Een andere aanpak van transport-problemen

G. Koolstra
Michaëll College, Zaandam

Samenvatting

Eenvoudige transportproblemen zoals die in het kader van wiskunde-A bij lineair programmeren aan de orde komen, kunnen eenvoudiger opgelost worden wanneer je een intuïtieve aanpak tot uitgangspunt neemt voor een oplossingsstrategie.

Een typisch voorbeeld van een eenvoudig transportprobleem: (examen wiskunde A 1983 I, opg. 5).

> Een oliemaatschappij heeft een voorraad van 200 000 vaten in Koeweit, 150 000 in Galveston en 100 000 in Caracas. Een klant in New York heeft 300 000 vaten besteld. Een tweede klant in Londen wil de overige 150 000 afnemen. De transportkosten in dollarcent per vat zijn:

		naar	
		New York	Londen
	Koeweit	38	35
van	Galveston	10	22
	Caracas	18	25

Gevraagd wordt dan (o.a.) *door middel van lineair programmeren* een transportschema te maken waarbij de transportkosten minimaal zijn.
De 'standaardoplossing' verloopt ongeveer als volgt:

1. Voer twee *variabelen* in (bijv. a en b) voor het aantal vaten dat (bijv.) uit resp. Koeweit en Galveston naar New York wordt vervoerd.
2. Formuleer alle (relevante) *beperkingen. Dit zijn (afgezien van a, $b \geqslant 0$)*
   (1) $a \leqslant 200\,000$
   (2) $b \leqslant 150\,000$
   (3) $a+b \leqslant 300\,000$
   (4) $a+b \geqslant 200\,000$
3. Formuleer de *doelfunctie* (de totale kosten):
   $38\,a + 10\,b + 18\,(300\,000 - a - b) +$
   $+ 35\,(200\,000 - a) + 22\,(150\,000 - b) +$
   $+ 25\,(a+b - 200\,000) = 10\,700\,000 + 10\,a - 5\,b$
4. Los het probleem verder op met niveaulijnen of randenwandelen o.i.d.

Zoals vaker opgemerkt is deze methode wel erg bewerkelijk in verhouding tot het doel. Want als je even nadenkt over de probleemstelling "*zie je zo*" dat vanuit Galveston en vanuit Caracas alles naar New York moet en Londen vanuit Koeweit bevoorraad moet worden. In New York komt men dan nog 500 000 ton tekort die moet dus uit Koeweit komen. Ben je niet bezig om leerlingen te leren om iets heel eenvoudigs ingewikkeld aan te pakken en dat uitgerekend bij wiskunde A?
Deze wat retorisch gestelde vraag heeft te maken met problemen als:

- De verhouding *gezond verstand* ("zie je zo") en wiskundige technieken bij wiskunde A;
- Wat valt nog onder *lineair programmeren*?
- In hoeverre zijn *eenvoudige* probleempjes geschikt om met een wiskundige aanpak kennis te maken die juist in *gecompliceerde* situaties zijn nut heeft bewezen?

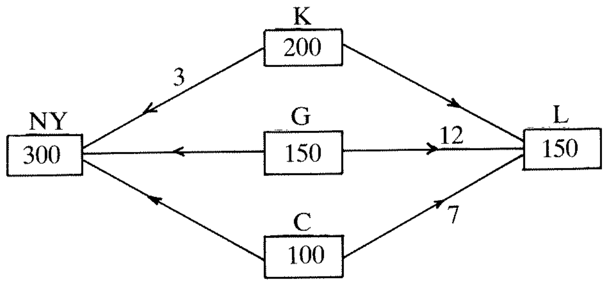
In dit artikel wil ik me hoofdzakelijk beperken tot een soort verslag van een poging een kortere oplossingsmethode te ontwikkelen voor eenvoudige (n bij 2) transportproblemen. Het gaat om transportproblemen met twee opslagplaatsen of met twee bestemmingen. Bovendien is de totale benodigde hoeveelheid bij dit soort problemen altijd gelijk aan de totale beschikbare hoeveelheid. Een aardig verschraalde werkelijkheid, maar daarover later meer.

Hoe verloopt een intuïtieve oplossing van het eerder vermelde olie-transport-probleem? Met het vergelijken van prijzen. Maar hoe vergelijken? Hoewel het misschien voor de hand ligt de drie (mogelijke) leveranciers van (bijv) New York onderling te vergelijken, geef ik er de voorkeur aan telkens *twee klanten* te vergelijken: Vanuit Koeweit is New York 3 cent per vat duurder dan Londen; vanuit Galveston is N.Y. juist 12 cent goedkoper dan Londen enz.
Een volgende stap om vanuit een intuïtieve (dus persoonlijke) naar een meer gestructureerde (dus overdraagbare) oplossingsstrategie te komen is het werken met *extra-kosten*: Vanuit Koeweit is Londen het goedkoopst en New York kost 3 (¢ per vat) extra. Dit resulteert in de volgende *extra kosten*matrix:

		naar	
		New York	Londen
	Koeweit	3	0
van	Galveston	0	12
	Caracas	0	7

Van de oorspronkelijke matrix is van ieder element het rij-minimum afgetrokken en er verschijnen dus tenminste drie nullen.

Nu zijn er drie mogelijkheden om verder te gaan:
1. Met behulp van de "extra kostenmatrix" kan een nieuwe doelfunctie geformuleerd worden: de "extra kostenfunctie"):
   $3a + 12\,(150\,000 - b) + 7\,(200\,000 + a + b) =$
   $10\,a - 5\,b + 3\,200\,000.$
   De functie is op een constante na gelijk aan de eerder genoemde doelfunctie, de optimale oplossing wordt er dus niet door beïnvloed.
   Nu kan men verder precies zo te werk gaan als de eerder genoemde "standaardoplossing", de winst is echter gering: de doelfunctie is wat makkelijker te bepalen, maar het 'gedoe' met de voorwaarden blijft.
2. De doelfunctie suggereert dat het verstandig is *a zo klein mogelijk* en *b zo groot mogelijk te maken.* In het woord *'mogelijk'* zitten de voorwaarden eigenlijk begrepen, maar die zijn duidelijk genoeg:
   a zo klein mogelijk betekent 50 000 vaten, anders komt N Y tekort.
   b zo groot mogelijk betekent hier alles: 150 000 vaten.
3. Nog een stapje verder is de doelfunctie niet te berekenen en het hele probleem op te lossen aan de hand van de volgende graaf:



De getallen met een rondje erom zijn extra-kosten, de andere zijn (benodigde of beschikbare) aantallen ($\times$ 1000).

De aanpak is nu als volgt te formuleren:
"Gebruik zoveel mogelijk nullen en voor zover dat niet kan zo laag mogelijke getallen."
Hoewel de formulering aangescherpt kan/moet worden voldoet deze aanpak prima: bijna alle leerlingen werken er foutloos mee, een enkeling voelt zich zekerder bij aanpak 2.

Ook opgave 2(d) van het eindexamen 1986 (1e periode) kan op deze manier binnen een minuut opgelost worden (probeer het eens!). Het is dan ook bijzonder jammer dat de opstellers van dit examen de kandidaten dwingen de zaak op een omslachtige manier aan te pakken. De openheid van de vraagstelling en de vrijheid van oplossingsmethode, naar mijn mening basiselementen van 'de wiskunde-A-filosofie', worden op die manier mooi de nek omgedraaid.

De eerste reactie op bovengeschetste aanpak is meestal (zowel van leerlingen als van collega's) "ik zie wel dat het hier werkt, maar gaat het niet om een uitzonderlijk geval, werkt het altijd, kun je aantonen waarom?"
Aanvankelijk was ik ook verrast dat de onder (3) genoemde aanpak steeds bleek te werken en was er niet zeker van of wanneer de te vervoeren aantallen sterk uiteen zouden lopen de methode nog het juiste resultaat zou opleveren.
Ik denk nu dat bij een probleem met twee leveranciers of twee bestemmingen aan te tonen is dat het wel altijd werkt, door onder meer gebruik te maken van de volgende overwegingen:

1. Door wat 'rekenwerk' is in te zien dat de transportkosten bij een "drie bij twee probleem" te schrijven zijn als:
   $a(p_1 - p_2) + b(p_3 - p_4) + (a+b)\,(p_5 - p_6) + C$
   Hierin hebben a en b dezelfde betekenis als in de standaardoplossing, p_1, p_2 enz. zijn steeds tweetallen te vergelijken prijzen. C is een getal dat onafhankelijk is van a en b. In deze schrijfwijze

zitten de *prijsverschillen* al begrepen. Achteraf bekeken hadden we ook steeds van elke rij in de prijzenmatrix het *linker*element kunnen aftrekken, of het *maximum*element. In het laatste geval werk je met maximaal prijsvoordeel i.p.v. minimale extra kosten. Het formuleren van een strategie is dan nog wat eenvoudiger.

2. Het toegestane gebied kan bij dit soort problemen uitsluitend begrensd zijn door drie soorten lijnen: *horizontale, verticale* en *diagonale* (met richtingscoëfficiënt -1). Op grond hiervan kan ook gezegd worden dat bij een kostenfunctie als $-3.a -4.b + C$, eerst b zo groot mogelijk gemaakt moet worden en dan pas a., enz. enz.
3. We gaan uit van twee afnemers. Wanneer vanuit ieder depot wordt vervoerd naar de klant waarnaar toe de transportkosten het kleinst zijn, zullen we in het algemeen een overschot krijgen bij de ene klant en een tekort bij de andere. De omvang van dit overschot/tekort is (behalve van de voorraden en de bestellingen) alleen afhankelijk van de vraag *welke* elementen in de (n bij 2) prijzenmatrix rijminima zijn en onafhankelijk van de prijsverschillen. Anders gezegd er is een bepaalde hoeveelheid goederen (onafhankelijk van de preciese omvang van de prijsverschillen) die tegen een hoger tarief vervoerd moeten worden. De logische aanpak is: zorg ervoor dat dit *hoger zo laag mogelijk* blijft; een soort *minimax*-strategie die o.a. bij speltheorie wordt toegepast.

Tenslotte iets over het werkelijkheidsgehalte.
De zaak wordt veel reëler en interessanter wanneer de totale voorraad groter is dan alle bestellingen samen. Een mogelijke aanpak is dan te werken met een extra bestelling met vervoerskosten 0, maar de vraag lijkt me zinnig of het dan ook mogelijk is een meer formele en een meer intuïtieve benadering te schetsen en wat de onderlinge vergelijking oplevert.
Een andere verfijning kan aangebracht worden door niet meer te werken met constante transportkosten per eenheid (voor een bepaald traject), maar rekening te houden met een vast deel (er moet bijv. een vrachtwagen rijden) en een variabel deel. In feite is de context nogal beperkt bedrijfseconomisch en pogingen om een iets andere context te gebruiken zijn niet zonder problemen. Zo zag ik in 'Opgaven wiskunde A' een opgave (2.24) waar sprake was van het zo goed mogelijk dirigeren van brandweerauto's vanuit drie kazernes naar twee branden, waarbij als doelfunctie het totaal aantal afgelegde km door alle auto's samen werd gehanteerd. Een uitstekende vraag, mits de kritiek op de doelfunctie erbij betrokken wordt!

Alle goede dingen bestaan uit drieën wordt er wel gezegd. Ik denk dat drie bestanddelen terug te vinden moeten zijn in wiskunde-A opgaven:

1. Het verkennende; beroep doen op intuïtieve keuzes en oplossingen.
2. Het mathematiserende; het maken van en werken met wiskundige modellen.
3. Het evaluerende, kritiserende; de beperkingen zien van de modellen, het expliciteren van impliciete vooronderstellingen en het bekijken van de merites van zowel een intuïtieve als een meer formele benadering, vooral wanneer de uitkomsten niet gelijk zijn.

Ik ben erg benieuwd naar de mening van anderen hierover en vooral van de verantwoordelijkheden voor het eindexamen. De enorme geslotenheid van het laatste examen is niet erg hoopgevend.