Grafieken, verbanden en functies (4)

H. Krabbendam/J. Speelpenning
SLO, Enschede

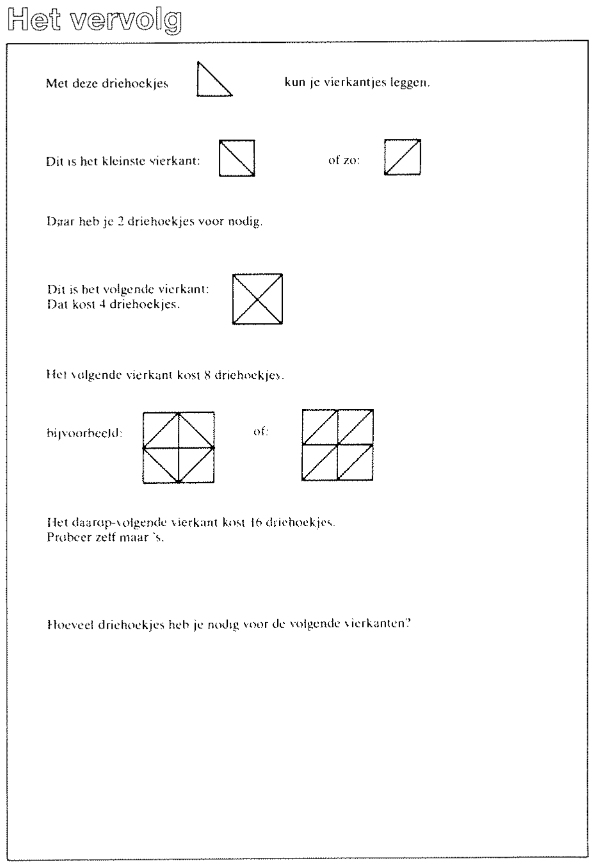
Samenvatting

In dit artikel worden enkele lesbladen uit het pakket 'Uitstippelen' gepresenteerd. 'Uitstippelen' is het vierde pakketje in de Verbanden, grafieken en functie-lijn die door de projectgroep 'Wiskunde 12-16' van de SLO is ontwikkeld. In eerdere artikelen in de Nieuwe Wiskrant is aandacht besteed aan lesbladen uit de pakketjes 'Grafiekentaal', 'Hoe langer, hoe meer' en 'Regelrecht'.

Inleiding

In vorige artikelen [1] hebben we enkele lesbladen uit de experimentele lespakketjes [2] 'Grafiekentaal', 'Hoe langer hoe meer', 'Regelrecht', besproken en gepresenteerd.
In dit laatste artikel uit de serie G, V & F komen een aantal bladen uit 'Uitstippelen' aan de orde, een pakketje dat een afsluiting vormt van de serie pakketjes.
In het pakket 'Uitstippelen' staat vooral centraal het door de leerlingen op eigen kracht uitstippelen van een weg die naar de oplossing van een probleem zal leiden. Dat betekent dat we vooral terughoudend zijn geweest bij de structurering van de lesbladen om zo de opdrachten zo open mogelijk te houden.
De problemen zelf zijn gevarieerd, liggen in het domein van G, V & F, maar hebben hier en daar een rekenachtige resp. meetkundige achtergrond.

De verbanden die in 'Uitstippelen' een rol spelen zijn o.a. het verband tussen de duur en de lengte, resp. stijging van een (berg)wandeling; de duur van een wedstrijd en de gemiddelde snelheid van een hardloper; de kosten van een taxirit, afhankelijk van de duur en het aantal km; de groei van een bacteriekolonie, afhankelijk van de tijd; etc.
Voorkomende functies zijn kwadratisch, lineair, hyperbolisch, exponentieel; de vragen zijn gericht op modelbouw, (impliciet) oplossen van vergelijkingen etc.


Het vervolg

Met deze driehoekjes kun je vierkantjes leggen.

Dit is het kleinste vierkant: of zo:

Daar heb je 2 driehoekjes voor nodig.

Dit is het volgende vierkant:
Dat kost 4 driehoekjes.

Het volgende vierkant kost 8 driehoekjes.

bijvoorbeeld: of:

Het daarop-volgende vierkant kost 16 driehoekjes.
Probeer zelf maar 's.

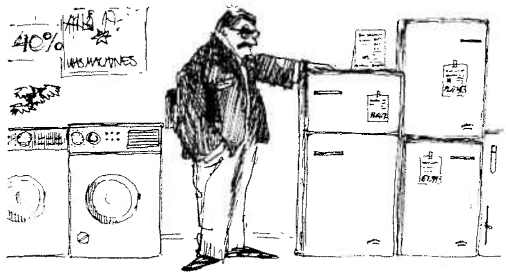
Hoeveel driehoekjes heb je nodig voor de volgende vierkanten?

Goedkoop is duurkoop?

Vorige week heeft onze koelkast het opgegeven. Na 15 jaar trouwe dienst. Tja, dan moet je wel een nieuwe kopen, want ik zou niet weten hoe je het in deze tijd nog zonder koelkast kunt doen.
Ik dus de stad in om 's te kijken wat er zoal te koop is.
En, dat is nogal wat.
Grote, met drie-sterren vriesvak, kleintjes, met of zonder vriesvak, dure, lelijke, beschadigde, en nog veel meer.
Niet gemakkelijk kiezen hoor!

Na een tijdje had ik er een gevonden die me wel wat leek. Groot genoeg voor wat ik zocht, en, niet te duur.
Ik een beetje in en om die kast kijken, komt er een verkoper op me af.
"Kan ik u misschien helpen?" zegt die man.
Ik zeg dat ik een koelkast zoek, zo groot als die waar we voor staan. En dat deze me wel geschikt lijkt. Vanwege z'n prijs dus.
Begint die verkoper met z'n hoofd te schudden.
"Loopt u voor de aardigheid 's met me mee", zegt hij.
Ik achter hem aan.
Staat hij bij een andere koelkast, ongeveer net zo een als ik had uitgezocht, maar wel een stuk duurder.
"Deze kan ik u aanbevelen", zegt hij. "Inderdaad een beetje hoger in prijs, maar, en daar moet u beslist op letten, deze gebruikt minder elektriciteit dan die andere. Deze verdient zich als het ware vanzelf weer terug."
Ik bedank die man voor z'n informatie en zeg dat ik er nog over na wil denken. Hoe kan een dure koelkast goedkoper zijn dan een goedkope? Volgens mij zijn die verkopers er altijd op uit om je met iets duurders naar huis te laten gaan dan je van plan was.
Ik weet het nog steeds niet. En zolang ik het niet weet zit ik wel zonder koelkast. . . .

Kan het zo zijn dat een dure koelkast op den duur goedkoper is dan een goedkope koelkast?
Leggen jullie dat eens uit.



. . . . DEZE VERDIENT ZICH ALS HET WARE VANZELF TERUG . .

Het is, kortom, een pakketje dat in zekere zin als afsluiting bedoeld is voor een oriënterende fase die gericht is op algemene wiskundige vaardigheden in het G, V & F-gebied en attitudevorming en kan, aan de andere kant, juist een beginpunt vormen voor leerlingen die een wat meer op formele vaardigheden gericht programma hebben doorlopen en nu toe zijn aan oefening op het gebied van toepassen van wiskundige vaardigheden in niet-à priori wiskundige probleemstellingen.
Het pakketje is bedoeld voor de tweede helft van het tweede leerjaar tot begin derde leerjaar, maar bevat problemen die ook in een Wiskunde A-programma een plaats kunnen vinden. Die 'ruime inzetbaarheid' is een consequentie van de openheid van de vragen die immers niet (of nauwelijks) een bepaalde oplossingsweg voorschrijft.

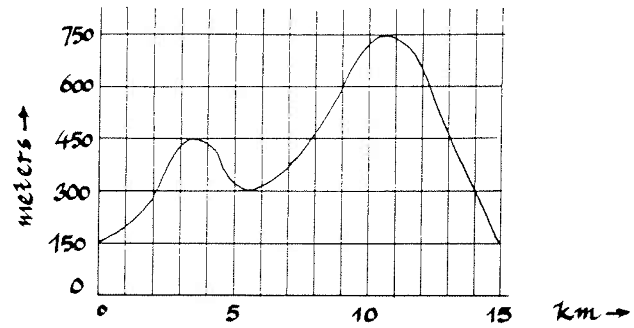
Ter zake

We willen in dit artikel de lesbladen 'Bergwandeling' laten zien en van enig commentaar voorzien.
Bij een uitgestippelde wandeling in Nederland is de afstand van die wandeling een goede indicator voor de loopduur. De meeste mensen kennen uit ervaring wel hun gemiddelde loopsnelheid en kunnen daarmee een betrouwbare schatting maken voor de duur van de tocht.
In de bergen is dat niet zo. Het hoogteverschil dat je moet overbruggen tijdens een wandeling heeft een behoorlijke invloed op de duur en de mate waarin dat is wordt nogal eens onderschat. Een van de gebruikte vuistregels voor de berekening van de duur van een bergwandeling is die van Naismith, een vuistregel die rekening houdt met het aantal meters dat je tijdens een wandeling stijgt:

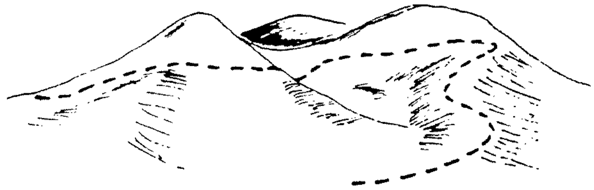
je berekent de tijd die je nodig hebt voor de tocht als die over een vlakke weg zou gaan en daarbij tel je, voor elke 100 meter die je stijgt 20 minuten op.

Als je deze regel zo bekijkt, dan valt het op dat er niets over dalen gezegd wordt; in het algemeen is het natuurlijk zo dat je meestal eindigt daar waar je begonnen bent, dus de totale stijging is gelijk aan de totale daling. Mogelijk heeft Naismith ontdekt dat het tijdverlies dat ontstaat door zoveel meter stijgen èn zoveel meter dalen benaderd kan worden met 20 minuten per 100 meter. Dat zou een verklaring kunnen zijn, maar dat is niet de juiste.
In de praktijk komt het er op neer dat een wandeling van 10 km over een dalend stuk weg nauwelijks sneller gaat dan een over een vlakke weg; je remt jezelf voortdurend af, dat vermoeit je snel en daardoor is de tijdwinst een illusie.

Deze regel van Naismith geeft aanleiding tot een aantal leuke wiskundige vragen, zeker als je de regel in verband brengt met een gangbare manier om bergwandelingen in gidsjes aan te duiden. Daarvoor wordt namelijk (o.a.) deze manier (een projectie tegen een gekromd verticaal vlak) gebruikt:



Zo'n grafiek geeft de oplettende lezertjes een aardig beeld van de zwaarte van de tocht; je krijgt een indruk van het relief, je ziet de hoogte van het hoogste punt, de lengte van de totale tocht en, met wat gereken, de totale stijging/daling.
Zo'n grafiek lijkt natuurlijk ontzettend veel op een plaatje van de bergen waarover de tocht voert. Dat is – uiteraard – onjuist en het is van belang dat leerlingen dat ook inzien:



De regel van Naismith is een aardig voorbeeld van een functie van twee variabelen (als je uitgaat van een gegeven wandelsnelheid) en is er een van drie variabelen als je de wandelsnelheid ook als variabel beschouwt. In formulevorm:

(1) bij een wandelsnelheid van 5 km/u:

$T = 12\,K + 20\,M$

waarin

T staat voor tijd in minuten
K staat voor aantal kilometer
M staat voor aantal 100 meter stijging

of

(2) bij een wandelsnelheid V in km/u:

$T = 60K/V + 20M$

Zo'n formule geeft op een natuurlijke manier aanleiding tot allerlei op te lossen vergelijkingen: geef T, V en M en laat K bepalen, geef V en T en laat zoeken naar combinaties voor K en M die 'het doen' enz.

Het bijgaande lesmateriaal is, zoals gezegd, bedoeld voor tweede/derde klassen. Voor die doelgroep moet je noodgedwongen een aantal soorten vragen laten liggen waar de context in overvloed aanleiding toe geeft. Het opstellen van de formules bijvoorbeeld zou voor wat verder gevorderde leerlingen een goede oefenmogelijkheid zijn. Of, om een ander voorbeeld te noemen, het opsporen van de fout in deze formule:

$T = K/V + 20M$

of in deze:

$T = 60V/K + 20M$

of...

In het geval dat V=5 en T=240 (dus een tocht van 4 uur) is de formule om te werken tot:

$M = 12 - 3K/5$

de grafiek daarvan is in het rooster van de plaatjes van de wandelingen te tekenen. Hoe moet je (kun je) die grafiek interpreteren?

Een ander soort uitbreiding ligt in de richting van hoogtekaarten. Een wandelroute, aangegeven op een hoogtekaart (zoals op blz. 4 van het lesmateriaal), kan omgezet worden tot zo'n grafiek als in figuur 3 en omgekeerd, een grafiek kan terugvertaald worden naar een route op de kaart. Het is de vraag of dat eenduidig is en het zoeken naar een tegenvoorbeeld dan wel een bewijs daarvoor, is ook een aardige activiteit voor de wat oudere leerlingen.

Tenslotte

In deze serie artikelen hebben we niet geprobeerd een uitgebalanceerd beeld te geven van de G, V & F lijn zoals die ons voor ogen staat, maar juist een exemplarisch dus lacuneus doorkijkje. Het leek ons vooral aardig om enkele krenten uit de pap te halen en die met enige kanttekeningen hier de revue te laten passeren. Voor een uitvoeriger beeld verwijzen we naar een nog te verschijnen publikatie 'Verbanden, Grafieken en Functies in het Voortgezet Onderwijs' die in de loop van '86 beschikbaar zal zijn.

Noten

[1] Hans Krabbendam en Jan Speelpenning, *Grafieken, Functies en Verbanden (1), (2) en (3)*, Nieuwe Wiskrant 4de jrg. nr. 3 en 4, resp. 5de jrg. nr. 1.

[2] De genoemde pakketjes zijn verkrijgbaar bij SLO, Postbus 2041, Enschede, (tel. 053-840277).

Bergwandelingen (1)

Jullie kunnen je wel voorstellen dat een wandeling in de heuvels in het algemeen langer duurt dan een over een vlakke weg. Je moet nu eenmaal steeds omhoog en naar beneden en dat is extra vermoeiend, dus gaat het langzamer.
Er is een manier om te voorspellen hoe lang een wandeling in de heuvels duurt. Daarvoor moet je weten hoeveel meter je – tijdens de wandeling – stijgt en hoever je loopt.
Meneer Naismith heeft deze regel ontdekt:

Je berekent het aantal uur dat je erover zou doen als het allemaal vlakke wegen zouden zijn en je telt er voor elke 100 meter die je stijgt 20 minuten bij.

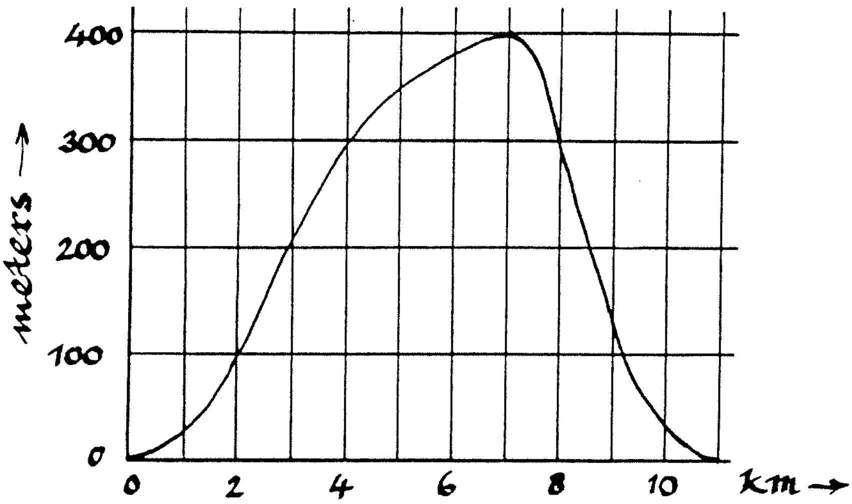
De tijd die je over een wandeling op een vlakke weg doet hangt natuurlijk af van jouw privé-loopsnelheid. Normaal gesproken is dat ongeveer 5 km per uur. Rustpauzes zijn dan nog niet meegerekend.

Even proberen:

a. Hoe lang zou je, volgens de regel van Naismith, over een bergwandeling doen die 6 km lang is en waarbij je 600 meter stijgt?

b. Waarom zou er in Naismith's regel eigenlijk niets over *dalen* staan?

In een Engels boekje waarin allerlei bergwandelingen in geuren en kleuren worden beschreven staat bij een bepaalde tocht deze grafiek:



Probeer je voor te stellen wat deze grafiek eigenlijk precies vertelt.

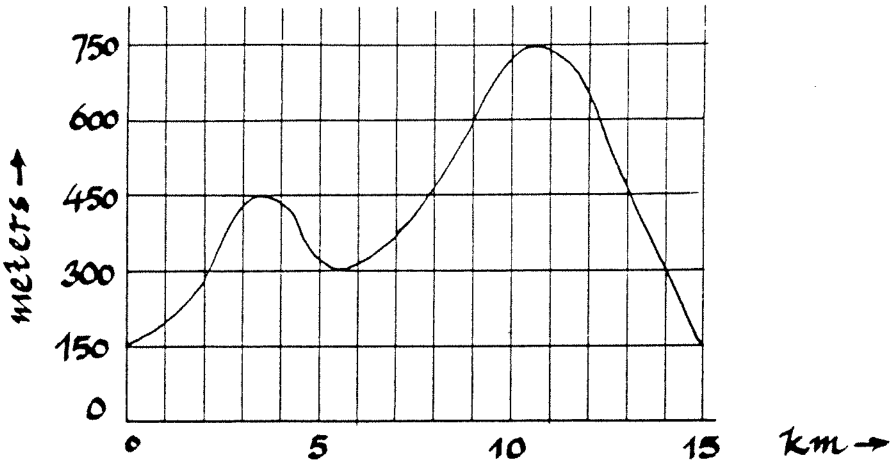
c. Hoe lang zou je ongeveer over deze bergwandeling doen?

d. En als je deze wandeling in de omgekeerde richting maakt?

Werkblad behorend bij artikel: Grafieken, verbanden en functies (4).

Bergwandelingen (2)

Een andere grafiek uit hetzelfde boekje:

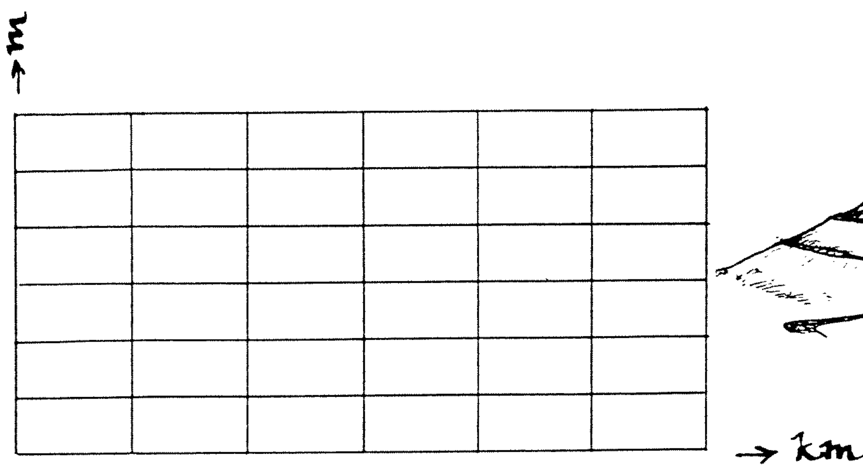


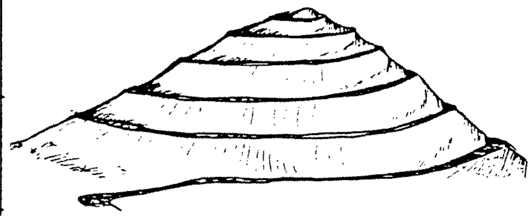
a. Hoe lang zal, volgens de regel van Naismith, deze bergwandeling duren?

b. En als je deze wandeling in omgekeerde richting maakt?

Even een waarschuwing.
Zo'n grafiek als hierboven lijkt erg veel op een plaatje van de bergen waarover de wandeling voert. Toch is dat vrijwel nooit zo. Kijk maar naar de volgende plaatjes.

c. Hoe ziet de grafiek van een wandeling naar de top van deze berg over het pad eruit? Het pad is 6 km lang, de hoogte loopt van 100 tot 500 m.





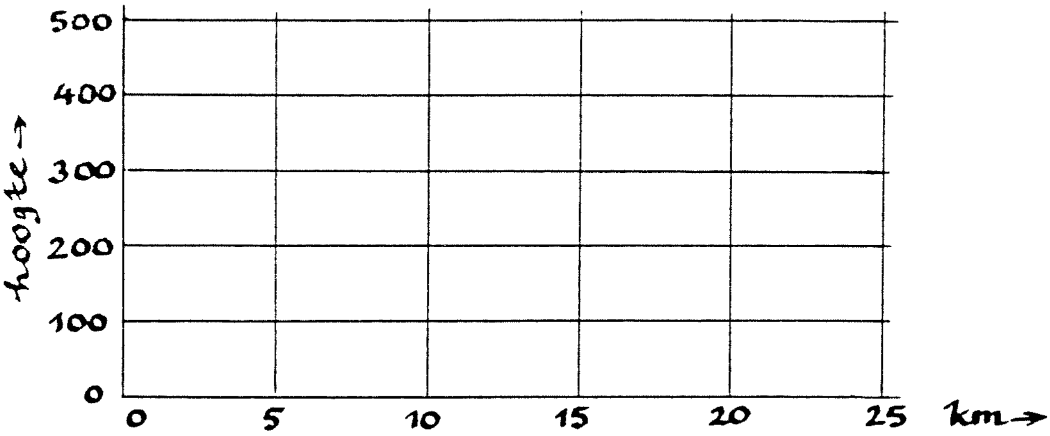
Werkblad behorend bij artikel: Grafieken, verbanden en functies (4).

Bergwandelingen (3)

Stel je voor dat jullie een bergwandeling hebben gemaakt. Over die wandeling deden jullie 4 uur, zonder dat jullie onderweg hebben gepauzeerd.
Jullie tempo over de (vlakke) weg is 5 km per uur.

a. Als er in de wandeling een stijging zat van 300 meter, hoeveel kilometer was de tocht van 4 uur dan?

b. Teken in dit rooster hoe die tocht eruit zou kunnen zien.



c. Teken in hetzelfde rooster een tocht die 4 uur duurt en een stijging heeft van 600 meter.

Zo kun je je wel voorstellen dat je tijdens een wandeling van 4 uur ook 700 meter of 800 meter of... stijgt.
De tocht wordt dan, wat lengte betreft, steeds korter.

d. Maken jullie deze tabel verder af:

duur van de wandeling 4 uur	
lengte van de wandeling in km	stijging in 100 m
15	3
14	
13	
12	
11	
10	6
9	
5	
0	
	0

Jullie hebben natuurlijk wel gemerkt dat je, als je in de tabel het getal links hebt staan, dat je dan het getal rechts kunt uitrekenen. En omgekeerd. Er is (dus) een verband tussen de *lengte van de wandeling in km* en de *stijging in 100 m* bij zo'n wandeling van 4 uur.

e. Welk?

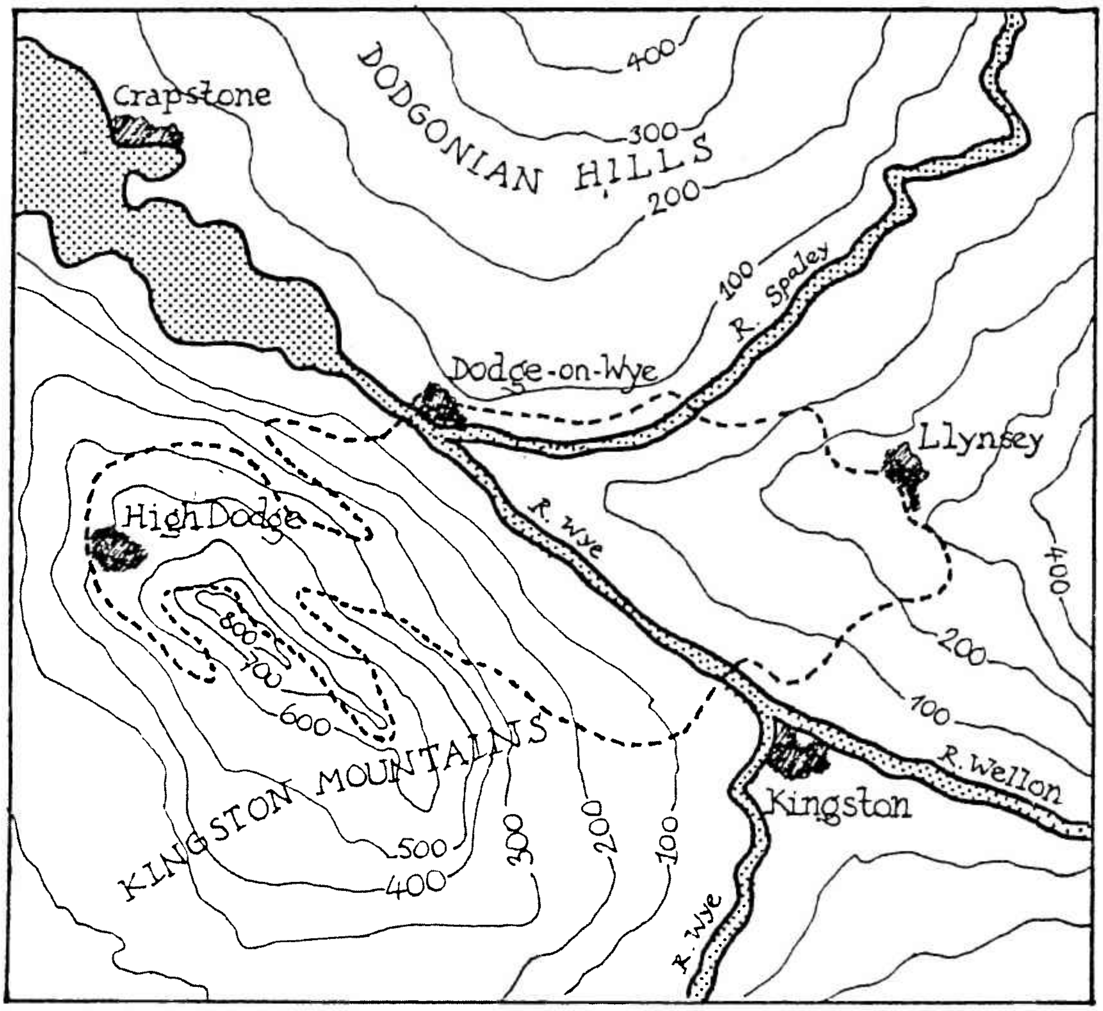
Werkblad behorend bij artikel: Grafieken, verbanden en functies (4).

Bergwandelingen (4)

Loes en Peter zijn met vakantie in Engeland. Ze kamperen in Dodge-on-Wye, aan de rivier de Wye, dichtbij het meer.
Bekijk het kaartje maar 's. Je ziet daar allerlei *hoogtelijnen* getekend. Die lijnen verbinden op de kaart plaatsen die op gelijke hoogte liggen. Zo ligt Llynsey op ongeveer 250 meter hoogte, Dodge-on-Wye en Kingston beide op ongeveer 0 meter hoogte (zee-niveau) en High Dodge op zo'n 500 meter.

Het handige van die hoogtelijnen is dat je een idee kunt krijgen over hoe steil een bepaalde weg is. Volgen de hoogtelijnen van 100, 200 enz. meter elkaar snel achterelkaar op, dan weet je zeker dat het er erg steil moet zijn. Volgt daarentegen het pad een hoogtelijn, dan loop je in feite horizontaal, dus klim je niet.

a. Zoek op het kaartje de plaats(en) waar de uitgestippelde route het steilst loopt.



1 km

Werkblad behorend bij artikel: Grafieken, verbanden en functies (4).

Bergwandelingen (5)

Loes heeft zin om de uitgestippelde route te lopen, vanaf de camping in Dodge-on-Wye langs de rivier de Spaley, klimmend naar Llynsey, via (de buurt van) Kingston naar de Kingston Mountains, High Dodge en weer terug naar de camping.

Peter ziet er nogal tegenop. *"Volgens mij redden we dat nooit op één dag"* verzucht hij, *"dat is veel te ver en bovendien veel te hoog."* Loes ziet dat wat zonniger in.
"Volgens mij lukt dat wel op één dag. Als we bijtijds vertrekken dan zijn we terug voor het avondeten. Moeten we natuurlijk wel flink doorstappen en niet om de vijf minuten uitrusten... Gewoon op tijd opstaan. Geen probleem."

a. Maken jullie een schatting van de duur van de tocht. Geef in elk geval aan hoe jullie tot het antwoord gekomen zijn.

b. Had Loes gelijk?

Werkblad behorend bij artikel: Grafieken, verbanden en functies (4).