Rekening houden met een rekentabel

H.B. Verhage
OW & OC, R.U. Utrecht

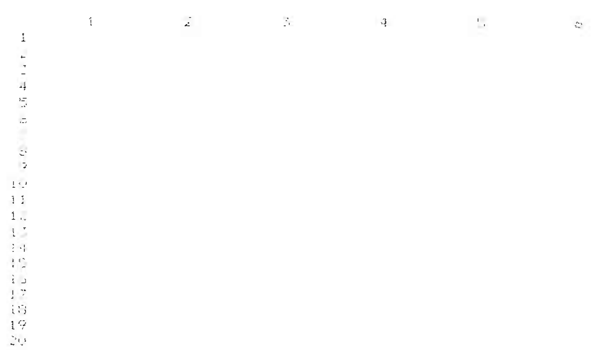
Samenvatting

In dit artikel wordt met enkele klasse-ervaringen als uitgangspunt ingegaan op de mogelijkheden van een rekentabel (spreadsheet) voor het wiskundeonderwijs.

Voor het bedrijfsleven wordt software ontwikkeld om te gebruiken, voor het onderwijs wordt software ontwikkeld om (vul maar in) iets van/mee/door te leren. Maar misschien kan het onderwijs wat leren van de software die in het bedrijfsleven gebruikt wordt. En dan bedoel ik niet alleen dat de leerlingen bij het vak dat vroeger Burgerinformatica heette moeten leren werken met applicatieprogramma's voor o.a. tekstverwerking en bestanden omdat ze die in hun buitenschoolse leven tegen zullen komen. In het kader van de sociale redzaamheid is dit natuurlijk heel nuttig, net als het spoorboekje kunnen lezen, auto kunnen rijden en pannekoeken kunnen bakken.
Wat ik vooral bedoel is de optiek van waaruit software voor het bedrijfsleven ontwikkeld wordt. Het gaat daarbij steeds om het ontwikkelen van een stuk gereedschap dat breed inzetbaar is, waarmee een hele groep van taken geautomatiseerd kan worden. Voorbeelden van zulke gereedschappen zijn tekstverwerkingsprogramma's en bestandsprogramma's. Vermoedelijk is het onderwijs ook meer gediend met enkele inzetbare programma's dan met de vele honderden kleine programmaatjes zoals die er nu al zijn.
Een voorbeeld van een breed inzetbaar programma dat veel in het bedrijfsleven gebruikt wordt en dat weleens van grote betekenis zou kunnen zijn voor het onderwijs, is een zogenaamde *spreadsheet*. Een Nederlandse vertaling van spreadsheet kom je zelden tegen, maar in het Duits noemen ze zo'n programma een *Tabellenkalkulationsprogramme*. Een geschikt Nederlands woord lijkt me: *rekentabel.*
Deze programma's worden in het bedrijfsleven voornamelijk gebruikt om financiële calculaties uit te voeren. Er zijn heel wat van dit soort programma's op de markt en een van de bekendste van dit moment is MULTIPLAN, o.a. beschikbaar voor IBM PC en Macintosh.
In de volgende paragraaf wordt beschreven hoe MULTIPLAN werkt en in de paragrafen die daarna komen wordt ingegaan op enkele ervaringen die in de klas met een rekentabel zijn opgedaan. Tenslotte wordt dit artikel afgesloten met twee voorbeelden van hoe een rekentabel bij wiskunde-A-achtige problemen gebruikt zou kunnen worden.

Hoe Multiplan werkt

Een rekentabel is een computerprogramma waarmee gerekend kan worden. Nadat het programma gestart is, presenteert het zich aan de gebruiker op het beeldscherm als een grote matrix waarvan een klein stukje zichtbaar is.



De cellen van de matrix kunnen door de gebruiker worden gevuld met tekst, getallen en formules. Bij het maken van formules kan verwezen worden naar andere cellen.
De cellen worden aangeduid met een rijnummer en een kolomnummer, zo is R1C1 de cel links bovenaan.

	1	2
1		
2		1
3		2
4		3

In deze figuur zijn in de cellen R2C2 en R3C2 resp. de getallen 1 en 2 geplaatst. Door nu in de cel R4C2 de formule R[−2]C + R[−1]C te zetten kunnen we constateren dat ook in het computertijdperk 1+2 nog steeds 3 is.
Een aanduiding als R[−2]C heet een *relatieve verwijzing*: in dit geval wordt verwezen naar de cel die twee rijen eerder (R[−2]) in dezelfde kolom (C) staat.
Tot dusver is het resultaat niet spectaculair, maar nu komt het: met een kopieer-opdracht is het mogelijk de formule uit R4C2 naar de 10 of 20 of 100 cellen daaronder te copiëren.

formules	*resultaat*
1	1
2	2
R[-2]C+R[-1]C	3
R[-2]C+R[-1]C	5
R[-2]C+R[-1]C	8
R[-2]C+R[-1]C	13
R[-2]C+R[-1]C	21
R[-2]C+R[-1]C	34
R[-2]C+R[-1]C	55
R[-2]C+R[-1]C	89
R[-2]C+R[-1]C	144
R[-2]C+R[-1]C	233
R[-2]C+R[-1]C	377
R[-2]C+R[-1]C	610
R[-2]C+R[-1]C	987

En zo groeit een eenvoudige optelling met een simpele druk op de knop uit tot een indrukwekkende reeks die sommigen zelfs aan konijnen doet denken.
Als in een van de cellen R2C2 of R3C2 een ander getal wordt gezet, wordt de tabel razend snel opnieuw doorgerekend en alle cellen die afhangen van de cel waarin iets veranderd werd, krijgen een nieuwe waarde.

Met dit voorbeeld is eigenlijk alles over het principe van een rekentabel gezegd. Zoals al eerder is opgemerkt zijn er vele verschillende tekentabellen op de markt, die nogal verschillen in mogelijkheden. De basisprincipes zijn echter steeds gelijk: de cellen van een tabel kunnen gevuld worden met getallen en formules, in formules kan verwezen worden naar andere cellen, veranderingen worden onmiddellijk doorgerekend.
Om zelf met zo'n programma te werken vraagt wat oefening, maar moeilijk is het zeker niet. De ervaring (zowel met leraren als met leerlingen) heeft uitgewezen dat men na twee à drie uurtjes werken de hoofdzaken wel onder de knie kan hebben. Een computertaal leer je zo snel niet, en dat terwijl een heleboel eenvoudige programmeeropdrachten waarbij wat gerekend moet worden uitstekend met behulp van een rekentabel opgelost kunnen worden.

De eerste ervaringen met leerlingen

De ervaringen met leerlingen zijn opgedaan in een 5 VWO wiskunde A-klas van het St. Ignatius college te Purmerend. De leerlingen hebben gewerkt met een eenvoudige rekentabel voor de BBC-computer. Door de eenvoud van het programma is het aantal commando's dat de leerlingen moeten leren gebruiken niet zo groot. Het nadeel van een eenvoudig programma kan zijn dat het in een later stadium toch te veel beperkingen heeft.

Om het voor de lezer niet te ingewikkeld te maken, is in het onderstaande de notatie van Multiplan aangehouden. In werkelijkheid werd in de rekentabel waar de leerlingen mee werkten een andere notatie gebruikt.
Belangrijk bij het leren werken met een rekentabel is het zien van het onderscheid tussen een getal en een formule.
Het volgende lesfragment geeft daar een voorbeeld van:

Marja en Mirjam werken de instructie "Leren werken met een Rekentabel" door. Ze zijn ongeveer een half uur bezig. Op het beeldscherm staat een kolom die er zó uitziet:

verdubbel
3
6
12
24
48
96
192

Deze kolom maakt deel uit van een tabel die bij de instructie hoort en die ze niet zelf hebben hoeven maken.
De opdracht luidt om in de cel waar nu een 3 staat een ander getal te plaatsen en te kijken wat er gebeurt.
Door een vergissing wissen ze echter de cel met de 12.
Ik vraag of ze de tabel kunnen herstellen.
Ze typen een 12 in de bewuste cel en de tabel ziet er ogenschijnlijk net zo uit als voorheen.
Terug naar de opdracht: het eerste getal veranderen.

verdubbel	verdubbel	verdubbel	verdubbel
2	2	4	4
4	4	8	8
12	8	8	16
24	16	16	32
28	32	32	64
96	64	64	128
192	128	128	256
a	b	c	d

Ze veranderen de 3 in een 2 (zie figuur a).
Als ik vraag wat je moet doen om de kolom goed te krijgen, veranderen ze de 12 in een 8 (zie figuur b).
Op mijn vraag om het eerste getal nog eens te veranderen, zetten ze een 4 in de cel waar eerst een 2 stond (zie figuur c).
En om ook het tweede stuk goed te krijgen veranderen ze de tweede 8 in een 16 (zie figuur d).
De vraag hoe je nu in een keer de hele lijst goed kunt krijgen is in dit stadium nog te lastig, maar als ik ze de hint geef om eens te kijken welke formule er in de onderste cellen staat luidt het antwoord: Twee keer de vorige.
Dat is precies waar het om gaat en het kost dan ook niet veel moeite meer om de kolom in z'n geheel opnieuw te maken.

```
"verdubbel"

4
2*R[-1]C
2*R[-1]C
2*R[-1]C
2*R[-1]C
2*R[-1]C
2*R[-1]C
```

Voorkennis en motivatie

De voorkennis van de leerlingen op het gebied van computers was heel wisselend. Sommige leerlingen (voornamelijk meisjes) hadden vrijwel nog nooit een computer aangeraakt, andere (meest jongens) hadden thuis een eigen computer. Een leerling had weleens met een rekentabel gewerkt.
Omdat de rekentabel voor vrijwel alle leerlingen nieuw was, had de aanwezige voorkennis veel minder invloed dan bijvoorbeeld bij een inleiding in BASIC programmeren het geval is. Wat wel opviel was dat de leerlingen zonder computerervaring in het algemeen veel rustiger en preciezer werkten dan de leerlingen met computerervaring. Van de laatsten waren er enkele die nogal wat opdrachten oversloegen, waardoor ze verderop toch in de problemen kwamen.
Enkele lessen later, toen de rekentabel gebruikt moest worden bij een optimaliseringsprobleem (waarover verderop meer) bleken er verschillen in routine te zijn: de leerlingen met computerervaring die de inleiding goed hadden doorgewerkt, hadden al voldoende routine om vlot met de commando's van de tabel te kunnen omgaan. Bovendien hadden deze leerlingen de manier van denken die bij zo'n tabel hoort goed in de gaten. Bij de leerlingen zonder computerervaring bleek dat een en ander nog niet volledig was bezonken.
Enkele jongens met computervaring waren zo nu en dan nogal overheersend, soms ten koste van anderen. Het gebeurde diverse malen dat een jongen indruk probeerde te maken (meestal op meisjes zonder computerervaring) door een kunstje te vertonen.
Dat gebeurde bijvoorbeeld zo:

Twee meisjes zijn bezig zelf een rekentabel op te bouwen. Een jongen komt langs en drukt op de BREAK-toets van de computer waar de meisjes aan werken. Hij typt in razend tempo een programma van een paar regels in, waarna op het beelscherm een flitsend lijnenspel verschijnt.
De meisjes kunnen zo snel niet volgen wat er allemaal gebeurt en ze beseffen nog niet dat ze de tabel die ze aan het opbouwen waren kwijt zijn geraakt door de druk op de BREAK-toets. Als ze daar wel achter komen, beginnen ze zonder boos te worden overnieuw.

Er wordt vaak beweerd dat het werken met een computer motiverend is voor de leerlingen. Als dit betekent dat het *apparaat* de leerlingen motiveert in plaats van de opdracht waar ze mee bezig zijn, hoeft dit niet altijd een voordeel te zijn.
Wat te denken van de jongens die het computerlokaal binnenstormen, o.a. een modem zien staan en een briefje met een telefoonnummer zien liggen, onmiddellijk het nummer overschrijven en roepen *Dat gaan we kraken?* Het telefoonnummer blijkt het nummer van een leverancier te zijn.
Als leerlingen het leuk vinden om met de computer te werken en ze hebben geen zin om tot de orde van de dag over te gaan, dan kan het zijn dat de computer als *excuus* aangevoerd wordt: *hier leren we toch ook van.* Hetzelfde geldt als de leerlingen iets anders op de computer doen dan de bedoeling was: *dit is toch ook wiskunde.*
Uiteindelijk zal de motivatie voor de wiskundeles toch in de eerste plaats gezocht moeten worden in de wiskunde die aangeboden wordt en niet in de hulpmiddelen die daarbij gebruikt worden.

Rekentabel en variabele

In het HEWET-boekje Differentiëren II staan enkele optimaliseringsproblemen die in eerste instantie met behulp van de computer opgelost moeten worden. (Zie volgende pagina.)
Bij opgave 43 wordt van de leerlingen gevraagd een computerprogramma te maken, dit te verwerken en zo de optimale situatie te vinden.
De didactische bedoeling van de computer is hier, dat de leerlingen gedwongen worden (tussen)-variabelen te kiezen en zo stapsgewijs een functie op te bouwen. In een later stadium wordt dan ingegaan op de mogelijkheid om met behulp van differentiaalrekening de optimale oplossing te bepalen.
Om de leerlingen op het goede spoor te zetten wordt bij de eerste opgave een structuurdiagram gegeven, dat zich eenvoudig in bijv. Basic laat vertalen.

Opgaven

41 In een fabriek werken aan een lopende band 40 mensen, die onderdelen klaarmaken voor elektronische apparatuur.
De gemiddelde dagproduktie per man/vrouw is 100 onderdelen. De bedrijfsleider wil de totale produktie opvoeren en extra personeel aantrekken. Het effect van meer mensen aan de lopende band is echter dat de gemiddelde produktie per man/vrouw terugloopt. De bedrijfsleider vermoedt op grond van zijn ervaringen, dat iedere man/vrouw extra de gemiddelde dagproduktie met twee onderdelen doet verminderen. Als hij dus 43 mensen laat werken aan de lopende band is de gemiddelde dagproduktie 94 onderdelen.
Ga bij beantwoording van de volgende vragen ervan uit dat de bedrijfsleider 'goed zit' met zijn schatting.

a Vergelijk de totale dagproduktie van 40 mensen met de totale produktie van 43 mensen aan de lopende band.
b Je ziet dat bij een toename van 40 naar 43 mensen de totale produktie is gestegen. Neemt de bedrijfsleider echter veel meer mensen in dienst, bijvoorbeeld 60, dan loopt de totale produktie terug door de sterke daling van de individuele produkties.
Hoe groot is de totale produktie van 60 mensen?

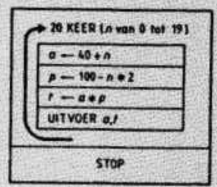
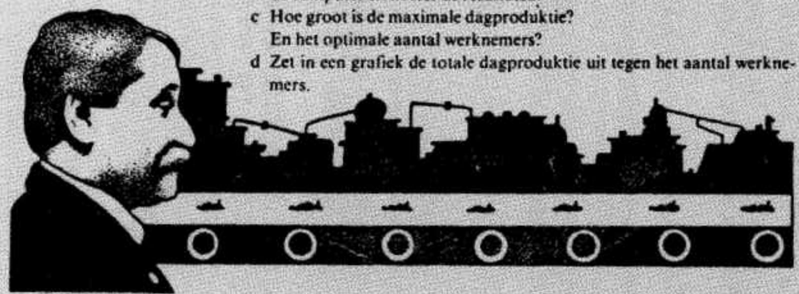


Fig. 28

Bij zo'n probleem (als in opgave 41), waarbij we aanvankelijk een stijging van de totale produktie hebben maar later een daling, kun je een *optimale* situatie verwachten, waarbij de totale produktie *maximaal* is.
Voor het berekenen in dit maximum en het bijbehorende optimale aantal werknemers, schakelen we de computer in.
We laten de totale produktie berekenen voor 40, 41, 42, ... 59 werknemers.
In fig. 28 zie je een structuurdiagram voor deze berekening.

Opgave

42 a Wat stellen de variabelen n, a, p, t in het structuurdiagram voor?
b Maak een programma bij dit structuurdiagram, laat dit verwerken door de computer en noteer de resultaten.
c Hoe groot is de maximale dagproduktie?
En het optimale aantal werknemers?
d Zet in een grafiek de totale dagproduktie uit tegen het aantal werknemers.



We laten nu nog een aantal optimaliseringsproblemen volgen.

Opgaven

43 Een sportclub reserveert een bus om de leden naar een toernooi te vervoeren. De busmaatschappij ALHATO ('als haringen in een ton') rekent het volgende tarief:
- bij het voorgeschreven aantal passagiers (30) is de prijs per passagier ƒ15,-;
- als er meer passagiers mee willen zal ALHATO een oogje dichtknijpen en de volgende prijzen berekenen:

aantal	prijs
31	ƒ14,75
32	ƒ14,50
33	ƒ14,25
...	...

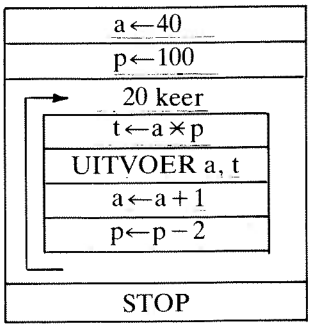
kortom, elke passagier meer doet de prijs met ƒ0,25 zakken.
Er mogen niet meer dan 50 passagiers mee, zodat de prijs per passagier minstens ƒ10,- zal bedragen.

a Bereken het totale bedrag dat ALHATO incasseert als er resp. 30, 40 en 50 passagiers meegaan.
b Maak een structuurdiagram en een computerprogramma voor de berekening van het totale bedrag dat ALHATO ontvangt bij 30, 31, 32,..., 50 passagiers.
c Welk aantal passagiers is voor ALHATO het gunstigst?

44 Een supermarkt verkoopt potjes vruchtenyoghurt (inhoud ½ liter) tegen de prijs van ƒ1,90.
Er worden wekelijks zo'n 500 van die potjes verkocht. Dat betekent dus een opbrengst van ƒ950,-.
De bedrijfsleider schat dat elk dubbeltje prijsverlaging tot gevolg heeft dat er 100 potjes meer worden verkocht. De inkoopprijs is ƒ1,- per potje.
Ga er bij het maken van de volgende opdrachten vanuit dat de schatting van de bedrijfsleider goed is.

a Hoeveel potjes yoghurt zullen er worden verkocht als deze tegen inkoopprijs weggaan? Welke opbrengst levert dat op?
b Maak een computerprogramma voor het berekenen van de week-opbrengst van de potjes yoghurt voor de prijzen ƒ1,90; ƒ1,80; ..., ƒ1,-.
c Dezelfde opdracht voor de totale winst per week.
d Teken grafieken van resp. de opbrengst (per week) en de winst (per week) als functie van de prijs.
e Welke prijs zou je de bedrijfsleider willen adviseren?

Door dit diagram is de keus van de variabelen op voorhand al vastgelegd. En dat is maar goed ook, want wie bij deze opgave een computerprogramma zou maken zonder de aanwijzingen van dit diagram, zou het vermoedelijk anders doen, nl. zo:



Vanuit programmeeroogpunt een veel natuurlijker aanpak, alleen geen aanpak die de auteur van de opgave, gezien zijn didactische bedoelingen, goed uitkwam.
Leerlingen zijn echter heel flexibel, als ze op het spoor gezet worden van a ← 40 + n (n = 1 .. 20) dan zijn ze best bereid om bij de opgaven die erna komen dezelfde aanpak te volgen. Hierdoor kan het doel, inzicht krijgen in het opbouwen van een formule en het gebruik van tussenvariabelen daarbij, toch bereikt worden.

Als bij een opgave als deze een rekentabel gebruikt wordt, komt het verschil tussen de beide aanpakken nog sterker naar voren.
Op een bijeenkomst voor leraren werd als voorbeeld van computergebruik bij wiskunde A opgave 43 uit hetzelfde hoofdstuk met een rekentabel uitgewerkt.

Hier werd deze tabel bijgemaakt:

ALHATO

aantal	prijs	bedrag
30	15	450
31	14.75	457.25
32	14.5	464
33	14.25	470.25
34	14	476
35	13.75	481.25
36	13.5	486
37	13.25	490.25
38	13	494
39	12.75	497.25
40	12.5	500
41	12.25	502.25
42	12	504
43	11.75	505.25
44	11.5	506
45	11.25	506.25
46	11	506
47	10.75	505.25
48	10.5	504
49	10.25	502.25
50	10	500

met de achterliggende formules:

```
                       "*ALHATO*"
"aantal"               "  prijs"               "  bedrag"
30                     15                      RC[-2]*RC[-1]
R[-1]C+1               R[-1]C-0.25             RC[-2]*RC[-1]
R[-1]C+1               R[-1]C-0.25             RC[-2]*RC[-1]
R[-1]C+1               R[-1]C-0.25             RC[-2]*RC[-1]
   .                      .                       .
   .                      .                       .
   .                      .                       .
   .                      .                       .
   .                      .                       .
R[-1]C+1               R[-1]C-0.25             RC[-2]*RC[-1]
```

Een van de aanwezige leraren merkte op dat het wiskundig didactisch doel (formules leren opbouwen) nu niet meer bereikt werd. Een rake opmerking, de moeite waard om verder op in te gaan.
Je kunt je afvragen of het mogelijk is de aanpak die wel aansluit bij het opbouwen van een formule af te dwingen. Als het antwoord 'ja' is, blijft nog de vraag of het ook *wenselijk* is.
In aansluiting op de eerste vraag kregen de leerlingen van de wiskunde A-klas uit Purmerend als alternatief voor het structuurdiagram het volgende schema voor een rekentabel aangeboden:

n	a	p	t
0	40 + $\boxed{n}$	100 − 2 * $\boxed{n}$	$\boxed{a}$ * $\boxed{p}$
1	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
19	.	.	.

Het bleek dat de meeste leerlingen geen moeite hadden om de tabel die hierbij hoort zelf op de computer op te bouwen. De betekenis van de kolommen gaf geen problemen. Interessant was nu, of de leerlingen deze aanpak bij de volgende opgaven zouden overnemen. De meeste leerlingen deden dit inderdaad en maakten een hulpkolom waarin de toename ten opzichte van het beginaantal vermeld stond. Bij de eerder genoemde opgave over de busmaatschappij werd dit:

	"aantal"	"prijs"	"bedrag"
0	30+RC[−1]	15−0.25*RC[−2]	RC[−2]*RC[−1]
0	30+RC[−1]	15−0.25*RC[−2]	RC[−2]*RC[−1]
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
20	30+RC[−1]	15−0.25*RC[−2]	RC[−2]*RC[−1]

Een leerlinge pakte het echter anders aan. Zij had het gebruik van de rekentabel nog absoluut niet in de vingers en had het ook niet leuk gevonden de vorige keer. Aan het begin van de les was het haar dan ook niet

duidelijk wat de bedoeling was en hoe ze een tabel moest opbouwen. Met de nodige persoonlijke aandacht lukte het uiteindelijk wel, maar door een ongelukje raakte ze de tabel weer kwijt zodat ze helemaal opnieuw moest beginnen. Niet zo erg eigenlijk, want nu moest ze het echt alleen doen en ze begon er net zo'n beetje slag van te krijgen.
Vrij vlot stond de tabel er, opgebouwd volgens het schema van de opgave.
Maar nu komt het: ze begon aan de volgende opgave (de busverhuur) en maakte daarvoor net zo'n tabel als gedemonstreerd op de lerarenbijeenkomst. Nu ze zelf de vertaling van verhaal naar tabel moest maken, en het principe van de rekentabel door had, lag deze aanpak blijkbaar meer voor de hand.

Bij deze laatste, waarschijnlijk meer natuurlijke aanpak, blijven de wiskundige formules veel implicieter. Dit hangt samen met de manier waarop in een rekentabel een variabele gerepresenteerd wordt. Soms komt een variabele overeen met een cel, waar je een getal in kunt zetten en die je kunt aanwijzen. Soms ook komt een variabele overeen met een groep van cellen, waarbij in elke cel een bepaalde waarde staat die deze variabele kan aannemen.
In termen van een rekentabel is een formule dan zoiets als *twee keer wat links hiervan staat.*
Sommige leerlingen moesten hier duidelijk aan wennen, ze typten bijvoorbeeld letterlijk *40 + n*, in plaats van door middel van aanwijzen de formule *40 + RC[1]* te maken.
Overigens is het bij een rekentabel zoals MULTIPLAN mogelijk om een cel of een groep van cellen een naam te geven, zodat toch weer met een formule als *40 + n* gewerkt kan worden. Zo'n naam is dan vooral een label die aan een cel gehangen kan worden om de overzichtelijkheid te vergroten.
Het zou weleens kunnen zijn dat de behoefte om tot een expliciete formule te komen sterk vermindert als een hulpmiddel zoals een rekentabel vaak gebruikt zou worden in de wiskundeles. Aan de ene kant kan dat als een gemis ervaren worden, aan de andere kant staat daar tegenover dat met een rekentabel ook grotere modellen eenvoudig aangepakt kunnen worden. Dit omdat formules stapsgewijs opgebouwd kunnen worden, zonder dat het nodig is eindvariabele in beginvariabele uit te drukken.

Kant-en-klare tabel

Er zijn ook toepassingen van een rekentabel denkbaar waar niet zozeer het opstellen van de tabel als leeractiviteit dient, maar meer het verwerken en interpreteren van een gegeven tabel.
Denk bijvoorbeeld aan het verwerken van een Lesliematrix op de computer om het verloop van een bepaalde in leeftijdsklassen ingedeelde populatie te onderzoeken. In zo'n geval zouden de leerlingen met een eerder aangemaakte kant-en-klare tabel kunnen werken.
De gebruiker kan zelf waarden kiezen voor de vruchtbaarheidscijfers, overlevingskansen en beginpopulatie. De computer rekent het model door en de analyse van de resultaten wordt aan de gebruiker overgelaten.

LESLIEMATRIX VOOR KEVERS

$$L = \begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 & 6.000 \\ 0.500 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.333 & 0.000 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

tijd:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
jong	1000	6000	2000	1000	6000	2000	1000	6000	2000
middel	1000	500	3000	1000	500	3000	1000	500	3000
oud	1000	333	167	1000	333	167	1000	333	167
totaal	3000	6833	5167	3000	6833	5167	3000	6833	5167
groei		228%	76%	58%	228%	76%	58%	228%	76%
jong	33%	88%	39%	33%	88%	39%	33%	88%	39%
middel	33%	7%	58%	33%	7%	58%	33%	7%	58%
oud	33%	5%	3%	33%	5%	3%	33%	5%	3%

Koeien van calculaties

In 1830 waren er veertig miljoen (!) buffels in het westen van de VS. In 1887 waren er nog maar 200 over, de dieren werden ongelimiteerd afgeslacht. Op het ogenblik zijn er weer ongeveer 26000 exemplaren, als volgt verdeeld: 10400 volwassen mannetjes, 9100 volwassen vrouwtjes, 3380 onvolwassen mannetjes en 3120 onvolwassen vrouwtjes. Van de onvolwassen dieren is tweederde deel 1-jarig, de rest is 2-jarig (dit geldt voor zowel mannetjes als vrouwtjes). Het verantwoordelijke departement overweegt toe te staan dat jaarlijks 1000 volwassen mannetjes worden afgeschoten.
Wat zijn de gevolgen hiervan voor de buffelpopulatie de komende jaren?

Van de buffels is bovendien bekend:
- *100 volwassen vrouwtjes werpen elk jaar gemiddeld 90 kalveren, waarvan 49 mannetjes en 42 vrouwtjes;*
- *50% van de 1-jarigen overleeft het eerste levensjaar, van de 2-jarigen wordt 60% volwassen (de rest gaat dood);*
- *van de volwassenen sterft elk jaar 10%.*

Om te beginnen is het nodig enige structuur aan te brengen in de gegevens. Dit kan expliciet, door het model in de vorm van een serie differentievergelijkingen te gieten:

$$\begin{aligned}
\text{Vkalf}(t) &= 0.42\ \text{Vkoe}(t-1) \\
\text{Mkalf}(t) &= 0.48\ \text{Vkoe}(t-1) \\
\text{Vvaars}(t) &= 0.50\ \text{Vkalf}(t-1) \\
\text{Mvaars}(t) &= 0.50\ \text{Mkalf}(t-1) \\
\text{Vkoe}(t) &= 0.60\ \text{Vvaars}(t-1) + 0.9\ \text{Vkoe}(t-1) \\
\text{Mkoe}(t) &= 0.60\,\text{Mvaars}(t-1) + 0.9\,\text{Mkoe}(t-1) - 1000
\end{aligned}$$

Maar het kan ook impliciet, door voor alle diergroepen een kolom in Multiplan te maken, de beginpopulatie in te voeren en met behulp van relatieve verwijzingen stap voor stap de formules vast te leggen. Het aardige hiervan is, dat de computer een nieuwe formule onmiddellijk evalueert: het invoeren van

	1	2	3	4	5	6	7
1			"***Buffels in Amerika***"				
2							
3	"tijd"	"V kalf"	"M kalf"	"V vaars"	"M vaars"	"V koe"	"M koe"
4	"----------"	"----------"	"----------"	"----------"	"----------"	"----------"	"----------"
5	0	2/3*3120	2/3*3380	1/3*3120	1/3*3380	9100	10400
6	R[-1]C+1	0.42*R[-1]C[+4]	0.48*R[-1]C[+3]	0.5*R[-1]C[-2]	0.5*R[-1]C[-2]	0.6*R[-1]C[-2]+0.9*R[-1]C	0.6*R[-1]C[-2]+0.9*R[-1]C-1000
7	R[-1]C+1	0.42*R[-1]C[+4]	0.48*R[-1]C[+3]	0.5*R[-1]C[-2]	0.5*R[-1]C[-2]	0.6*R[-1]C[-2]+0.9*R[-1]C	0.6*R[-1]C[-2]+0.9*R[-1]C-1000

0.42*R[−1][+4] in cel R6C2 geeft 3822 vrouwelijke 1-jarigen als resultaat. Zo kan voor elke groep dieren een formule gemaakt worden. Dit maken van formules kan grotendeels via het aanwijzen met de cursor van de relevante componenten gebeuren: 'zoveel-keer-dit plus zoveel-keer-dat' enzovoort. (Tussen twee haakjes: het is natuurlijk een contradictie om het gemak van dit aanwijzen op papier te willen beschrijven.) Als dit gebeurd is, zit het meeste werk erop: met behulp van de kopieeropdracht kan nu elke formule een aantal keer naar beneden gekopieerd worden. De kracht van de kopieeropdracht in combinatie met relatieve verwijzingen blijkt uit dit voorbeeld wel heel duidelijk: een rekentabel is werkelijk geknipt voor het doorrekenen van stelsels differentievergelijkingen. Overigens: het onderwerp differentievergelijkingen maakt als zodanig geen deel uit van het nieuwe wiskunde A-programma, maar wordt wel genoemd bij de keuzeonderwerpen.

Door bij dit soort problemen een rekentabel te gebruiken, gaan het opstellen van het model en het doorrekenen ervan vrijwel hand in hand en dat zou voor leerlingen weleens een groot voordeel kunnen zijn. De computer geeft aan elke formule immers meteen ook getalsmatig een betekenis. Een tweede voordeel is, dat door het vensterprincipe van een rekentabel alle geproduceerde uitvoer toegankelijk is. Dus geen gedoe met uitvoer die van het beeldscherm verdwijnt en dergelijke. Alle aandacht kan gericht worden op waar het eigenlijk om gaat: het interpreteren van de uitvoer en het kritisch beoordelen van het model.

De vragen dringen zich haast vanzelf op:

- *Hoe ontwikkelt de populatie mannetjes zich?*
- *Kan het gebeuren dat er op zeker moment 'te weinig' mannetjes zijn en wat gebeurt er dan?*
- *Hoe ontwikkelt de populatie in zijn totaliteit zich?*

	1	2	3	4	5	6	7	8
1			***Buffels in Amerika***					
2								
3	tijd	V kalf	M kalf	V vaars	M vaars	V koe	M koe	Totaal
4								
5	0	2080	2253	1040	1127	9100	10400	26000
6	1	3822	4368	1040	1127	8814	9036	28207
7	2	3702	4231	1911	2184	8557	7808	28393
8	3	3594	4107	1851	2115	8848	7338	27853
9	4	3716	4247	1797	2054	9073	6873	27760
10	5	3811	4355	1858	2123	9244	6418	27810
11	6	3883	4437	1905	2178	9435	6050	27888
12	7	3962	4529	1941	2219	9634	5752	28037
13	8	4046	4624	1981	2264	9836	5508	28260
14	9	4131	4721	2023	2312	10041	5316	28544
15	10	4217	4820	2065	2361	10251	5171	28885
16	11	4305	4920	2109	2410	10465	5071	29280
17	12	4395	5023	2153	2460	10684	5009	29724
18	13	4487	5128	2198	2512	10907	4985	30216
19	14	4581	5235	2244	2564	11135	4993	30751
20	15	4677	5345	2290	2618	11367	5032	31329

Dankzij het gebruik van de computer kan over al dit soort vragen heel wat zinnigs gezegd worden. De kunst is wel om dit dan ook te doen: vaak zien leerlingen het produceren van veel uitvoer al als een doel op zich. Wie veel uitvoer heeft, zal immers vast wel hard gewerkt hebben!

Zakelijk gebruik

Veel docenten hebben al ontdekt dat een rekentabel ook uitstekend gebruikt kan worden om proefwerkcijfers te verwerken. Ziet u de tabel al voor u? Gemiddelde en standaarddeviatie van een bepaald proefwerk kunnen gemakkelijk berekend worden en het bepalen van rapportcijfers via allerlei ingewikkelde wegingsprocessen is geen kunst meer.
Zelfs voor het verwerken van een eenvoudige enquête is een rekentabel geschikt. Zo zijn de instroomgegevens voor 1985 over wiskunde A en B van de HEWET experimenteerscholen met een rekentabel verwerkt. De gegevens waren per school verzameld. De resultaten van 34 scholen (totaal 3494 ll. in 5VWO) zijn:

	A	B	geen
jongens	67%	65%	7%
meisjes	62%	31%	20%
totaal	65%	48%	13%

Met een rekentabel kan dus heel wat meer gedaan worden dan financiële calculatie. Toch moeten de mogelijkheden ook weer niet overschat worden. Een grote beperking is dat er grafisch bijna niets mogelijk is, al is het soms wel mogelijk om de uitvoer van een rekentabel door te sturen naar een grafisch pakket. Er blijven echter genoeg goede toepassingen over en ik kan een ieder die daar voor de gelegenheid heeft aanraden om zelf eens met zo'n rekentabel aan de slag te gaan. Zeker voor wie niet zelf wil programmeren maar toch heel vrij ritsen berekeningen door de computer wil laten uitvoeren, is een rekentabel een prima alternatief.

Het hier besproken MULTIPLAN is een bijzonder krachtig pakket, maar er bestaan ook vele wat eenvoudiger rekentabellen, die voor onderwijsdoeleinden misschien wel zo geschikt zijn.
Ik weet bijna zeker dat er voor de micro die u op school heeft staan, tenminste één speadsheet verkrijgbaar is.

Literatuur

Arganbright, D.E. – Mathematical Applications of Electronic Spreadsheets, Mc Graw Hill Book Company, New York, 1985.