Het zakrekenmachientje als patronenmaker

H. Sissing
Docent NGOLB, Ede

Samenvatting

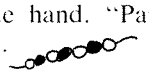
De zakrekenmachine kan een extra dimensie geven aan het gebied van het gevarieerd rekenen, zoals onderzoek van getalpatronen, delen met rest, rekenen met machten etc.

(Treffers, De Moor, 1984).

Op de volgende pagina's geven wij de verkleinde werkbladen over patronen. De bladen zijn door ons samengesteld aan de hand van aanwijzingen uit de literatuur en enkele ideetjes uit eigen keuken. Daarna wordt een verslag gegeven van een les 'patronen maken' in de zesde klas van de Immanuëlschool te Krimpen aan den IJssel [1].

De les

"Wat zijn patronen?"
Ll: "Een stof heeft een patroon."
"Wat bedoel je daarmee?"
Ll: "Het gaat steeds hetzelfde verder."
Op het bord wordt een patroon getekend: 
"Hoe gaat dit verder?"
Ll tekent op het bord: 
Er wordt nog een patroon getekend: 
"Hoe gaat dit patroon verder?"
Ll tekent op het bord: 

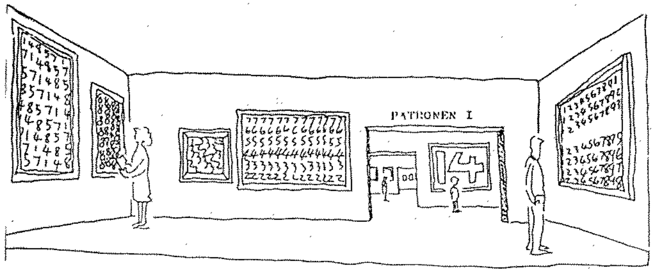
De onderwijsgevende vertelt de leerlingen een verhaaltje over zijn dochtertje Heleen (4 jaar), die op een dag opgewonden de kamer binnenkomt. Zij heeft een zelfgeregen ketting in de hand. "Papa, kijk eens, blauw, wit, blauw, wit, ... 

"Is dat ook een patroon?"
Ll: "Ja, het wisselt elkaar steeds af."
Daarna wordt er nog gesproken over het patroon van de tekeningen op het prikbord, het vlechtwerk in het haar van een van de leerlingen en het patroon op het pakpapier op het bureau van de meester. Dan wordt opgemerkt dat bij de getallen ook patronen voorkomen en zonder deze opmerking verder toe te lichten krijgen de leerlingen een stencil. De vier stappen op het eerste blad worden voorgelezen en opgave 1 wordt gedeeltelijk gemaakt.
Op het bord staat:

121
12321
1234321

De leerlingen hebben geen moeilijkheden bij het ontdekken van het patroon en zeggen de bedoeling van de overige opgaven te begrijpen. Een aantal opvallende zaken in deze fase van de les zijn:
- De leerlingen ontdekken de patronen erg snel; enkele leerlingen gebruiken geen rekenmachientje voor het berekenen van de antwoorden bij opgave 3 en 4. Zij berekenen de eerste sommen uit het hoofd en leiden de overige antwoorden hieruit af. Het apparaat doet bij deze leerlingen dienst als controlemiddel. [2]
- Enkele leerlingen ervaren het vermelden van de aanwijzingen: stap 1, stap 2, stap 3 en stap 4 bij de opgaven als verwarrend. "Moet je dat invullen, meester?"
"Nee hoor, het is alleen bedoeld als geheugensteuntje om je aan de vier stappen te herinneren." [3]

Werkblad 1



GEBRUIK JE REKENMACHIENTJE VOOR HET BEREKENEN VAN DE ANTWOORDEN

1. In deze en volgende opgaven gaan we steeds van vier stappen gebruik maken:

stap 1: reken de eerste sommen uit met je rekenmachientje;
stap 2: kijk naar de antwoorden en probeer een patroon te ontdekken;
stap 3: voorspel de antwoorden van de sommen die je nog niet gemaakt hebt;
stap 4: controleer de voorspelde antwoorden met je rekenmachientje of door ze uit te rekenen met pen-en-papier.

Daar gaan we:

stap 1:
stap 2:
stap 3:
stap 4:

11 × 11 =
111 × 111 =
1111 × 1111 =
11111 × 11111 =
111111 × 111111 =
1111111 × 1111111 =
11111111 × 11111111 =
....
....

Waardoor ontstaat dit patroon? Blijft het zo doorgaan?

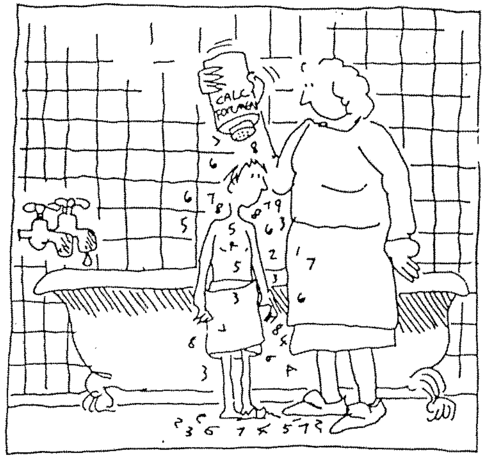
Werkblad 2

2.

99 × 99 =
999 × 999 =
9999 × 9999 =
99999 × 99999 =
....
....

stap 1:
stap 2:
stap 3:
stap 4:

Blijft het patroon doorgaan?



3. stap 1. .... stap 2. .... stap 3. .... stap 4. ....

1 × 8 + 1 =
12 × 8 + 2 =
123 × 8 + 3 =
1234 × 8 + 4 =
12345 × 8 + 5 =
123456 × 8 + 6 =
1234567 × 8 + 7 =
12345678 × 8 + 8 =

- Bij opgave 7 draaien Remco, Johan en Bart deeltal en deler om in plaats van 1 : 22 = .. rekenen zij 22 : 1 = .. uit. [4] Geen enkele leerling heeft een reactie gegeven over het patroon van opgave 7. Maar kunt u het quotiënt van 3 : 22 = .. afleiden uit de antwoorden van de delingen 1 : 22 = .. en 2 : 22 = ..? En 7 : 22 = ..? Is dit wel een patroon?
- De meeste leerlingen vullen in of het patroon doorgaat of niet. Geen enkele leerling blijkt echter in staat het patroon te verklaren.

Bij dit laatste punt raken we een fundamenteel probleem: Moet je de zakrekenmachine als patronenmaker alleen gebruiken als de leerlingen de patronen kunnen verklaren? Mag je leerlingen sommen laten maken die ze niet (kunnen) begrijpen?
Het werken met patronen moet niet blijven steken in het voorspellen van de antwoorden:

$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
etc.

De antwoorden moeten ook verklaard kunnen worden:

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 1111 \times \\ \hline 1111 \\ 11110 \\ 111100 \\ 1111000 \\ \hline 1234321 \end{array}$$

Wij zijn echter op de basisschool nog geen leerling tegengekomen die zelfstandig in staat is dit patroon te verklaren.
Maar er zijn uiteraard tientallen patronen: .. $\times\ 10^n$, .. : 10^n, hoofdbewerkingen met kommagetallen, + 10^n, .. − 10^n. Patronen, die *wel* door de kinderen uit de bovenbouw te verklaren zijn. En even vooruitlopend op het leerlingenwerk dat hierna wordt gegeven; er zijn ook patronen die door leerlingen uit de lagere leerjaren verklaard kunnen worden bv. tafels (zie Richard en Pauline). Je kunt de leerlingen dus patronen aanbieden die ze wel kunnen verklaren. Dit is belangrijk omdat:

1. de leerlingen patronen maken die door hen inzichtelijk te verklaren zijn;
2. de leerlingen (moeten) nadenken over de fundamentele principes van ons tientallig systeem.

Dit sluit naar wij menen aan bij een realistische visie op reken/wiskunde-onderwijs.

De hele kern van het werken met patronen is hiermee echter niet aangegeven. Die kern toonde zich pas in de praktijk. Daar bleek het interessante gedeelte te worden gevormd door de opgaven 8 en 9 waarbij de leerlingen worden uitgenodigd zelf op zoek te gaan naar allerlei patronen. [5]
Bij deze opgaven is namelijk naar voren gekomen dat het werken met patronen een uitstekende context vormt om met de leerlingen te praten over allerlei zaken als: afronden, Meneer van Dalen-regel, oneindige getallen, notaties en symbolen.

Lotje:

5 x 5 = 25
5 x 55 = 275
5 x 555 = 2775
5 x 5555 = 27775
5 x 55555 = 277775
5 x 555555 = 2777775
5 x 5555555 = 27777775
5 x 55555555 = 277777775
5 x 555555555 = 2777777775

Karin:

67 x 67 = 4489
667 x 667 = 444889
6667 x 6667 = 44448889
66667 x 66667 = 4444488889
666667 x 666667 = 444444888889
6666667 x 6666667 = 44444448888889

Bart:

1 : 5 = 0,2
2 : 5 = 0,4
3 : 5 = 0,6
4 : 5 = 0,8
5 : 5 = 1
6 : 5 = 1,2
7 : 5 = 1,4
8 : 5 = 1,6
9 : 5 = 1,8
10 : 5 = 2

Barbara:

1 x 7 = 7
12 x 7 = 84
123 x 7 = 861
1234 x 7 = 8638
12345 x 7 = 86415
123456 x 7 = 864192
1234567 x 7 = 8641969
12345678 x 7 = 86419741
123456789 x 7 =
1234567890 x 7 =

Soms valt het niet mee een patroon te ontdekken:

Heleen:

49 x 49 = 3601
449 x 449 = 201601
4449 x 4449 = 19793601
44449 x 44449 = 1975713601
444449 x 444449 = 19752693601

Johan:

2 x 2 = 4
22 x 22 = 484
222 x 222 = 49284
2222 x 2222 = 4937284
22222 x 22222 = 493817284
222222 x 222222 = 49382617284
2222222 x 2222222 = 493827617284

Het patroon wordt dan meer gezocht in de visuele weergave van de opgave dan in het antwoord.

Werkblad 3

4. stap 1. .... stap 2. .... stap 3. .... stap 4. ....

$1 + 11 =$
$12 + 111 =$
$123 + 1111 =$
$1234 + 11111 =$
$12345 +$ .... =
.... + ... =
.... + ... =

5. stap 1. .... stap 2. .... stap 3. .... stap 4. ....

$101 \times 222 =$
$101 \times 2222 =$
$101 \times 333 =$
$101 \times 3333 =$
$101 \times 33333 =$
$101 \times 555 =$

Wat merk je op? Hoe komt dat?

6. stap 1. .... stap 2. .... stap 3. .... stap 4. ....

$37037 \times 6 =$
$37037 \times 9 =$
$37037 \times 12 =$
$37037 \times 15 =$
$37037 \times 18 =$
....
....

Blijft het patroon doorgaan?

Werkblad 4

7. stap 1. .... stap 2. .... stap 3. .... stap 4. ....

$1 : 22 =$
$2 : 22 =$
$3 : 22 =$
$4 : 22 =$
....
....

Blijft het patroon doorgaan?

8. Weet je met welk getal je leuke patroontjes kunt maken?
99. Probeer het maar eens met 5, 55, 555, 5555, ...
Doe hetzelfde met andere getallen.
999 is ook leuk.
Schrijf je ontdekkingen hieronder op:

....
....
....
....

9. Wat dacht je van?

$34 \times 34 =$
$334 \times 334 =$
$3334 \times 3334 =$
....

Ook aardig zijn:

67, 98, 49, en nog een heleboel meer!

ONTDEK ZE EN WISSEL ZE UIT MET ELKAAR ←

Angela:

5555
1 : 5555 = 0,0002
2 : 5555 = 0,0004
3 : 5555 = 0,0005
4 : 5555 = 0,0007
5 : 5555 = 0,0009
6 : 5555 = 0,0011
7 : 5555 = 0,0013
8 : 5555 = 0,0015
9 : 5555 = 0,0016
10 : 5555 = 0,0018
geen patroon.

Op het blaadje van Elles staat het volgende patroon:

1 + 1 x 1 = 2
11 + 1 x 11 = 22
1 + 1 x 111 = 222
1 + 1 x 1111 = 2222

Het is een voorbeeld van het verschil tussen de rekenmachinetaal en de rekentaal. In rekentaal zijn deze sommen, op de eerste na, fout. Op een rekenmachine uitgevoerd is de "fout" begrijpelijk. [6]

Enkele leerlingen zijn op het idee gekomen om het getal 10 te nemen als grondgetal voor een patroon: [7]

Angela:

10 x 10 = 100
10 x 100 = 1000
10 x 1000 = 10.000
10 x 10000 = 100.000
10 x 100.000 = 1000 000
10 x 1000.000 = 10000000

Na ongeveer drie kwartier worden enkele patronen op het bord geschreven. Daarbij vindt het volgende plaats:

Jolanda heeft:

99
1 : 99 = 0,0101
2 : 99 = 0,0202
3 : 99 = 0,0303
4 : 99 = 0,0402
5 : 99 = 0,0505
6 : 99 = 0,0606

Het patroon wordt op het bord geschreven. Er wordt gereageerd door enkele leerlingen:
"Ik heb dezelfde deelsom, maar een ander antwoord. Ik heb achter de één nog een keer 01 staan", zegt Bart. Ook dit patroon komt op het bord te staan:

1 : 99 = 0,010101
2 : 99 = 0,020202
3 : 99 = 0,030303
4 : 99 = 0,040404
5 : 99 = 0,050606

Rick blijkt nog meer cijfers achter de komma te hebben:

1 : 99 = 0,010101010 11 : 99 = 0,1111111
2 : 99 = 0,020202020 12 : 99 = 0,1212121
3 : 99 = 0,030303030 13 : 99 = 0,1313131
4 : 99 = 0,040404040 14 : 99 = 0,1414141
5 : 99 = 0,050505050 15 : 99 = 0,1515151
6 : 99 = 0,060606060 16 : 99 = 0,1616161
7 : 99 = 0,070707070 17 : 99 = 0,1717171
8 : 99 = 0,080808080 18 : 99 = 0,1818181
9 : 99 = 0,090909090 19 : 99 = 0,1919191
10 : 99 = 0,1010101 20 : 99 = 0,2020202

In de klas ontstaat een levendige discussie over de vraag welk antwoord goed is. Een van de leerlingen oppert dat de antwoorden allemaal goed zijn en dat het verschil wordt veroorzaakt door de gebruikte rekenmachientjes.
Op de vraag welk antwoord een rekenmachine geeft waarin in het venster slechts vier cijfers kunnen, wordt als antwoord gegeven: "0,010".
"En als ik nu eens een rekenmachine heb met een oneindig lang venster, welk antwoord krijg ik dan?"
"Dan krijg je steeds 01 achter elkaar."

Op dit punt aangekomen vertel ik de leerlingen over het teken voor het oneindige: ∞ (dit wordt door enkele leerlingen overgenomen)

Angela:

99 x 5 = 495
99 x 55 = 5445
99 x 555 = 54945
99 x 5555 = 549945
99 x 55555 = 5499945
99 x 555555 = 54999945
oneindig
∞

Ghislaine:

2 x 9 = 18
2 x 99 = 198
2 x 999 = 1998
2 x 9999 = 19998
2 x 99999 = 199998
2 x 999999 = 1999998
2 x 9999999 = 19999998
∞

en het teken voor de repeterende breuken: 0,$\cancel{0}\cancel{1}$.
Het door meerdere auteurs genoemde voordeel van het gebruik van verschillende rekenmachines toont zich ook in deze les. Het door de rekenmachines veroorzaakte verschil geeft aanleiding tot discussie en verdieping (F.J. van den Brink, 1985).

Zoals uit de beschrijving van de les blijkt, gebeurde er tijdens deze les veel. Teveel om met de leerlingen op in te gaan. Als onderwijsgevende zul je een selectie moeten maken uit de vele dingen waarmee de leerlingen komen en dit eventueel verdelen over verschillende lessen.

Resumerende opmerkingen over patronen en zakrekenmachines:
– het biedt een *rijke context*;
– het gebruik van *verschillende zakrekenmachines*

blijkt voordelen te bieden;
- het is een *klassikaal bruikbaar* onderwerp;
- de leerlingen zijn *ontdekkend bezig*;
- de leerlingen zijn *verklarend bezig*;
- het werkt *motiverend*;
- het biedt gelegenheid tot *verdieping* van het *inzicht* in het getallensysteem.

De zin van het werken met patronen op de basisschool wordt niet alleen gevormd door de inhoud van de patronen die voor de leerlingen te verklaren zijn, maar vooral door het in de praktijk naar voren gekomen gegeven dat het werken met patronen een rijke context biedt voor allerlei rekenkundige zaken.

Noten

1. In de klas zijn vijftien door de leerlingen zelf meegenomen zakrekenmachientjes aanwezig. De leerlingen blijken alle de hoofdbewerkingen te kunnen uitvoeren op de apparaten.
2. In de literatuur wordt door diverse auteurs o.a. Moursund (1981), Sweers (1981) opgemerkt dat het van belang is de leerlingen te leren beoordelen wanneer het machientje beter wel of liever niet gebruikt kan worden. Binnen de context van deze les blijken een aantal kinderen dit spontaan te doen.
   Naar aanleiding van het zojuist genoemde is de aanhef van de werkbladen veranderd in: gebruik, als je dat nodig vindt, je rekenmachientje voor het berekenen van de antwoorden.
3. Het aangeven van de stappen bij de opgaven is bij de nieuwe versie van de werkbladen geschrapt.
4. Carpenter (1981) merkt hierover op: "One difficulty that students have with the division problems is deciding which number is the dividend and which is the divisor; or more directly which number should be entered first in the keystroking sequence."
5. Naar aanleiding hiervan zijn de opgaven 8 en 9 samengevoegd tot: ontdek zelf patronen en wissel ze met elkaar uit.
6. Er zijn ook zakrekenmachines in de handel waarin de hiërarchie van de hoofdbewerkingen is ingebouwd. Als in de klas verschillende zakrekenmachines gebruikt worden, dan kan dat een mooi aangrijpingspunt zijn om o.a. de Meneer Van Dalen-regel centraal te stellen.
   De onderwijsgevende schrijft op het bord:
   $$1 + 1 \times 1 =$$
   $$1 + 1 \times 11 =$$
   $$1 + 1 \times 111 =$$
   $$1 + 1 \times 1111 =$$
   De klas rekent de sommen uit op verschillende zakrekenmachines. De verschillende antwoorden worden op het bord genoteerd. "Welk antwoord is juist?" "Waarom?"
   Zie in dit verband het artikel van Jan van den Brink (1985).
7. Ook dit lijkt een patroon dat voor basisschoolleerlingen bruikbaar is. Het is te verklaren en biedt bij het zoeken naar een verklaring een mogelijkheid om het inzicht in het positiesysteem uit te breiden.
8. Zoals u weet is het grootste onderwijsprobleem: motivatie. Het werken met rekenmachientjes heeft op de bereidwilligheid van de leerlingen tot inzet van energie een gunstig effect. Zonder al te veel zoekwerk kan vanuit de literatuur over zakrekenmachientjes een pagina's lange opsomming gegeven worden met opmerkingen van de vele, uit verschillende landen afkomstige auteurs die alle het motivationele aspect benadrukken. Opvallend is dat een aantal auteurs vermelden dat de leerlingen na een jaar nog steeds gemotiveerd met de zakrekenmachines werken. Dit laatste kan toch onmogelijk op het conto van het nieuwheidseffect geschreven worden. Zou het zo kunnen zijn dat de geconstateerde hoogblijvende motivatie (wat dat ook precies mag zijn) evolueert van het nieuwheidseffect naast enthousiastmerende gedachten als: met dit apparaat kan ik in principe alle (cijfer)sommen oplossen?

Literatuur

[1] Carpenter, T.P., *Calculators in testing situations: results and implications from National Assessment*, The Arithmetic Teacher, 1981, 34-37.
[2] Moursund, D., *Calculators in the Classroom*, New York, 1981.
[3] Sweers, W., *Sommasjien*, Tilburg, 1981.
[4] Sissing, H., *Invloed van de zakrekenmachine op het oplossen van contextopgaven*, Willem Bartjens, 27-29.
[5] Treffers, A., *Basisalgoritmen in het wiskunde-onderwijs op de basisschool*, Pedagogische Studiën, 1982(59)471-483.
[6] Treffers, A. en E. de Moor, *10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde*, OW & OC, RU Utrecht, 1984.
[7] Zakariya, N. e.a., *The calculator in the classroom*, The Arithmetic Teacher, 1980, 12-16.
[8] Heege, H. ter, *De zakrekenmachine in de bovenbouw van de basisschool*, Enschede, 1985.
[9] Brink, F.J. van den, *Kritiek op het rekenen van een rekenautoriteit*, Willem Bartjens, 1985, 212-215.

Met dank aan Jan van den Brink, OW & OC.