Wiskunde A en het examen

H. van der Kooij
Strabrecht College, Geldrop

Samenvatting

Als docent van één van de 12 Hewet-experimenteerscholen geeft de heer Van der Kooij een kritische analyse van het examen wiskunde A, eerste tijdvak 1986. Hij concludeert dat het examen onvoldoende recht doet aan de doelen van wiskunde A en doet suggesties voor alternatieve vraagstellingen.

Het examen wiskunde A is weer achter de rug (voor onze school was het de tweede keer), de druk is van de ketel, de resultaten waren erg goed en dus zou ik een uiterst tevreden mens moeten zijn. Helaas is dat niet waar... en hoewel het tegenwoordig in is om je verdrietig te voelen in plaats van gewoon kwaad te zijn, neig ik in dit geval toch naar het laatste.
Naar mijn mening was het examen van 1986 (de eerste ronde) namelijk geen goed wiskunde A-examen. Voordat ik dit nader toelicht is het nodig om eerst kort aan te geven wat, volgens mij, de belangrijke aspecten van het vak wiskunde A zijn.

Mathematiseren

Het vak wiskunde A is oorspronkelijk opgezet om VWO-leerlingen, die een opleiding in één van de gamma-wetenschappen willen gaan volgen, een betere voorbereiding daarop te geven dan bij wiskunde I het geval is.
Natuurlijk spelen in deze wetenschappen, naast wiskundige technieken, zaken als de keuze van een wiskundig model en evaluatie van modeloplossingen een grote rol.
Wanneer er een label aan het vak wiskunde A gehangen zou moeten worden, waarop in het kort de essentie van het vak was omschreven, dan zou ik daar alleen het woord *'Mathematiseren'* op zetten.
Bij wiskunde A dienen aan de orde te komen belangrijke zaken die bij het mathematiseren een rol spelen, zoals:

- verschraling van de werkelijkheid om een wiskundig model op een praktijkprobleem te *kunnen* zetten;
- de keuze van het *soort* wiskundig model;
- wiskundige technieken, die binnen het gekozen model gebruikt kunnen worden om tot een modeloplossing te komen;
- terugvertalen naar de realiteit, met daaraan gekoppeld evaluatie;
- betrouwbaarheid van de gevonden oplossing (wat is bijvoorbeeld het effect van (kleine) variaties in de 'inputgetallen' op de uiteindelijke oplossing?);
- relativeren.

Essentieel bij al de genoemde punten is (de ontwikkeling van) een kritische houding.
Het HEWET-team heeft er met zijn inhoudelijke vulling van het vak wiskunde A voor gezorgd dat bovengenoemde aspecten van het mathematiseren stuk voor stuk ruimschoots aan bod (kunnen) komen.
Mathematiseren is niet iets dat je leerlingen in een paar lessen aanleert. In de loop van de tweejarige 'cursus' wiskunde A bemerk ik bij het overgrote deel van de leerlingen wel een forse groei op punten als kritische houding en zelfstandigheid bij het zoeken naar oplossingsstrategieën. Die groei wordt mogelijk gemaakt doordat in de boekjes wiskundige technieken en theorieën worden behandeld in een voortdurende blikwisseling met de toepassingen (werkelijkheid, reële problemen), waarbij de 'open' probleemstellingen ervoor zorgen dat de leerlingen van opgave tot opgave gedwongen worden om kritisch en goed bear-

gumenteerd te bepalen hoe ze te werk zullen gaan. Eindpunt van een boekje, waarin een bepaald wiskundig onderwerp aan de orde komt, is dan ook niet alleen maar het beheersen van een bepaalde techniek. Een leerling zal die techniek ook moeten kunnen hanteren binnen de context van een volledig nieuwe probleemsituatie.
Wanneer bij wiskunde A getoetst gaat worden (via 'gewone' proefwerken, werkstukken, schoolonderzoeken of examens) in hoeverre een leerling vaardig is in het mathematiseren, dan dienen in die toetsen in ieder geval de volgende aspecten aan de orde te komen:

- wiskundige technieken;
- het kiezen van een oplossingsstrategie;
- het kritisch en goed beargumenteerd beoordelen van uitspraken en situaties.

Met name de twee laatste aspecten vereisen een vraagstelling die zo open mogelijk is.
Naar deze maatstaven gemeten waren de zes eerste examens goede wiskunde A-examens. Mijn persoonlijke favorieten zijn de twee examens van 1984, hoewel ze in hun totaliteit te moeilijk waren. De opzet was echter prachtig: binnen één context meerdere (onderling zeer verschillende) wiskundige onderwerpen aan de orde stellen. En toen kwam dus het examen 1986, eerste ronde.

Het examen 1986, eerste ronde

Wanneer dit examen gezet wordt naast zijn voorgangers, dan valt meteen op dat de samenstellers ervan bij vrijwel alle onderdelen de leerling zeer precies aangeven *wat* ze moeten oplossen of uitrekenen (en daar is natuurlijk weinig op tegen), maar daarbij tevens ook heel precies aangeven *hoe* ze dat dienen te doen.
Dat laatste is volgens mij strijdig met een aantal doelstellingen van wiskunde A. Eigenlijk komen in dit examen bijna alleen maar de wiskundige- en rekentechnieken aan de orde.
Opgave 1 laat (als onderdeel (d) daarbij wordt meegeteld) drie functies aan de orde komen, die hoogstwaarschijnlijk met elkaar in verband gebracht kunnen worden. In het vraagstuk zoals het in het examen staat, worden ze echter nergens gekoppeld, zodat de vragen als los zand aan elkaar hangen.
Veel erger vind ik echter dat in de figuur bij opgave 1 een millimeterverdeling is aangebracht, die daar helemaal niet hoort. Naar het waarom kan slechts gegist worden. Vermoedelijk was het de behoefte om de coördinaten van het bij (a) gevraagde punt exact vast te pinnen. Veel leerlingen 'zagen' een grafiek met lineaire schaal. Een andere oorzaak voor de massaliteit van het antwoord $M = 50$, $O = 500$ kan ik eigenlijk niet verzinnen.
Opgave (1d) hoort, zonder vervolgvraag, niet thuis in een wiskunde A-examen. En als er een vervolgvraag op zou komen, dan dienen voor zo'n grafiek zeker geen zes punten te worden toegekend!
Over gesloten vraagstellingen gesproken: Wanneer een leerling de grafiek moet tekenen van 'T als functie van M' dan zou nog de fout gemaakt kunnen worden dat T op de horizontale as terecht komt i.p.v. op de verticale as. Door het bijgeleverde grafiekenpapier was dat echter onmogelijk, omdat de getallen behorend bij M niet op de verticale as pasten.
Opgave 2 vind ik een erg gesloten vraagstuk.
Als het doel van dit vraagstuk is: het oplossen van een LP-probleem, dan is vraag (c) een vervelende vraag, want de oplossing bij (d) hoeft echt niet bepaald te worden door van alle 12 hoekpunten de bijbehorende kosten uit te rekenen.
Gelukkig hebben lang niet alle leerlingen deze geestdodende weg gevolgd. Een groot aantal heeft zich bij het bepalen van de minimale kosten laten inspireren door de kostenfunctie $TK = 1570 - 2x - y + 4z$.
Opgave 3 is een standaardvraagstuk op kansrekening en statistiek. Alleen onderdeel (d) vroeg van de leerling een eigen beslissing bij de keuze van een oplossingsstrategie. Dit onderdeel vond ik de enige open vraag uit het examen!
Opgave 4 is gevarieerd van opzet. Het behandelt modellen, die nieuw zijn voor de leerling. Zo vind ik het leuk dat de pogingen om bij de modellen een graaf te maken, mislukken.
In de vraagstellingen wordt echter niets gedaan met het verschil tussen de twee modellen. De probleemstellingen bij opgave (b) en (c) zijn ergerlijk besloten:
Maak een formule en los op ...
Druk I uit in V en Z en teken ...
Verder vind ik de onderdelen (d) en (e) te simpel om in een examen op te nemen. Als getest dient te worden of leerlingen met structuurschema's uit de voeten kunnen, dan kunnen er wel andere vragen over gesteld worden.
Het afronden op een aantal decimalen is een zaak die binnen de wiskunde A-pakketten nergens expliciet aan de orde wordt gesteld. Dat is ook helemaal niet nodig. De context van een probleem bepaalt op een min of meer natuurlijke wijze de vereiste exactheid van de oplossing.

Het examen eist bij zes onderdelen een antwoord in een bepaald aantal decimalen nauwkeurig. In zeker 4 van de 6 gevallen is dat bij het gegeven probleem absoluut onzinnig. Het niet voldoen aan die onzinnige eis kost de leerling echter wel elke keer een punt.
Zonder nu verder detaillistisch in te gaan op het examen, wil ik van het geheel nog opmerken dat het een bijzonder gesloten werk was, waarin de leerlingen werden vastgepind op één (meestal) precies aangegeven oplossingsstrategie.

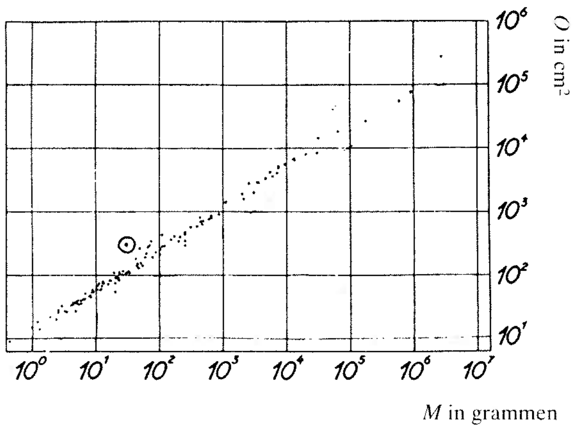
Hoe het ook had gekund

Kritiek geven zonder iets te zeggen over alternatieven, is natuurlijk een wat goedkope manier van doen. Daarom heb ik geprobeerd om op de gegeven contexten òfwel de vraagstelling wat te veranderen, waardoor er een open vraag ontstaat, òfwel andere vragen te verzinnen. De tijd die ik daarvoor heb uitgetrokken was beperkt, terwijl ik ook bewust geprobeerd heb zo dicht mogelijk bij de oorspronkelijke vragen te blijven.
Mijn doel was niet het presenteren van het ideale wiskunde A-examen. Wel hoop ik dat uit mijn aanpassingen duidelijk wordt in welke richting ik denk, als het wiskunde A-examen voor mijn geestesoog verschijnt.

Opgave 3 heb ik gelaten voor wat hij was. Enerzijds omdat ik niet zo snel redelijke alternatieven zag, anderzijds omdat het toch een tamelijk gevarieerd vraagstuk was. Vanwege zijn vertrouwd aandoende uiterlijk zou ik hem wel als eerste vraagstuk in mijn examen hebben geplaatst.

Opgave 1

Van veel diersoorten is bekend wat het gemiddelde lichaamsgewicht en de gemiddelde huidoppervlakte O is. Op het werkblad zie je voor een aantal diersoorten de waarden van O en M uitgezet in een grafiek.



a) Eén van de punten in de grafiek is omcirkeld. Bepaal van de bij dat punt behorende diersoort het lichaamsgewicht en de huidoppervlakte.

b) De punten in de grafiek liggen bij benadering op een rechte lijn. Laat zien dat het verband tussen O en M voor de verschillende diersoorten goed benaderd kan worden met de formule
$O = 12{,}6\, M^{2/3}$

c) Vanuit de betekenis van O en M is te beredeneren dat de exponent van M in de bovenstaande formule $2/3$ moet zijn. Doe dat.

Zoogdieren hebben allemaal ongeveer dezelfde lichaamstemperatuur.
De formule die het verband aangeeft tussen M (in grammen) en de energie P, die nodig is om de temperatuur op peil te houden, is:
$P = 0{,}017M^{0,75}$.
Eén liter zuurstof per minuut komt overeen met 350 eenheden energie.

d) Een bepaalde diersoort verbruikt per uur ongeveer 12,5 liter zuurstof. Welk gewicht heeft die diersoort?

Natuurlijk is de hoeveelheid energie die nodig is voor het op temperatuur houden van het lichaam, afhankelijk van de huidoppervlakte. Warmteverlies treedt op door de huid.

e) Ga na of de volgende uitspraak in overeenstemming is met de formules:
'Een grotere huidoppervlakte vereist meer energie per cm^2 huidoppervlakte dan een kleinere'.

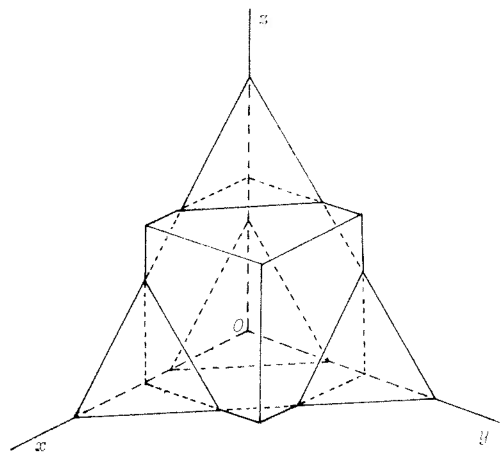
Opgave 2

Na de kostenmatrix verder met:
Stel dat er vanuit magazijn I x videorecorders naar filiaal A, y naar B en z naar C worden vervoerd.

a) Welke aantallen recorders worden dan (uitgedrukt in x, y en z) vervoerd vanuit I naar D en vanuit II naar A, B, C en D?

b) Wat zijn de totale vervoerskosten, uitgedrukt in x, y en z?

c) Wat zijn de beperkende voorwaarden, die het toegestane gebied afbakenen?
Op het werkblad zijn de acht grensvlakken van het toegestane gebied getekend.



d) Geef in de figuur op het werkblad aan welke punten hoekpunten zijn van het toegestane gebied.
Natuurlijk is de bedrijfsleiding erop uit om de vervoerskosten te minimaliseren.

e) Bepaal de minimale totale vervoerskosten.
Een slimme werknemer van het warenhuis bedenkt dat de vervoerskosten nog verder omlaag kunnen als de 120 recorders in een andere verhouding dan 50 : 70 over de twee magazijnen verdeeld waren geweest.

f) Ga na hoe de 120 recorders over de twee magazijnen moeten zijn verdeeld om de laagst mogelijke vervoerskosten te krijgen.
Zijn er meerdere verdelingen mogelijk?

Opgave 4

Tot aan 'Het verloop van ...' gelijk aan de officiële examentekst. Dan:

a) Bepaal een matrix van de vorm:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} V & Z & I \end{array} \\ \begin{array}{c} V \\ Z \\ I \end{array} & \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \end{array}$$

waarmee het verloop van de epidemie kan worden beschreven. Beargumenteer de keuze van je getallen.

b) In dit model neemt het aantal zieken van week tot week af. Na hoeveel weken zijn er volgens dit model voor het eerst minder dan 100 zieken?

Het hierboven beschreven model beantwoordt niet aan de praktijk, omdat bij een epidemie er meestal eerst een periode is, waarin sprake is van toename van het aantal zieken. Pas in een latere fase begint het aantal zieken dan weer te dalen.

Een ander model dat hiermee wel rekening houdt, is:

$V_{t+1} = (1 - 0{,}00004 \cdot Z_t) \cdot V_t$
$Z_{t+1} = (0{,}85 + 0{,}00004 \cdot V_t) \cdot Z_t$
$I_{t+1}\ I_t + 0{,}15 \cdot Z_t$

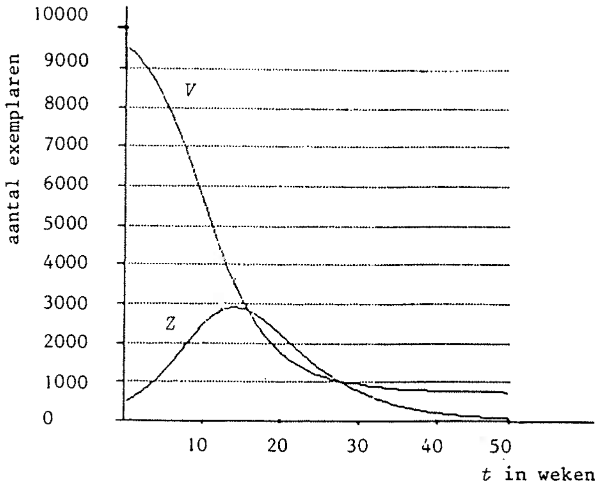
Hierin stellen V_t, Z_t en I_t de aantallen vatbaren, zieken en immunen voor na t weken, terwijl de index t + 1 de aantallen van een week later aangeven.

Ook nu gaan we uit van 9500 vatbaren, 500 zieken en 0 immunen op tijdstip t = 0.

c) Beredeneer dat bij dit model het aantal zieken eerst toeneemt en in een latere fase gaat afnemen.

Met behulp van een computer zijn voor t = 1 tot en met t = 50 de aantallen vatbare, zieke en immune exemplaren berekend. In de figuur op het werkblad zijn de grafieken van V en Z als functie van t getekend, op basis van de computeruitvoer.

d) Teken, uitgaande van deze figuur, de grafiek van I als functie van t.



e) Het aantal vatbare exemplaren dat aanwezig is op het moment dat het aantal zieken maximaal is, kan exact uitgerekend worden. Doe dat.