatrix}$$

(zie opgave 5)

We vullen deze gegevens in in (3):

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}05 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30.000 \\ 20.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}6 \\ -0{,}3 & 0{,}95 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30.000 \\ 20.000 \end{pmatrix}$$

d.w.z.:

$$\begin{pmatrix} 0{,}9.x - 0{,}6.y & = & 30.000 \\ -0{,}3.x + 0{,}95.y & = & 20.000 \end{pmatrix}$$

Oplossing van het stelsel:

$$0{,}9.x - 0{,}6.y = 30.000$$
$$0{,}3.x - 0{,}95.y = -20.000$$

geeft: $x = 60.000 \wedge y = 40.000$. Dat wil dus zeggen dat Derij moet uitgaan van een L-input van *f* 60.000 en een V-input van *f* 40.000.
Overigens is dit voorbeeld niets anders dan een uitwerking van opgave 6.

Opgave 7.
Boer Kool heeft een gemengd bedrijf. De technische coëfficiënten van dit bedrijf staan in de input-output tabel.

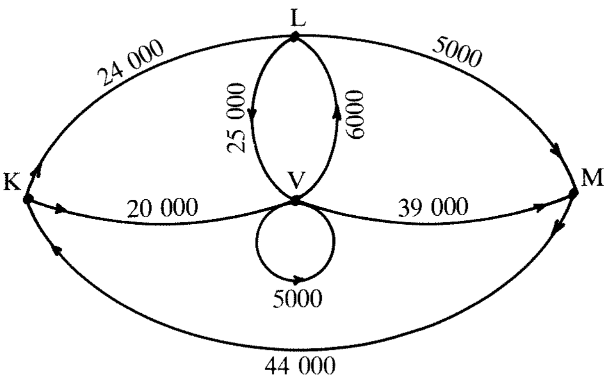
		input	
		L	V
output	L	0,15	0,55
	V	0,25	0,05
	K	0,6	0,4
	Totaal	1	1

Hij weet dat hij op de markt voor f 58.000 aan landbouwprodukten en voor f 46.000 aan veeteeltprodukten zal kunnen verkopen.

Hoe groot moeten zijn landbouw- en veeteeltinput zijn om dit met zijn bedrijf te realiseren?
Maak een volledige input-output-tabel en illustreer de gang van zaken met een graaf die als knooppunten L(=landbouw), V(=veeteelt), K(=kas) en M(=markt) heeft.

Wie goed heeft opgelet is het opgevallen dat de totale inputs en de totale outputs van L en V steeds gelijk zijn.
Dat is bij dit model noodzakelijk omdat er precies één bedrijfsvector $B = \binom{L}{V}$ is.
In de vergelijking (2*) $A \times B + C = B$ is de eerste B de input-bedrijfsvector, maar de tweede B de output-bedrijfsvector.
Als we (2*) als (3) willen schrijven is dit alleen mogelijk indien de beide B's identiek zijn.

Toch geeft dit aan ons model iets vreemds. We bekijken nog eens de graaf van het bedrijf van boer Tange zoals dit op p. 1 werd beschreven.



We merkten toen al op: er stroomt uit boer Tange's portemonnaie jaarlijks *f* 44.000 het bedrijf in en van de markt komt er dan weer precies *f* 44.000 zijn beurs binnenrollen.
Waar leeft die man van?
Van zijn bedrijf. Hij verbouwt zijn eigen aardappelen en hij mest zijn eigen kalf.
Toch blijven er uitgaven die in dit verhaal niet inpasbaar zijn: voor kleding van de kinderen, vakantie, hobbies, en dergelijke.
Waaruit worden die betaald?
Uit de winst!

Maar in ons model is daarvoor geen plaats. Stel je voor dat we de input-output-tabel als volgt hebben:

		input L	input V	M	Totaal
output	L	–	25.000	5.000	30.000
	V	6.000	5.000	39.000	50.000
	K	15.000	15.000		
	Totaal	21.000	45.000		

De totale input is *f* 66.000, de totale output is *f* 80.000. Er is dus een jaarlijkse winst van *f* 14.000.

Dit zou natuurlijk meer in overeenstemming zijn met de realiteit. Een bedrijf dat geen winst maakt heeft geen reden van bestaan.
Maar onze mooie vergelijking (3)

$$(E - A) \times B = C$$

gaat nu niet meer op. Want de bedrijfsvector B heeft aan de input-zijde andere elementen dan aan de output-kant.
Er is echter een truc om ook van een bedrijf dat wel winst maakt een input-output-tabel op te stellen en wel zó dat de voordelen van vergelijking (3) volledig behouden blijven.
We splitsen de kas K in twee regels:

de regel: echte kosten (KO)
de regel: winst (WI)

Door deze maatregel kunnen we de voordelen van de 'echtere' input-output-tabel van deze bladzijde (zie boven) verkrijgen en daarnaast toch het grote voordeel van onze oude manier van opstellen, namelijk de mogelijkheid van vergelijking (3) behouden.

		input L	input V	M	Totaal
output	L	–	25.000	5.000	30.000
	V	6.000	5.000	39.000	50.000
K	KO	15.000	15.000		
	WI	9.000	5.000		
	Totaal	30.000	50.000		80.000

Het vreemde aan deze truc is natuurlijk dat de winst wordt 'geboekt' aan de invoer-kant. Het lijkt nu of de winst niet iets is dat uit het bedrijf komt maar iets dat er juist in gaat. Maar daarvan moet je niet wakker liggen. Het winstbedrag wordt alleen geboekt om de kas kloppend te krijgen. En het wordt dus – zoals elk saldo – geboekt waar het ons het beste past.
Aangezien natuurlijk de werkelijke kosten onderhevig zijn aan de evenredige verandering, geldt dit ook voor de winstbedragen.

Op grond van bovenstaande input-output-tabel moeten we dus de tabel van technische coëfficiënten:

		input L	input V
output	L	0	0,5
	V	0,2	0,1
	K	0,8	0,4
	Totaal	1	1

veranderen in:

		input L	input V
output	L	0	0,5
	V	0,2	0,1
K	KO	0,5	0,3
	WI	0,3	0,1
	Totaal	1	1

Opgave 8.
Boer Tange verkoopt al zijn landbouw- en veeteeltprodukten die voor de markt bestemd waren. Voor de landbouwprodukten ontvangt hij f 12.500, voor de veeteeltprodukten f 41.500. Hoe groot is zijn winst?

Het zal duidelijk zijn dat negatieve getallen in een input-output-tabel niet mogen voorkomen. Negatieve landbouwoverschotten voor de markt? Wat moet je daarmee? We stellen dus als eis:

Zorg dat de bedrijfsvector B = $\binom{L}{V}$ zó uitvalt, dat de marktvector C = $\binom{l}{v}$ geen negatieve elementen bevat.

Nu geldt: C = (E − A) × B
Welke zijn nu de grenzen waartussen de waarden van L en V moeten liggen om te waarborgen dat C geen negatieve termen krijgt? We nemen als uitgangspunt weer het bedrijf van boer Tange. De bedrijfsvector $\binom{L}{V}$ schrijven als $\binom{x}{y}$. Uitgaande van deze vector berekenen we nu de marktvector C = $\binom{l}{v}$.

$$C = (E - A) \times B$$

$$\begin{pmatrix} l \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

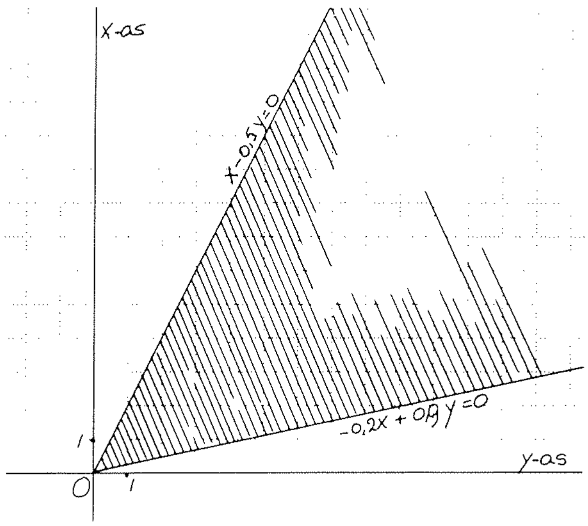
dus:

$$l = x - 0{,}5.y$$
$$v = -0{,}2.x + 0{,}9.y$$

De hierboven geformuleerde voorwaarde komt er dus op neer dat moet gelden:

$$x - 0{,}5.y \geqslant 0$$
$$-0{,}2.x + 0{,}9.y \geqslant 0$$

Deze voorwaarde kunnen we dus op de volgende fraaie manier grafisch in beeld brengen.



Opgave 9.
Het bedrijf van boer Tange kan een totale input (dus L-input + V-input) verwerken van maximaal f 110.000.
Bereken de maximale winst die voor boer Tange en zijn bedrijf mogelijk is.

Opgave 10.
We passen de tabel met technische coëfficiënten van het bedrijf van boer Derij aan aan onze nieuwste gezichtspunten:

		input L	input V
output	L	0,1	0,6
output	V	0,3	0,05
K	KO	0,5	0,15
K	WI	0,1	0,2

De landbouw-input van het bedrijf van boer Derij kan de f 80.000 niet te boven gaan en ook zijn veeteelt-input heeft een plafond en wel van f 90.000. De totale input is maximaal f 125.000.
Bereken de maximale winst die boer Derij uit dit bedrijf kan halen.

We hebben tot nu toe dit 'technische-coëfficiënten-model' toegepast op een gemengd agrarisch bedrijf. Dit is namelijk een duidelijk voorbeeld van een economie waarin twee sectoren, de landbouwsector en de veeteeltsector, elkaars opbrengsten beïnvloeden. Dit economisch model probeert nu een zo goed mogelijke beschrijving te geven van die wederzijdse beïnvloeding van economische sectoren.

Dit model is bedacht door Wassily W. Leontjev, een in 1906 in Leningrad geboren Rus. Hij ontwikkelde zijn input-output-methoden in de dertiger jaren. In 1973 kreeg hij de Nobel-prijs voor zijn bijdragen in de economische wetenschappen.
Leontjev nu hield zich niet bij voorkeur bezig met alleen het gemengde agrarische bedrijf. Hij gebruikte zijn methode om het ingewikkelde vlechtwerk van economische activiteiten, waarbij iedereen aan iedereen levert en van iedereen geleverd krijgt, toegankelijk en overzichtelijk te maken.
Als voorbeeld nemen we een internationaal groot bedrijf van elektronische apparatuur met vestigingen over heel de wereld.
De bedrijvigheid kunnen we opsplitsen in twee sectoren:

O: de fabricage van onderdelen (transistors, condensatoren, beeldbuizen, etc.)
A: de fabricage van apparaten (meetapparaten, ontvangers, zenders, etc.)

De input-output-tabel van dit bedrijf ziet er op een zeker tijdstip als volgt uit:

		input O	input A	markt	Totaal
output	O	2240	800	160	3200
output	A	320	50	630	1000
	KO	480	100		
	WI	160	50		
	Totaal	3200	1000		

(De geldbedragen in miljoenen dollars)

Opgave 11:
Men wil door een reclamecampagne de vraag naar apparatuur met 20% laten stijgen.
Hoeveel % zal de winst op apparatuur nu stijgen?

Dit voorbeeld lijkt in zoverre nog op dat van het bedrijf van boer Tange dat er ook weer twee elkaar bevoorradende sectoren zijn. We beschouwen nu als voorbeeld een gesloten economie met drie produktiesectoren: landbouw, industrie en diensten. Als *'primaire kosten'*, dat is de kas, beschouwen we slechts lonen en winsten. De *'finale leveringen'*, de markt, bestaan uit investeringen en consumptie.

		input Landbouw	input Industrie	input Diensten	Investeringen	Consumptie	Totaal
output	Landbouw	955	6358	57	0	3413	10783
output	Industrie	3466	16391	4192	24781	19106	67936
output	Diensten	587	2245	6890	4718	30596	45036
output	Lonen	2873	27751	28783			
output	Winsten	2902	15191	5114			
	Totaal	10783	67936	45036			

INPUT-OUPUT-TABEL VAN DE ECONOMIE VAN JOEGO SLAVIË (1962)

input / output	Lichte industrie	Landbouw	Bosbouw	Zware industrie	Transport en Communicatie	Handel	Diensten	Overige	FINALE LEVERING	Totaal
L. industrie	1 848 873	81 378	4 584	253 527	118 369	37 904	43 704	9 326	2 318 747	4 716 412
Landbouw	1 230 180	523 069	3 566		78	3 897	44		835 580	1 596 394
Bosbouw	1 179 122	466	550	6 656	220	1 299	370	76	31 063	119 822
Zw. industrie	1 116 086	1 322	1 235	137 391	26 189	3 113	408	703	679 901	866 348
Transp. & Comm.	106 351	11 314	2 453	39 900	32 946	12 299	1 253	859	289 990	497 365
Handel	71 643	14 294	746	20 508	6 407	5 579	10 714	894	420 339	551 122
Diensten	31 624	9 028	958	8 939	8 561	7 069	1 613	614	65 559	133 965
Overige	39 256	237	130	2 100	1 063	2 849	378	277	32 113	78 403
PRIMAIRE KOSTEN	2 293 277	955 288	105 600	397 327	303 532	477 113	75 481	65 654		
Totaal	4 716 412	1 596 394	119 822	866 348	497 365	551 122	133 965	78 403		

(in miljoenen dinars)

Opgave 12.
Maak bij deze input-output-tabel (zie vorige pagina) een graaf met als knooppunten:
L = landbouw
I = industrie
D = diensten
K = kas (primaire kosten)
M = markt (finale leveringen)
Schrijf bij elke 'geldstroom' het betreffende bedrag.

Tenslotte geven we de input-output-tabel van de totale economie van Joego Slavië voor het jaar 1962. Uit het feit dat er zo'n tabel is blijkt al dat men daar groot belang hecht aan dit model.

Opgave 13.
Bereken de technische coëfficiënten van deze tabel in 3 decimalen nauwkeurig.

Opgave 14.
Een economie bestaat uit zes elkaar beïnvloedende sectoren A, B, C, D, E en F. De matrix van de technische coëfficiënten voor deze zes sectoren ziet er als volgt uit:

input

$$\text{output}\quad \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a. Bereken de bedrijfsvector B als de marktvector C gegeven is door:

$$C = \begin{pmatrix} 370 \\ 60 \\ 520 \\ 60 \\ 410 \\ 250 \end{pmatrix}$$

b. Als D voor f 750.000 van E toegeleverd krijgt, voor hoeveel krijgt D dan van C toegeleverd?
En voor hoeveel komt D ten laste van de kas K?

N.B. Dit lesmateriaal is nog niet uitvoerig uitgetest.

Wintersymposium

Het wintersymposium van het Wiskundig Genootschap heeft deze keer als thema: "Discrete wiskunde". Het symposium wordt gehouden op zaterdag 4 januari in de aula van het Dr. F.H. De Bruijne Lyceum, Koningsbergerstraat 2, 3531 AJ Utrecht.

Het programma is als volgt:
10.00–11.00: H.M. Mulder (VU, Amsterdam).
Grafentheorie: beeldspraak.
11.15–12.15: C. Roos (TH, Delft).
Lineair programmeren, kan het beter dan met de simplex methode?
13.30–14.30: J.H. van Lint (TH, Eindhoven).
Fouten verbeterende codes.

U kunt zich voor dit symposium uitsluitend schriftelijk opgeven bij:
Mw. H. Weenink,
Ambonstraat 4,
2612 BM Delft.
Op verzoek kunt u een prospectus met samenvattingen van de voordrachten thuisgestuurd krijgen. Deze prospectussen zullen begin december naar de scholen worden gestuurd.

Indien u wilt deelnemen aan de gezamenlijke lunch, stort u *f* 10,– op gironummer 4015571 t.n.v. H. Weenink, Delft.