Tafels die je niet uit je hoofd hoeft te leren

J. Speelpenning
SLO, Enschede

Samenvatting

Wat zie je en hoe zie je het?
Hoe weet je dat een plaatje een tafel voorstelt en nog wel met een vierkant blad? Wat voor aannames zitten daarachter? Allerlei voor de hand liggende vragen die de auteur tegenkwam toen hij een meetkundepakketje wilde ontwikkelen.

In dit artikel wil ik een paar lesbladen laten zien uit de experimentele versie van het meetkundepakket *'Vlak voorbij'* en er een paar opmerkingen bij maken. Maar vooraf iets anders.
Bij de ontwikkeling van dat pakketje stuitte ik op een aantal wiskundige/meetkundige problemen die mijn interesse in deze onderwerpen flink gestimuleerd hebben. Ogenschijnlijk triviale problemen die zeker geen triviale oplossing blijken te hebben – intrigerend voor de liefhebber, althans dat hoop ik.
Kijkt u mee?

fig. 1

Als u dit plaatje bekijkt dan zult u er waarschijnlijk geen moeite mee hebben te zien dat het:
a. waarschijnlijk een foto van een tafel is;
b. het blad van de tafel waarschijnlijk rechthoekig is, misschien wel vierkant;
c. de poten waarschijnlijk loodrecht staan op het tafelblad;
d. waarschijnlijk om een tafel*tje* gaat.

Ik denk dat het verrassend is te horen dat geen van deze punten a t/m d afleidbaar is uit figuur 1, de foto van het tafeltje.
Die foto bevat dus te weinig informatie voor keiharde zekerheid en dat ondanks het feit dat een foto toch zo ongeveer de meest exacte weergave vormt van het werkelijke, 3-dimensionale object. Deze 2-dimensionale afbeelding schiet kennelijk flink tekort als het gaat om toch elementaire informatie over het object. Hoe zit dat nou precies?

Waarschijnlijk heeft u de foto geïnterpreteerd als een foto van een tafeltje en met de punten b, c en d ingestemd als gevolg van het feit dat u er al van was uitgegaan dat het een tafeltje betreft.
Tafeltjes hebben nu eenmaal meestal geen niet-rechthoekig blad en de poten van een tafeltje staan daar nu eenmaal meestal loodrecht op. Het is verleidelijk te denken dat je die 'conclusies' kunt baseren op de foto; het blijkt gebaseerd op de interpretatie van de foto. Een wankele basis.

Dat het om een tafel gaat, conclusie a, is op zich geen wiskundige uitspraak, noch wiskundig te onderbouwen, zelfs niet als je een definitie van 'tafel' ter beschikking hebt. Ik zie niet goed hoe je van 'tafel' een wiskundig object kunt maken zonder bij de vastlegging daarvan weer een beroep te doen op andere niet-wiskundige objecten, begrippen of kwaliteiten.
Conclusie a hoort dan eigenlijk ook niet in het rijtje thuis, maar speelt een belangrijke rol als dubieuze a priori conclusie met gevolgen.

Laten we naar conclusie b kijken.
Het fotografische beeld van een rechthoek is een vierhoek of, eventueel, een lijnstuk als ontaarde vorm. Deze opmerking kun je niet omkeren: het is niet zo dat dan ook elke vierhoek het fotografische beeld van een rechthoek moet zijn. Het kan, maar meer ook niet. De afbeelding is, met andere woorden, niet eenduidig, geen bijectie.
Is er toch nog iets meer van te zeggen? Is elke vierhoek ook op te vatten als het fotografische beeld van een rechthoek? Anders gezegd, is het zo dat je, gegeven een vierhoek (V) altijd wel een gezichtspunt (G) kunt vinden en een rechthoek (R) zodat de foto uit G van R als resultaat een vierhoek oplevert die tenminste gelijkvormig is met V?
Laten we eens proberen, liefst met een flink onregelmatige vierhoek. Ziet u er een rechthoek in? Accepteert uw oog dat?

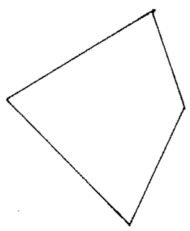


fig. 2

Als je fig. 2 zou willen opvatten als een fotografisch beeld van een rechthoek, dan moeten de overstaande zijden in werkelijkheid evenwijdig zijn, dus in de foto moeten de verlengden van de zijden een snijpunt hebben dat op de horizon ligt. Dat is altijd te tekenen.

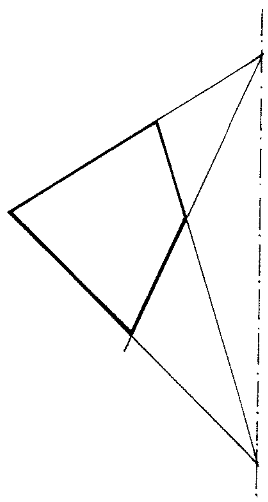


fig. 3a

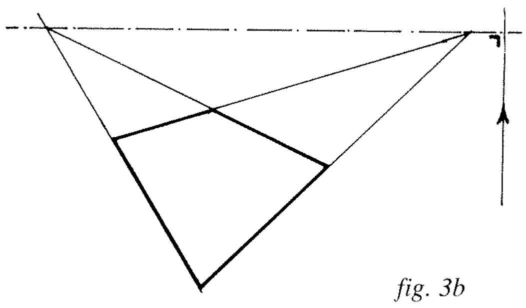


fig. 3b

Nu zie je ook hoe je naar het plaatje moet kijken, namelijk je moet de tekening zo houden dat de kijkrichting loodrecht op die geconstrueerde horizon staat. U zult er veel minder moeite mee hebben om in de vierhoek nu wel een rechthoek te zien; uw interpretatievermogen krijgt dat denk ik wel voor elkaar. Toch mag je dat – natuurlijk – niet als bewijs opvatten. Voor het oog zou het kunnen, maar is het oog een geschikte bewijzer?
Ik geloof dat ik een bewijs gevonden heb dat het inderdaad mogelijk is, maar het bewijs is ingewikkeld – te ingewikkeld – zeker om het hier te reproduceren. Ik vraag me dan ook af of er niet een eenvoudiger, inzichtelijker bewijs is, zonder gebruik te maken van allerlei vectoriële berekeningen.
Het frappeert me, zo'n eenvoudige vraag zou toch een eenvoudig bewijs moeten hebben, dan wel simpel tegenvoorbeeld...
Ook de gedachte dat het tafelblad loodrecht op de poten staat (conclusie c) is niet afleidbaar uit de informatie die de foto geeft.
Het krachtigste wat ik bewijzen kan is dat de poten evenwijdig zijn, en dat dan nog onder de vooronderstelling dat het tafelblad tenminste een parallellogram is. Als het tafelblad een parallellogram is dan kun je de horizon construeren. Als nu de verlengden van de tafelpoten elkaar in een punt snijden en als dat punt op de horizon ligt, dan mag je daaruit afleiden dat de poten evenwijdig zijn. Meer zit er hier niet in.
Uit de feitelijke evenwijdigheid op de foto zelf valt weinig te concluderen, als er al wat uit te concluderen valt.

Het verhaal wordt aanmerkelijk anders als er in de foto een vierhoek staat waarvan het gegeven is dat het in werkelijkheid een rechthoek (of vierkant) is.
Je kunt dan met zekerheid de horizon construeren, je kunt bij een willekeurige richting in de foto de richting vinden die daar loodrecht op staat (een nogal omslachtige constructie overigens) en je kunt iets over relatieve afmetingen zeggen t.o.v. de afmetingen van de rechthoek.
Het bewijs hiervan geef ik niet, maar laat ik graag aan uzelf over. Als u het volgende probleem kunt oplossen, dan ligt het bedoelde bewijs in het directe verlengde daarvan.

Stelt u zich voor dat u deze foto krijgt opgestuurd met de mededeling dat het een foto van een vierkante plaat van 1 bij 1 meter is met daarin een klein gaatje. Ziet u kans om die plaat na te maken, met het gaatje precies op de juiste plaats?

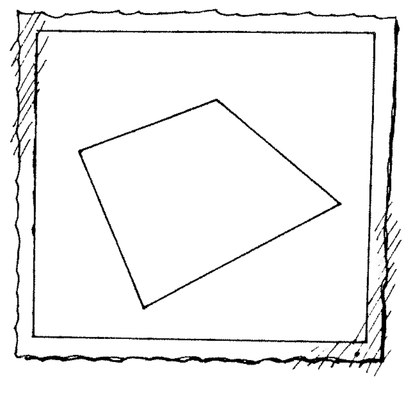
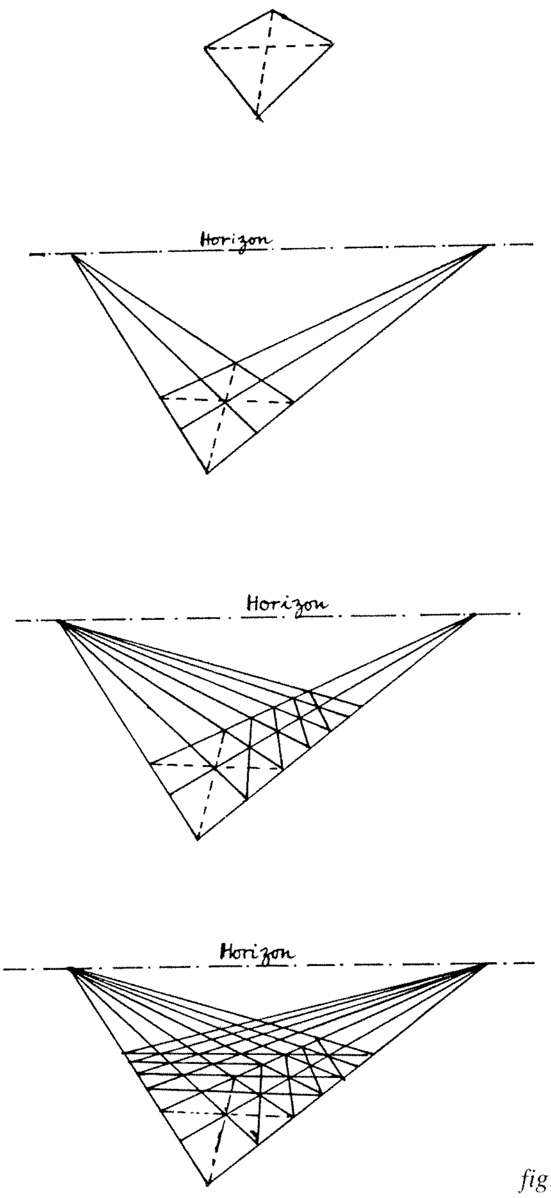


fig. 4

Kijken we, tenslotte , naar conclusie d.
Dat het over een tafeltje gaat is een opmerking die meer wiskundig getint is dan conclusie a, want er wordt wat gezegd over grootte. En dat heeft een wiskundig aspect. We stappen er maar even overheen of het überhaupt een tafel is.
Is er iets met enige zekerheid over de grootte te zeggen? Het tafeltje ziet er inderdaad klein uit, maar dat komt door het feit dat de foto vanuit een veel hoger perspectief (hoger dan het object) is genomen. Hoe hoog dat perspectief absoluut gezien was is niet te zeggen – is ook niet te reconstrueren. Misschien is het wel een foto van een gigantische tafel, genomen vanuit een helicopter. Wel is er iets te zeggen over de relatieve hoogte van het oog t.o.v. het tafeltje.
Om dat te zien is het nodig te weten hoe je van een vierkant (of rechthoek) perspectivisch gezien, tot een tegelvloer kunt komen en hoe je vierkanten (of rechthoeken) ook in de hoogte kunt voortzetten.
Onder de veronderstelling dat het tafeltje een rechthoekige zijkant heeft kun je de hoogte schatten. Figuur 5a t/m 5d en figuur 6 laten dat zien.



a
b
c
d
fig. 5

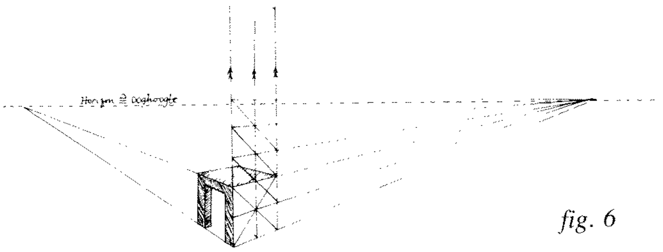


fig. 6

Uit figuur 6 is af te lezen dat het oog iets meer dan 2½ keer zo hoog staat als het tafeltje. Het kan nog exacter benaderd worden door kwart-hoge tafeltjes te construeren, maar dat heb ik voor de duidelijkheid van de tekening maar weggelaten.

Met deze uitweiding over de tafel heb ik een paar dingen willen bereiken.
Ten eerste is dit een voorbeeld van een onderwerp dat naar mijn idee een plaats moet krijgen in het wiskundeprogramma voor voortgezet onderwijs, mooi gezegd komt dat onderwerp neer op:
het *interpreteren van* en *reconstrueren van* informatie over een 3-dimensionaal object vanuit een 2-dimensionale weergave van dat object.
Dit geeft aanleiding tot allerlei activiteiten in de meetkundesfeer die te maken hebben met het letterlijk en figuurlijk in kaart brengen van de ons omringende omgeving en voorwerpen daaruit.
Er zijn nogal wat manieren waarop dat kan en waarop dat gedaan wordt:
- kaarten, plattegronden, bijv. van een winkelcentrum of museum;
- foto's en schetsen, bijv. satellietfoto's in verband met weersvoorspellingen;
- kartografie in de ruimste zin van het woord;
- woorden, bijv. een telefonische uitleg over hoe je vanaf het station op de Tweede Keteldwarsgracht moet komen;
- schematische tekeningen, bijv. als beschrijving van een bouwpakket van een stellingkast of van een modelbouwdoos;
- bouwplaten en beschrijvingen over de manier van in elkaar zetten, bijv. ladenkastjes van karton, kledingstukken;
- enz. enz.

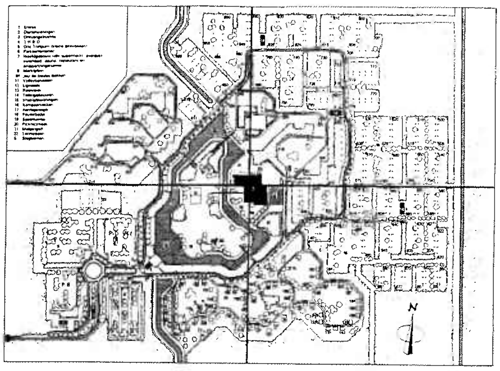
Centraal staat steeds bij zo'n manier de toegankelijkheid van de informatie en de reconstrueerbaarheid van data als criteria voor de keuze.
Ten tweede: meetkunde is leuk, niet triviaal en heeft relaties met het dagelijks leven.

De lesbladen

Tot slot enige opmerkingen over de lesbladen uit *'Vlak voorbij'*, een pakketje voor het eind van het tweede of begin van het derde leerjaar. Het zal niet moeilijk zijn de merites daarvan in het licht van het voorafgaande te zien.

Luchtfoto
Vooral de laatste vraag is wat ingewikkeld voor veel leerlingen, zeker als je enige nauwkeurigheid vraagt.

Luchtfoto



We hebben de afgelopen zomer onze vakantie in huisje 171 doorgebracht. We wilden dat huisje op de ansichtkaart aangeven. Helpen jullie even?

Op de plattegrond staan twee dikke lijnen: 

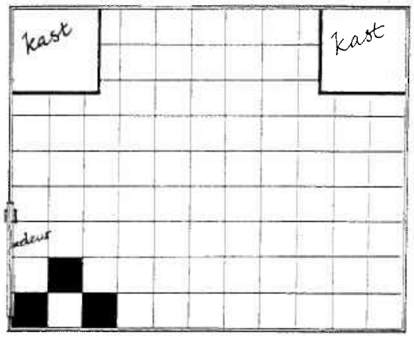
Tekenen jullie die ook op de ansichtkaart, in de juiste richting en op de goede plaats?

Proberen jullie ook eens uit te zoeken in welke richting de fotograaf keek toen hij de foto maakte. De 'pijl' op de plattegrond wijst het noorden aan.

Plattegrond

Hieronder zie je een foto van de kamer van Loes. Probeer op het ruitjespapier zo nauwkeurig mogelijk een plattegrond van die kamer te tekenen. De plaats van de kasten is al aangegeven, zorg je er zelf voor dat de plaats van de bedbank, de stoel, de tafel en het zwarte kussen op de plattegrond komen? De tegels op de grond zijn 25 cm in het vierkant.

Als je het handig vindt kun je de zwarte tegels eerst even een kleurtje geven; een paar zijn er al zwart gemaakt.



Het vergt een blikwisseling (letterlijk!) om op de gedachte te komen de kijkrichting van de fotograaf naar de plattegrond over te brengen. Veel leerlingen deden dat omgekeerd en kwamen niet veel verder dan 'hij keek naar het noord-westen'. Via de omgekeerde weg zou de richting veel exacter, tot op graden nauwkeurig, af te leiden zijn. Een verticale lijn over de foto gaat, bijvoorbeeld, door huisje 143 en 183. Die lijn, samenvallend met de kijkrichting van de fotograaf is gemakkelijk over te brengen op de plattegrond.

Plattegrond

Het tekenen van de plattegrond (in feite een soort onderaanzicht) wordt vergemakkelijkt door de structuur die de tegels geven. Daardoor is het mogelijk enigszins nauwkeurig afmetingen te bepalen en posities aan te geven. Impliciet komt aan de orde dat rechte lijnen recht blijven en dat hoeken in een foto meestal veranderen. Ook afmetingen ondergaan hetzelfde lot: die veranderen zelfs niet volgens een eenvoudige evenredigheid. Van leerlingen mag verwacht worden dat ze, om een voorbeeld te noemen, de linker voorpoot van het tafeltje tenminste in het goede kwart van de betreffende tegel tekenen.

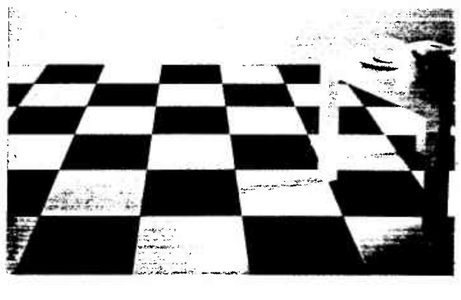
Tegelvloer

Het verlengen van de getekende lijnen is iets waar alle leerlingen vrijwel meteen op komen. Het hoofdprobleem zit 'm dan ook in het vinden van de ontbrekende lijnen. Sommige leerlingen tekenen de lijnen 'op het oog', gummen hier en daar nog wat en zijn klaar. Op zich is het oog hier nogal kritisch in; het neemt al snel waar of een getekende lijn ongeveer op de juiste plaats terecht gekomen is.

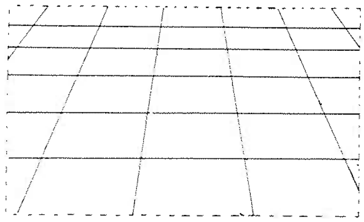
Tegelvloer

Op deze foto kun je goed zien dat dingen die ver van je vandaan zijn kleiner lijken dan ze in werkelijkheid zijn.
De tegels op de vloer zijn immers allemaal even groot en ze zijn alle vierkant. Op de foto zijn de tegels geen van alle vierkant en ook niet even groot.

Dit effect is een soort van gezichtsbedrog en wordt *perspectivische vertekening* genoemd.
Je kent dat effect wel als je naar een spoorbaan kijkt of naar een autoweg. Het lijkt alsof de (vang-)rails steeds dichterbij elkaar komen, maar dat is in werkelijkheid natuurlijk niet het geval.



Hieronder zijn de hoofdlijnen van de tegelvloer opnieuw getekend. De tafel is, voor de duidelijkheid, weggelaten.
Probeer zo nauwkeurig mogelijk nog een rijtje tegels aan alle kanten erbij te tekenen. Je hebt er alleen een scherp potlood en een liniaaltje bij nodig.



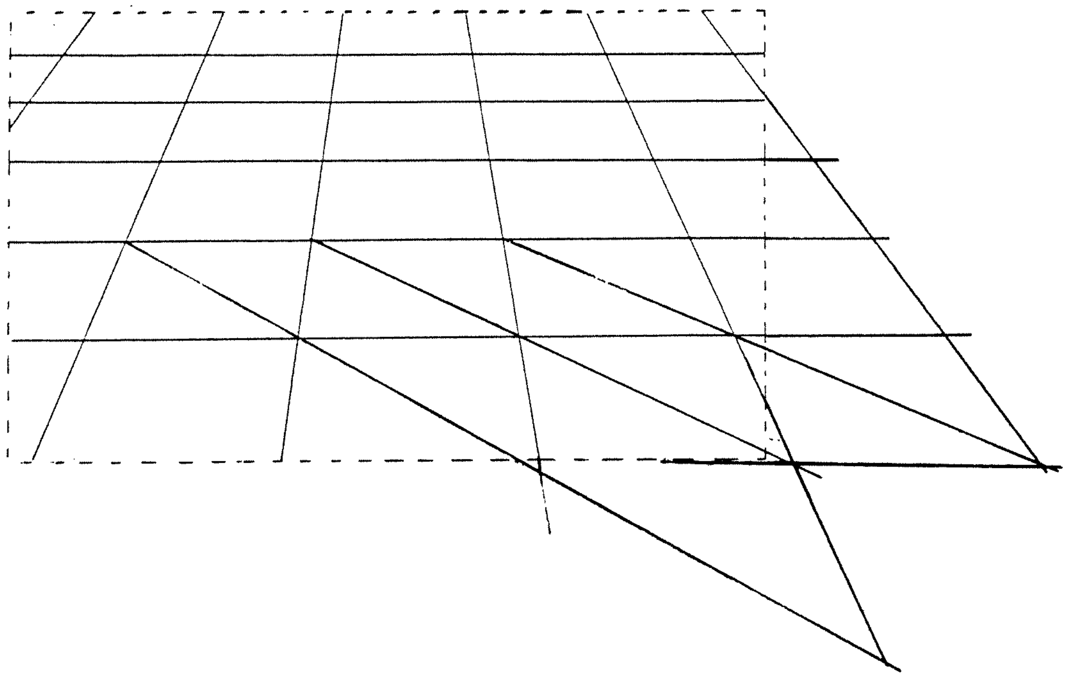


fig. 7

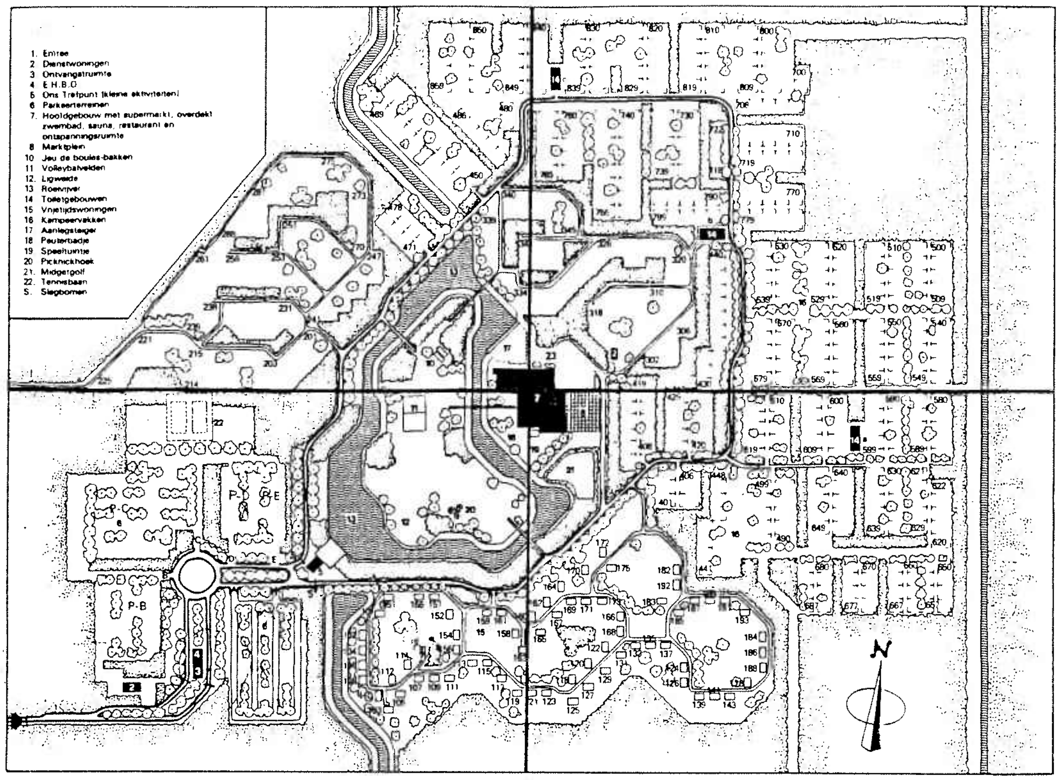
Aanschouwelijk van de juistheid is, voor sommige leerlingen, een krachtig middel en behoeft geen verdere constructie.
Anderen zoeken een 'getallige' regelmaat. De afstand tussen de horizontale lijnen neemt steeds ongeveer 3 mm af (weliswaar erg onnauwkeurig gemeten, maar toch...) en levert daarmee een regel om de ontbrekende horizontale lijnen te vinden.
De leerlingen in kwestie lieten zich niet gemakkelijk overtuigen van het foutieve van hun oplossing. "Ik heb het toch uitgerekend" was – in hun ogen – een ijzersterk argument.
De mooiste manier om de rijen tegels rondom te tekenen is gebruik te maken van de diagonalen van de (in werkelijkheid vierkante) tegels (zie fig. 7).

Hoewel niet veel leerlingen daar op eigen kracht toe zullen komen, was het opvallend dat velen de elegantie van deze methode wel ervaarden. Later bleek zelfs dat verschillende leerlingen er hele lappen tegelvloer bij construeerden, "omdat ik dat precieze geteken zo leuk vind."

Een aardige uitbreidingsvraag kan gericht zijn op het bepalen van de hoogte van het tafeltje. Die is, met tamelijk eenvoudige middelen, redelijk nauwkeurig te schatten.

En zo zijn we weer terug bij het tafeltje. En ook deze tafel hoef je niet uit je hoofd te leren.

Luchtfoto



We hebben de afgelopen zomer onze vakantie in huisje 171 doorgebracht. We wilden dat huisje op de ansichtkaart aangeven. Helpen jullie even?

Op de plattegrond staan twee dikke lijnen: 

Tekenen jullie die ook op de ansichtkaart, in de juiste richting en op de goede plaats?

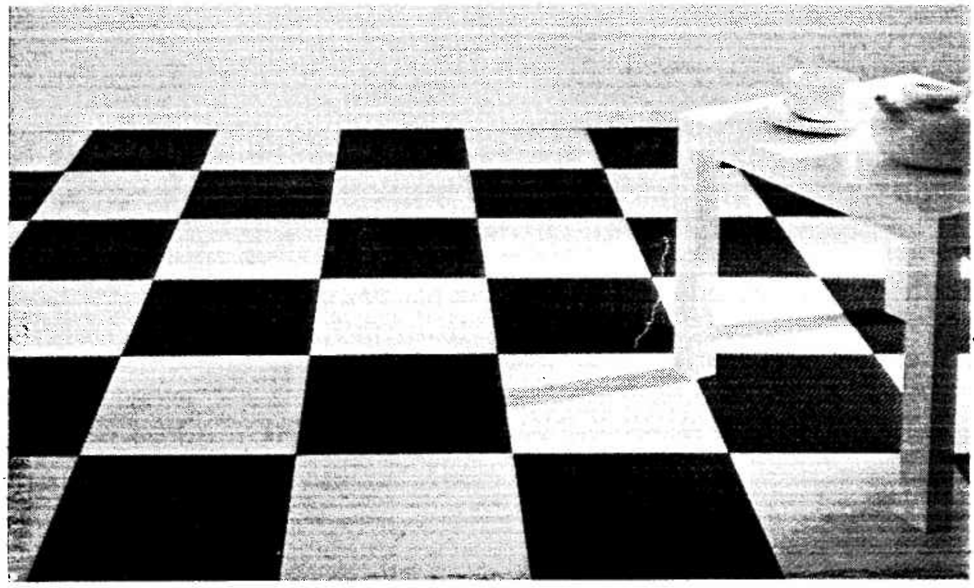
Proberen jullie ook eens uit te zoeken in welke richting de fotograaf keek toen hij de foto maakte. De ‘pijl’ op de plattegrond wijst het noorden aan.

Werkblad behorend bij artikel: Tafels die je niet uit je hoofd hoeft te leren.

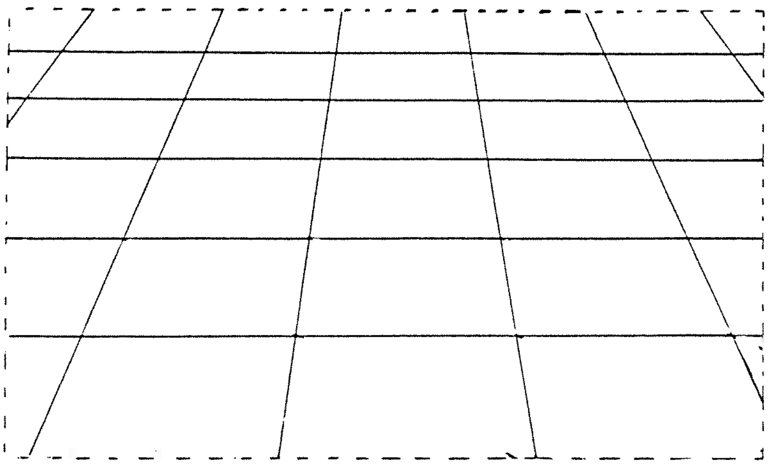
Tegelvloer

Op deze foto kun je goed zien dat dingen die ver van je vandaan zijn kleiner lijken dan ze in werkelijkheid zijn.
De tegels op de vloer zijn immers allemaal even groot en ze zijn alle vierkant. Op de foto zijn de tegels geen van alle vierkant en ook niet even groot.

Dit effect is een soort van gezichtsbedrog en wordt *perspectivische vertekening* genoemd.
Je kent dat effect wel als je naar een spoorbaan kijkt of naar een autoweg. Het lijkt alsof de (vang-)rails steeds dichterbij elkaar komen, maar dat is in werkelijkheid natuurlijk niet het geval.



Hieronder zijn de hoofdlijnen van de tegelvloer opnieuw getekend. De tafel is, voor de duidelijkheid, weggelaten.
Probeer zo nauwkeurig mogelijk nog een rijtje tegels aan alle kanten erbij te tekenen. Je hebt er alleen een scherp potlood en een liniaaltje bij nodig.



Werkblad behorend bij artikel: Tafels die je niet uit je hoofd hoeft te leren.

Plattegrond

Hieronder zie je een foto van de kamer van Loes. Probeer op het ruitjespapier zo nauwkeurig mogelijk een plattegrond van die kamer te tekenen. De plaats van de kasten is al aangegeven, zorg je er zelf voor dat de plaats van de bedbank, de stoel, de tafel en het zwarte kussen op de plattegrond komen? De tegels op de grond zijn 25 cm in het vierkant.

Als je het handig vindt kun je de zwarte tegels eerst even een kleurtje geven; een paar zijn er al zwart gemaakt.