Ik zìe het nooit

Een vondst, gevolgd door vlijt en verlies: puzzels op een vierkant

A.J. Goddijn
OW & OC, RU Utrecht

"Bij al die dingen hoort een truuk en die moet je maar net kennen. Ik begin er niet aan want ik zie het toch niet."

Begrijpelijk! Achter zo'n opmerking gaat vast jaren worstelen schuil met a-b-c-formule's, verwisselende binnenhoeken, delen door het omgekeerde en kip-tot-de-macht-kip-log-kuiken-is-kuiken. Een gezond mens moet zich onder zo'n vracht protheses wel gehandicapt gaan voelen. En dan weer een nieuw probleem op eigen kracht aanpakken? Nee bedankt, alstublieft!

Gelukkig zijn de meesten zo wijs de aangeleerde ballast snel te vergeten. Alleen: één inzicht blijft hardnekkig achter: dat het allemaal één trukendoos was.
De publieke opinie stelt dat beeld niet bij, die voedt alleen de visie dat wiskunde saai is en alleen begrepen kan worden door geestelijk misvormden.
Meteen nu maar even een nieuwe opgave voor de puzzelrubriek.

Opgave 12
Noem drie romans, verhalen, toneelstukken, films, musicals, operettes, moppen of stripboeken waarin een wiskundeleraar of -lerares een positieve, vriendelijke, menselijke rol speelt.

Ik ben bang dat opgave 12 erg lastig is. Er is ook geen truuk voor. Toch hoop ik met ieders medewerking volgende keer een klein lijstje te kunnen maken!

Het wiel opnieuw uitvinden

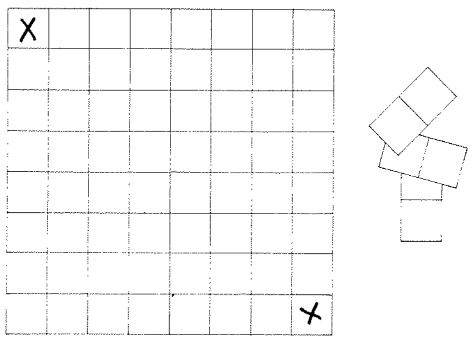
Een leuk verhaal in de vorige Nieuwe Wiskrant vond ik in "Record-problemen". R. Jansen en S.L. Kemme beschrijven hoe een groep leraren met een probleem uit de waarschijnlijkheidsrekening als uitgangspunt, intensief wiskundig actief is. Het spuien van kennis speelt er geen rol, wel het zoeken en het onderling verklaren.
Tot een definitief resultaat komt het niet eens: U kunt nog meedoen, kijk maar eens naar de kleine lettertjes op bladzijde 3 van de 5e jrg nr. 4.

Aardig is ook dat iedereen eigenlijk wel weet dat het betreffende probleem allang is 'opgelost'. Dat doet er niet toe. Het gaat niet om oorspronkelijkheid in de zin van de eerste zijn die het wiel uitvindt, het gaat om de eigen activiteiten en of iemand anders het wéét: dat speelt geen rol.

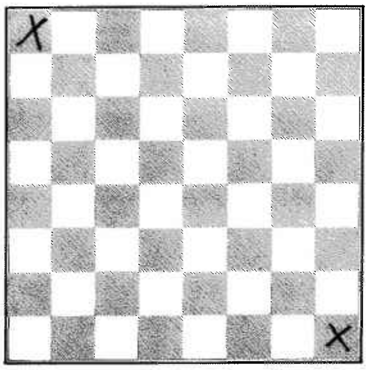
Een vondst gebruiken

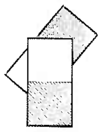
Ik beweer niet dat er geen vondsten zijn gedaan in de wiskunde die niet de moeite van het doorvertellen waard zijn. Wel zou het jammer zijn als elke vondst een museumstuk bleef, onder een kaasstolp stofvrij opgeborgen.
Vondsten kunnen opnieuw gebruikt worden, omgevormd worden. Een nieuwe vondst kan zijn: de oude vondst op een andere manier gebruiken.

Ik geef nu eerst een puzzel mèt oplossing. De oplossing is zo'n truuk die niet iedereen zelf zal vinden.
Stel je voor: een bord met 64 hokjes, 8 bij 8 in het vierkant, en 32 rechthoekige dominostenen, elk precies twee vierkantjes groot. Het zal weinig moeite kosten met de 32 stenen alle 64 hokjes te bedekken. Maar één steen gooien we weg en er moeten 62 hokjes bedekt worden, de kruisjes blijven vrij.



De vraag is: kan dat?
Wie het antwoord niet weet mag nu even stoppen met lezen en gaan proberen.
Maar ja, ik zou het antwoord geven. Het is: nee. De verklaring is de volgende vondst:





32 zwarte en 30 witte vakjes. Maar die 31 zwart-witte domino's... Prachtig, niet?

Bij de volgende puzzel komt u niet ver met de zwart-wit techniek. De techniek moet aangepast worden! Het schaakbord mag inspireren, maar misschien vindt iemand iets heel anders voor opgave 13.

Opgave 13
Een doos met 21 tromino's is gegeven. Elke tromino is een strookje van 3 vierkanten. Die vierkanten zijn precies zo groot als de 64 vierkanten van het 8 bij 8 veld van zoeven. Bedekken lukt nu zeker niet: er blijft juist één veld over.
Laat zien waarom dat bij al uw collega-puzzelaars *hetzelfde* veld is (op de viertallige symmetrie na).

Misschien heeft iemand van de oorspronkelijke truuk nu een volwaardige methode gemaakt. Dan moet opgave 14a binnen handbereik liggen.

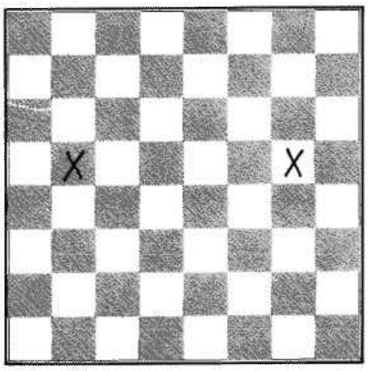
Opgave 14a
Hoe zit het bij 165 strookjes van 7 op een 34 bij 34 veld? Welke vakjes komen in aanmerking alleen over te blijven? ($165 \times 7 + 1 = 34 \times 34$!)

Opgave 14b
Zelfde vragen: stroken van 23, bord 91 bij 91.

Opgave 14c
Zelfde: p, 9 bij 9.

Nog even terug naar de 31 domino's en het bekruiste schaakbord.

Opgave 15
De twee kruisjes staan nu op verschillende kleuren. Bijvoorbeeld:



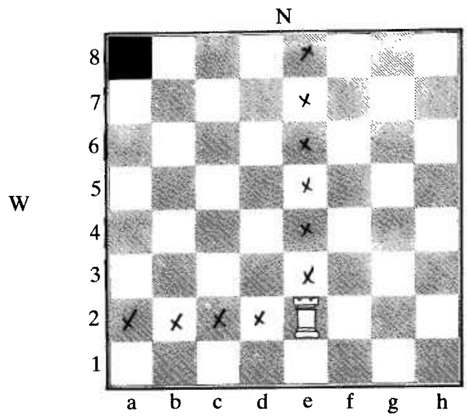
In dìt geval kunnen alle 31 domino's zo geplaatst dat de kruisjes vrij blijven.
Kan het misschien altijd als een kruisje op zwart en het ander op wit staat?
Een kort bewijsje graag, geen 32 × 32 tekeningen!

Heel wat anders

Sinds ik een rubberstempel heb waarmee ik in één keer een schaakbord op papier kan zetten, zoek ik naar puzzels op het schaakbord. Geen echte schaakproblemen, maar spelletjes waarvoor je niet hoeft te kunnen schaken.
Bij de volgende spelletjes kan weliswaar gewonnen en verloren worden, maar daar gaat het niet echt om: het gaat om het vinden van een zekere weg naar de winst. Sàmen met een verliezende tegenstander kan zo'n weg ook gevonden worden.

Bij de eerste spelletjes moet nog samen met één stuk gespeeld worden ook. Om de beurt wordt gezet, waarbij het stuk steeds verder in de NW-hoek van het bord raakt. Op zeker moment is iemand aan de beurt en er valt niet meer te zetten. Deze iemand is de verliezer.

Een voorbeeld: het stuk is de "toren".
Hij staat op e2 in dit geval:



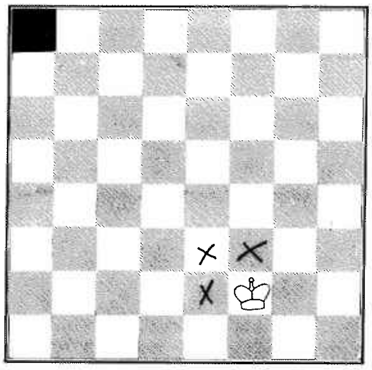
De toren mag alleen rechtdoor, zoveel hokjes als u wilt, maar wel naar west of noord. De kruisjes, daar kunt u dus uit kiezen.
Er is zetplicht: als u aan de beurt bent met de toren op veld a8, dan bent u dus de sigaar.

Een strategie om te winnen zult u wel gauw ontdekken: zet om te beginnen de toren op de diagonaal a8-h1. Nu dus op e4. De tegenstander moet hem eraf zetten, bijvoorbeeld naar e6. Dan zet u de toren weer terug op de diagnonaal: naar c6 dus. Succes is verzekerd.

De diagonaal a8-h1 is de verzameling *verliezende velden*.
Nu beginnen we ècht.

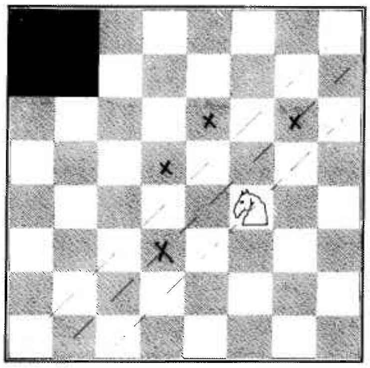
Opgave 16
Het stuk is nu de koning. Die mag één veld naar het noorden, een veld naar het westen, of een veld

diagonaalgewijs naar het noord-westen. In het voorbeeld dus naar één van de drie kruisjes.
Vind ook hier de verzameling verliezende velden.



Als de verliezende velden bekend zijn, dan is de strategie duidelijk: eervol opgeven als je op zijn veld aan zet bent, of het stuk juist op zo'n veld zetten. Uw verzameling verliezende velden is toch wel zo dat dat altijd kan?

Opgave 17
Het spel met het paard. Het paard heeft keus uit 4 zetten, zie de kruisjes. Alleen zo komt het paard een of meer ZW-NO-diagonalen dichterbij.

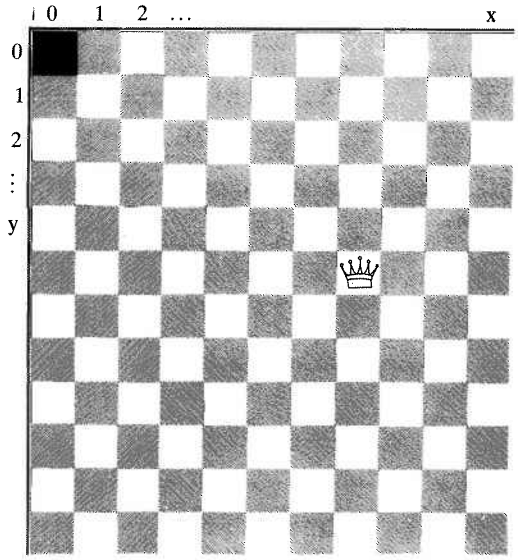


Het paard nadert zijn einde!

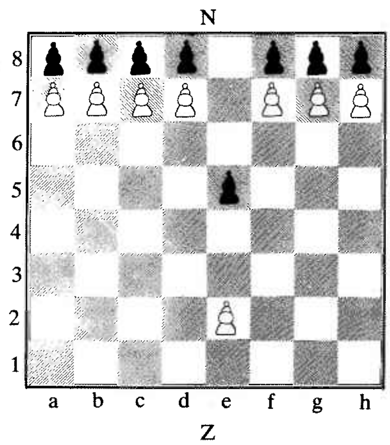
Zoals te verwachten is het graf van het paard wat groter.
Weer: vind een strategie, de verzameling verliezende velden dus.

Schakers weten nu wat er komt: de dame. Zij mag zoveel ze wil naar N, W of NW.

Opgave 18
Vind de verliezende velden voor de dame.
Omdat de dame zoveel kan, nemen we het bord wat uitgebreider: naar het oosten en zuiden onbegrensd. Karakteriseer de verzameling verliezende velden met behulp van de coördinaten, zoals die aangegeven zijn.
Een waarschuwing is hier op zijn plaats.
Bij de toren, de koning en het paard kan natuurlijk ook het veld uitgebreid worden, maar interessant is dat niet omdat een periodiek patroon ontstaat.
Bij de dame is dat niet zo. Haar gevaarlijke velden liggen enigszins irrationaal verspreid; opgave 5 van deze rubriek kan een hulp zijn (NW 2 en 3, jrg. 5, '85/'86).



Het aardige is dat alle vier de spelletjes ook zonder veel theorie proberenderwijs gespeeld kunnen worden.
Dat is ook zo bij het volgende spel. Nu beheren de twee spelers hun eigen acht pionnen.
De spelers heten traditioneel 'zwart' en 'wit'. Een pion mag één of twee hokjes naar noord of zuid en mag niet op of over een andere pion stappen. De bedoeling is de tegenstander klem te zetten. Een spelstand als voorbeeld.



Wit begint en wint met 1. e2-e4!

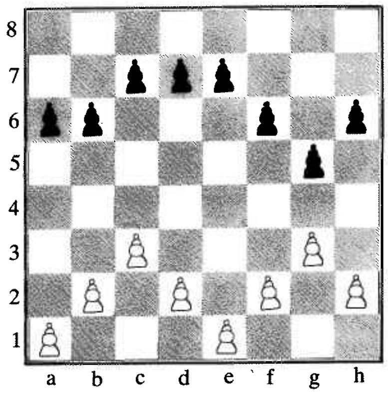
Waarom wint wit met e2-e4? Wel, zwart moet zetten. Zijn e-pion gaat dus noordwaarts en wit achtervolgt tot de pion op e8 klem staat.
Toch liggen overal voetangels.

Opgave 18
In de gegeven stand kan wit nog 16 andere zetten doen. Daarvan zijn er 8 wijs en 8 dwaas. Welke?

Na deze inleidende probeersels moet het spel maar grondig aangepakt worden.

Opgave 19
Formuleer een strategie om het spel vanuit elke willekeurige stand te spelen. (Nou ja, willekeurig: in

elke lijn staat juist een witte en een zwarte pion).
De strategie moet dus antwoord geven op de vraag: kan de speler die aan zet is winnen en zo ja, met welke zet(ten)?
Bijvoorbeeld:

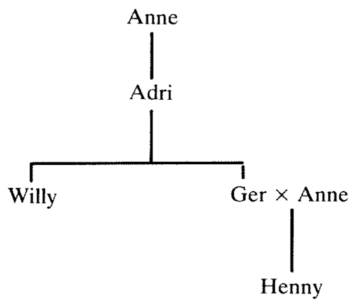


Wit (aan zet) heeft maar één winnende zet, namelijk e1-e2!

Opgave 20
Zelfde vragen, maar nu mogen de pionnen onbeperkt voor- en achteruit.
Speel opgave 19 en 20 ook maar eens op velden van een, twee of drie lijnen breed!

Censuur opgeheven: de tantes van vraagstuk 9

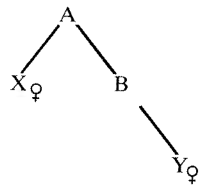
Kunnen twee mensen elkaars tante zijn? Het blijkt te kunnen en nog wel in allerlei familiestructuren.
De eerste oplossing die binnenkwam was van Fedor Mulder: een nicht trouwt met een oom van haar tante. Geniaal! Alleen wordt de nicht nu niet tante van haar tante in de bloedverwante zin van vraagstuk 9...
Ik geloof dat het wettelijk ook maar net mag trouwens.
Zeker niet door de beugel kan de oplossing van Kees Henzen:



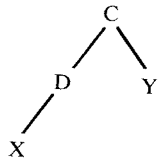
De twee Anne's zijn dus dezelfde. Vorige keer liet ik vallen dat dergelijke oplossingen niet door de censuur van de Nieuwe Wiskrant kunnen. Die censuur blijkt zich echter met hele andere dingen te bemoeien.
Henny en Wil zijn elkaars tante.
Was de puzzel moeilijk?

Met de notatie van Kees is het wel goed werken: een streepje van A naar B naar beneden zegt: A is ouder van B. En kruisjes voor de huwelijken.
De definitie van X is tante van Y was:

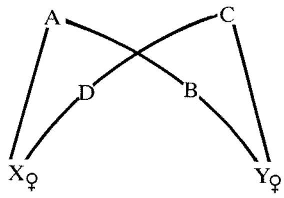
Er zijn A en B zodat:



En Y moet tante van X zijn:



Leg de plaatjes nu eens op elkaar, met de X en Y op gelijke hoogte.

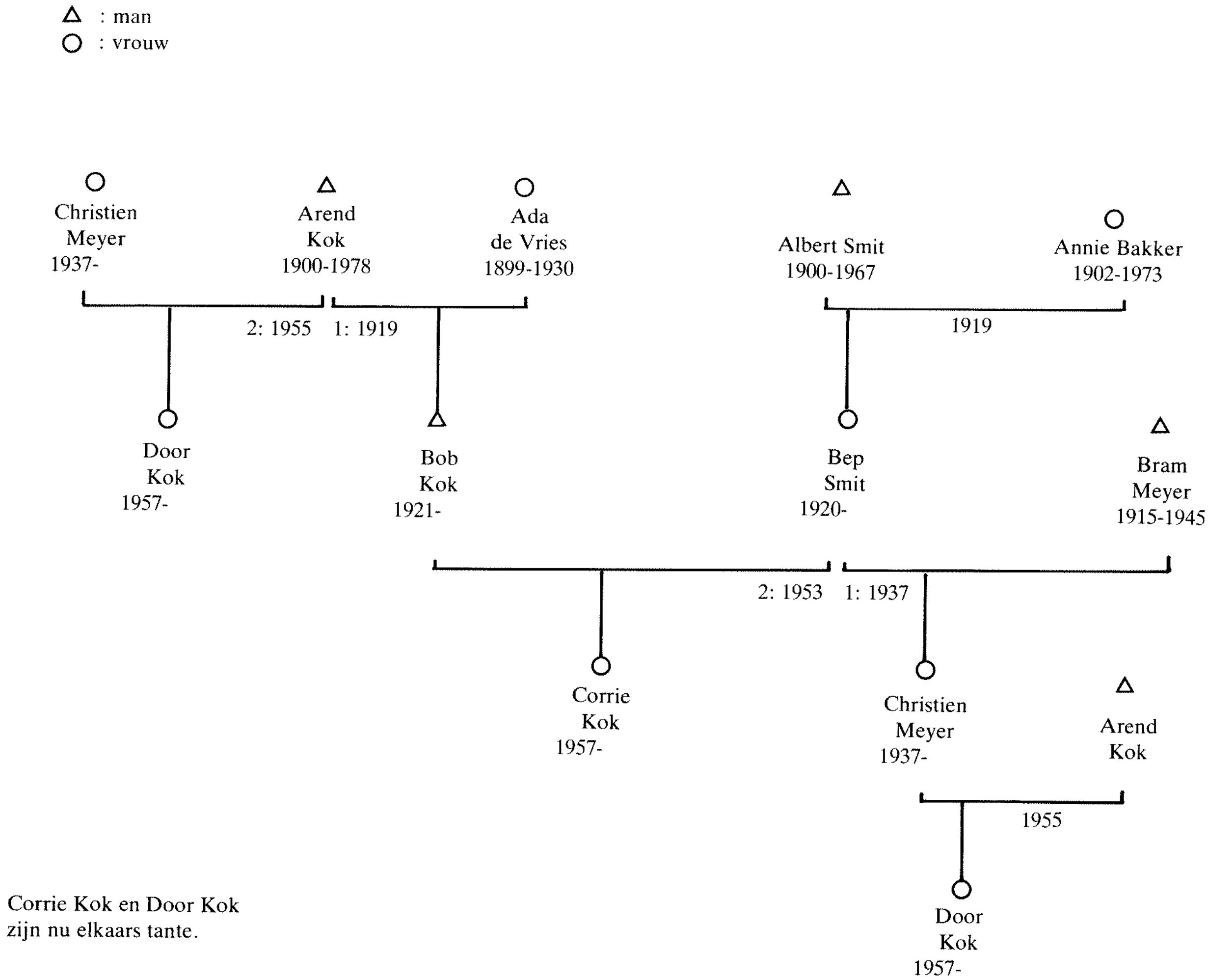


Duidelijk is: A en D zijn ouders van X en C en B ouders van Y.
Wat is dus gebeurd? A heeft een dochter B en C een dochter D. Op zekere dag zijn de echtgenoten van A en C overleden en zijn D en B huwbaar. Niets weerhoudt nog de huwelijken A × D en B × C.
Dit is precies de oplossing die Mike Staring (samen met Markus Nijmeyer) geeft. Het is ook precies het Indische verhaal, waaraan ik de puzzel ontleen!

Een totaal andere oplossing komt van W. Ganzevoort. Ik kan niet anders doen dan alle namen en jaartallen letterlijk weer te geven, want dit ziet er echt gebeurd uit. (Zie volgende pagina).

De kwast

De vraag was: hoe schoon krijg je een kwast waarin altijd 1 cc verf en/of terpentijn achterblijft met 10 cc terpentijn?
Sinds dit vraagstuk in de NW staat is het terpentijngebruik in Nederland gedaald en zijn de kwasten schoner.
Met 10 cc ineens gebruiken kom je tot een verdunningsfactor $(1+10)$ in de kwast.
Mike Staring, Markus Nijmeyer en W. Ganzevoort verbeteren dit tot 22026.46579; aanzienlijk dus.
De methode is: verdeel de terpentijn in n porties van $\frac{10}{n}$. Met elke portie kun je een factor $(1+\frac{10}{n})^n$ verdunnen. In totaal dus $(1+\frac{10}{n})^n$ en dat nadert tot e^{10} als $n \to \infty$.



Corrie Kok en Door Kok
zijn nu elkaars tante.

Arend is vader van Door en vadersvader van Corrie.
Bep is moeder van Corrie en moedersmoeder van Door.

Alleen Mike Staring vraagt zich af: kan het niet beter. Zijn antwoord: Nee.
Ik denk dat hij gelijk heeft. Mike bewijst dat je met in porties verdelen en na elkaar gebruiken nooit verder komt. Is dat afdoende of kunnen er nog totaal andere manieren zijn?

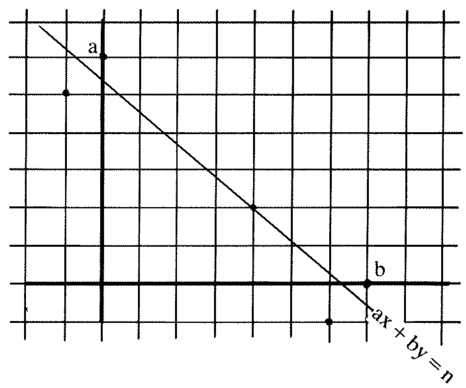
De limiet $(1+\frac{x}{n})^n$ is een paradepaardje uit de analyse.

Toch vind je heel weinig contexten waarin zo'n paradepaardje wordt toegepast. Het zou leuk zijn voor ons onderwijs om zulke voorbeelden wat meer te hebben. Wie een aardige weet, schrijf!

De onmogelijke torens

Dezelfde inzenders losten ook vraagstuk 11 op.
Gegeven a, $b \in \mathbb{N}$ met $(a,b) = 1$.
Wat is het hoogste natuurlijke getal n waarvoor $xa + yb = n$ niet oplosbaar is met niet-negatieve gehele n.

De oplossing is te zien in het plaatje:



Als n groeit loopt de lijn weg naar boven. Omdat de oplossingen van $xa + yb = n$ een rij punten met tussen stappen de vector $\binom{-b}{a}$ vormen, gaat het boven $n = ab$ wel goed. De laatste misser treedt op als n zo groot is dat $xa + by = n$ door $(-1, a-1)$ en $(b-1, -1)$ gaat. Dus $n = ab - a - b$.
De details zijn verder wel te vinden, de "truuk" zit in het plaatje en het schuiven.

Tot slot: inzendingen over de vierkanten, en de romans, graag voor 15 december a.s.