Puzzelrubriek

A.J. Goddijn
OW & OC, RU Utrecht

Lekken stoppen

De opgaven uit de vorige Nieuwe Wiskrant hadden allemaal hetzelfde karakter. Gegeven was een functie f, $N \rightarrow N$, die niet de volle N treft. Gevraagd werd steeds een functie f^*, $N \rightarrow N$, die precies de waarden aanneemt, die door f gemist worden.
Juiste antwoorden, inclusief bewijzen, bij alle zes opgaven kwamen van:
J. Remijn,
Marcus Nijmeijer en Mike Staring,
A. Hickendorff.
Goede, onvolledige inzendingen kwamen van:
Ronald Schrier en Yvonne van Munnik,
C. de Jong
Er waren bovendien mondelinge inzendingen, ook van diverse pluimage.

Aan de meeste inzendingen is te zien dat er flink gevochten is om alle lekken in de functies f te dichten; dat leidde vaak tot forse formules en uitvoerige bewijzen.

Oplossingen vorige keer

Opgave 3 en 5 vragen naar de complement functies van
$$f(n) = [cn]$$
waarbij $c>1$ is.
Laten we beginnen met een grove verkenning.
Als X flink groot is, dan treft f van het blok getallen 1, ... X er een fractie $\frac{1}{c}$. Want als $n>\frac{X}{c}$ wordt $f(n)>X$.
Je kunt dat suggestief uitdrukken met: de dichtheid van de door f geleverde rij getallen is $\frac{1}{c}$. Het ligt voor de hand dat de 'dichtheid' van de complementrij zo moet zijn dat de totale dichtheid juist 1 is. Dit alles is natuurlijk heel globaal uitgedrukt, het kan allemaal met limietverhalen exact gemaakt worden. Maar het gaat nu alleen om het plausibel maken van de voorlopige keus
$$g(n) = [dn]$$
waarbij
$$\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1.$$
Deze functie g heeft globaal de juiste groei. We pakken een voorbeeld om te zien wat er nog bijgesteld moet worden.

Neem $c = \frac{13}{7}$, dan wordt d: $\frac{13}{6}$.

De eerste zeven f-waarden zijn:
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.
De eerste zes g-waarden zijn:
2, 4, 6, 8, 10, 13.
Alle 13 goed, op één na!

Kijk eens naar $\frac{13}{6}$ n voor n = 1, ... , 6. Zonder de entier-haken dus:
$$2\frac{1}{6}, 4\frac{2}{6}, 6\frac{3}{6}, 8\frac{4}{6}, 10\frac{5}{6}, 13.$$
Er blijkt bij de eerste 5 nog speling te zijn, als we dus alle getallen in het rijtje (4) iets verlagen, hebben we echt alle dertien goed. Duidelijk is nu dat:
$$f^* = [\frac{13}{6}n - \frac{1}{6}]$$
een geschikte kandidaat is.
Boven de 13 komen de patronen van f en f^* immers steeds weer terug, met veelvouden van 13 verhoogd.
Voor $c = \frac{13}{6}$ is het dus gelukt om f^* te bepalen.

Voor andere rationale getallen c gaat bijna alles precies zo.
We hebben nu $c = \frac{p}{q}$, $p>q$. $ggd(p,q) = 1$.
Net als zojuist:
$$f(n) = [\frac{p}{q} n],$$
$$g(n) = [\frac{p}{p-q} n],$$
en
$$f^*(n) = [\frac{p-1}{p-q} n].$$
Als alles in de 'eerste periode', het doelgebied 1, ... , p, goed gaat, klopt het verderop ook.
En weer zien we:
$$f(q) = g(p-q) = p$$
Bovendien is $f(q-1) < p-1$, omdat $\frac{p}{q} > 1$.
$f^*(p-q) = p-1$, en botst dus niet op een f-waarde.
Voor $n<p-q$ zijn g(n) en $f^*(n)$ weer gelijk.
Rest nog aan te tonen dat f en g onder p niet op elkaar botsen!
Stel je voor dat voor een i, $1 \leq i < q$, en een j, $1 \leq j < p-q$, f(i) en g(j) in hetzelfde interval $[k,k+1)$, $k \in N$,

zouden liggen. Dan vinden we:

$$k < i\,\frac{p}{q} < k+1$$

en

$$k < j\,\frac{p}{p-q} < k+1.$$

Echte ongelijktekens hier, dat komt door de grenzen op i en j, en doordat ggd(p,q) en ggd(p,p−q) beide 1 zijn.

We moeten nu hoognodig $\frac{q}{p} + \frac{p-q}{p} = 1$ gaan gebruiken. Daartoe vermenigvuldigen we de vorige twee vergelijkingen met respectievelijk $\frac{q}{p}$ en $\frac{p-q}{p}$ en tellen op.

Dat leidt tot:

$$k < i+j < k+1.$$

Dat lukt niet met gehele i, j, k. Daarmee is het rationale geval dan afgehandeld.

Een valkuil in het irrationale!

Nu pakken we opgave 5, waar c dus irrationaal is.

In twee inzendingen wordt c door rationale getallen benaderd. Maar je kunt niet zomaar een soort limietovergang uitvoeren, door te zeggen dat $\frac{p-1}{p-q}$ tot $\frac{c}{c-1}$ nadert als p en q zodanig groeien dat $\frac{p}{q}$ tot c nadert.

Als dat goed ging, zou het ook met rationale c kunnen en tot tegenspraken met bovenstaand verhaal leiden.

Marcus Nijmeijer en Mike Staring werken weliswaar met breukbenaderingen maar gebruiken in hun verhaal ook dat c irrationaal is en komen op een correct bewijs uit.

J. Remijn en A. Hickendorff kijken nauwkeurig hoeveel getallen f steeds overslaat en bouwen daar een goede redenering op.

Maar ik denk dat geen inzender zal protesteren als ik het bewijs van Ostrowski en Aitken geef, dat in 1927 als antwoord op een puzzel in de American Mathematical Monthly verscheen. Het is verbazingwekkend fraai en bovendien voorbij voor je het verwacht!

De stelling van Beatty

In 1926 ontdekte Beatty de volgende stelling, die precies ons geval met c irrationaal dekt.

> Als c en d zodanige irrationale getallen zijn dat $c, d > 1$ en $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$, dan valt in elk interval $(n,n+1)$, $n \in N$, precies een getal uit een van de rijen
>
> $$c, 2c, 3c, ..$$
>
> en
>
> $$d, 2d, 3d, \ldots.$$

Neem eens een natuurlijk getal n.

Hoeveel getallen uit de c-rij zijn kleiner dan n?

Juist $[\frac{n}{c}]$.

Hoeveel getallen uit de d-rij zijn kleiner dan n?

Juist $[\frac{n}{d}]$.

Vanwege de irrationaliteit van c en d gelden echte ongelijktekens in

$$\frac{n}{c} - 1 < [\frac{n}{c}] < \frac{n}{c}$$

en

$$\frac{n}{d} - 1 < [\frac{n}{d}] < \frac{n}{d}.$$

Optellen geeft de volgende vergelijking voor het aantal getallen onder n uit beide rijen.

$$n - 2 < [\frac{n}{c}] + [\frac{n}{d}] < n$$

Daar is $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$ bij gebruikt.

Veel keus aan de gehele getallen tussen n−2 en n is er niet:

$$[\frac{n}{c}] + [\frac{n}{d}] = n-1.$$

En nu de uitsmijter: je had even goed met n+1 kunnen werken, dan komt er in het totaal precies één getal bij. Maar dat ligt dan ook zeker in het interval (n,n+1). Klaar!

Een leuk trekje van dit bewijs is nog dat het volkomen symmetrisch in c en d is.

Tussen de kwadraten door

Wat opgave 6 betreft, houden we het op een korte oplossing die uit componenten van meerdere inzendingen en de bijdrage van de puzzelredacteur berust.

De functie f^* stijgt nu in het algemeen steeds een stapje tegelijk, maar als er tijdens de klim een kwadraat op het pad ligt, moet er een extra stap gedaan worden. Het aantal extra stappen is het aantal gepasseerde kwadraten.

We zetten f^* nu in de volgende vorm:

$$f^*(n) = n+h(n),$$

waar h(n) dus het aantal kwadraten onder het n-de niet-kwadraat is. Richten we ons op het moment dat het k-de kwadraat juist gepasseerd wordt, dan vinden we:

$$f^*(n) = n+k = k^2+1.$$

Die k moeten we kwijt, en dat lukt door de laatste vergelijking gewoon met de 'abc-formule' naar k op te lossen.

$$k = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$$

Dat wordt natuurlijk h(n). Met entier-haken houden we de uitdrukking constant tot n zo hoog is opgelopen dat het volgende gehele getal, k+1, bereikt is. Samengevat dus:

$$f^*(n) = n + \left[\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right].$$

Alternatieven

C. de Jong meldt bij opgave 1:

$$f^* = n + [\frac{n}{3}] + [\frac{n}{6}] - [[\frac{n}{6}] - \frac{n}{6} + 1].$$

Dat klopt óók.

Zijn formule bij opgave 6:

$$f^*(n) = n+[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4n+1}]-[[\sqrt{4n+1}]-\sqrt{4n+1}+1].$$

Daarbij tikte mijn computerprogramma in deze symfonie van haken en wortels af bij maat n = 90. Toch is het goed! Onnauwkeurigheden bij het trekken van de wortel uit 361 verblindden het BASIC-programma. Vermeldenswaard is het compacte:

$$f^*(n) = \langle n + \sqrt{n} \rangle$$

bij opgave 6 van J. Remijn. $\langle x \rangle$ staat hier voor het gehele getal dat het dichtst bij x ligt.

Meer materiaal over de besproken puzzels staat in: Ross Honsberger, *Ingenuity in Mathematics,* Random House, 1970. Het hoofdstuk heet 'Complementary Sequences'.

Nieuwe opgaven: Vierkanten en Driehoeken

Opgave 7.
In een vlak liggen twee vierkanten. $A_1A_2A_3A_4$ en $B_1B_2B_3B_4$. De nummering van de punten loopt met de klok mee in beide vierkanten, maar verder mag alles. Toch is er altijd iets bijzonders met de vier middens van A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4.
De vraag: wat? En is het nodig dat het vierkanten zijn?

Opgave 8.
Nu gaat het om twee driehoeken: $A_1A_2A_3$ en $B_1B_2B_3$. Het geval wil dat de loodlijnen uit

A_1 op B_2B_3,
A_2 op B_1B_3

en

A_3 op B_2B_1

door een punt gaan. Dan is er ook iets bijzonders met de loodlijnen uit B_1, B_2, B_3 op A_2A_3, A_3A_1 en A_1A_2. De vraag is wat er bij déze tweeling aan de hand is!

Opgave 7 laat waarschijnlijk verschillende benaderingen toe. Hopelijk wordt dat een mooie verzameling volgende keer.

Inzendingen graag vóór 30 april aan:

Aad Goddijn,
Vakgroep OW & OC,
Tiberdreef 4,
3561 GG Utrecht.