Afstanden en kaarten

J. de Lange Jzn
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

Wiskunde vindt in steeds meer disciplines een plaats. Daarbij speelt intuïtie vaak een niet onbelangrijke rol. Hoe bepaal je b.v. de afstanden tussen allerlei broches die je in een opgraving vindt? De criteria zullen vaak door de archeoloog worden aangegeven – niet zelden op gevoel. Eenvoudige wiskundige technieken kunnen daarna de archeoloog wat meer inzicht geven in de samenhang en structuur.

Van kaart naar matrix, en omgekeerd

Vanaf een kaart een afstandsmatrix samenstellen is een activiteit die veel Wiskunde-A leerlingen aan den lijve hebben ondervonden.
Nemen we als voorbeeld de volgende kaart met 4 europese hoofdsteden:

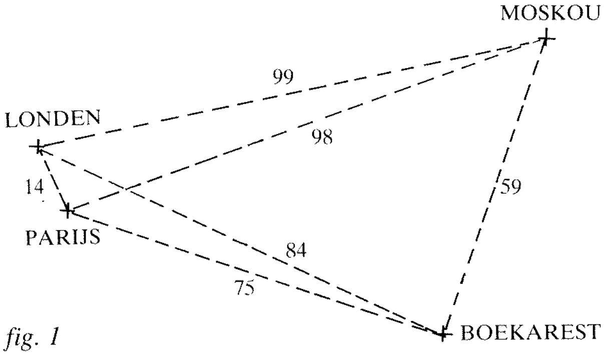


fig. 1

De afstanden zijn in mm en hemelsbreed gemeten. Zodra we de schaal kennen kunnen we de 'werkelijke' afstanden berekenen.
De bij deze kaart behorende afstandsmatrix ziet er als volgt uit:

	B	L	M	P
B	0	84	59	75
L	84	0	99	14
M	59	99	0	98
P	75	14	98	0

Een activiteit die zelden ter sprake komt – binnen de wiksundelessen – is het reconstrueren van de kaart – beter gezegd een kaart.
Met passer en lineaal moet dat simpel zijn:
We kiezen een stad: B en plaatsen die op een willekeurige plaats op het papier. De volgende stad: L wordt ergens op de cirkel (B, d_{BL}) geplaatst. Daarna tekenen we (delen van) de cirkels (B, d_{BM}) en (L, d_{LM}) om de derde stad Moskou te vinden:

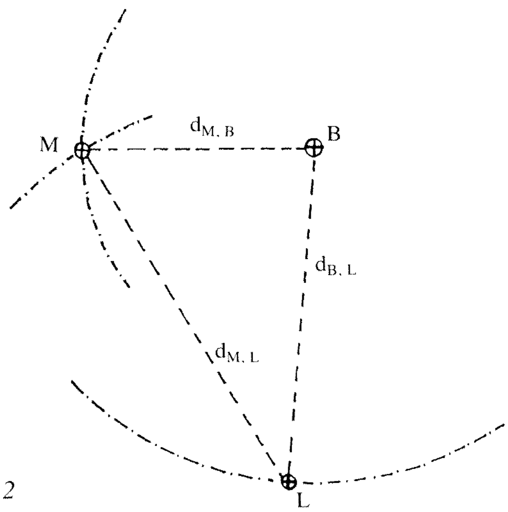


fig. 2

Tenslotte kunnen we ook de plaats van Parijs reconstrueren, onder het voorbehoud dat de afstanden uit de matrix nauwkeurig waren, anders kan de spreekwoordelijke wiskundige exactheid wel eens behoorlijk op de tocht komen te staan.

Trouwens, het resultaat van onze reconstructie is toch al niet om over naar huis te schrijven: Moskou had ook aan de 'andere' kant van Boekarest kunnen liggen; Boekarests plaats is willekeurig; we weten niet waar het noorden ligt. De kaart is dus wel erg relatief: hij is correct op translatie, reflectie of rotatie na. En dan te beseffen dat we nog in de gelukkige omstandigheid verkeerden dat we wisten dat we in een geografische context werkten: een andere dan een 2-dimensionale kaart kwam nauwelijks in de gedachten op. Maar in andere gevallen zou 1-dimensionale-scaling (tja, zo heet dat in goed Nederlands) of 3-dimensionale scaling misschien meer op z'n plaats geweest zijn.

De juiste dimensie

In de praktijk is de dimensie van de 'scaling' nauwelijks te voorspellen. De intuïtie van de betrokken onderzoeker zal in eerste instantie een grote rol spelen. Daarnaast bestaat altijd de mogelijkheid om meerdere kaarten te tekenen – of liever laten tekenen door de computer en plotter.

Laten we eens kijken naar de volgende twee 'afstandsmatrices':

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Voor matrix M ligt 2-dimensionale-scaling wel erg voor de hand:

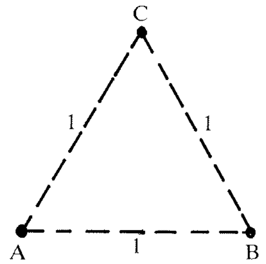


fig. 3

We raken echter enigszins in de problemen als we D uit matrix N ook in dit plaatje willen tekenen . Een extra dimensie levert echter een keurige en precieze kaart op:

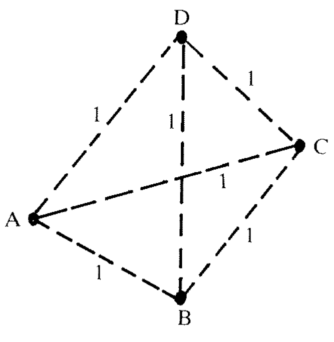


fig. 4

In de wiskunde klopt alles altijd zo mooi. Zeker vóór de invoering van Wiskunde-A. Met een zekere weemoed denken sommigen daaraan terug. De werkelijkheid is echter heel vaak wat minder 'kloppend' dan de wiskunde die er op los wordt gelaten. 'Afstanden' zijn buiten de wiskunde niet zo makkelijk te meten en zeker niet zo precies dat de cirkels elkaar in één punt snijden.
Laten we nog eens terugkeren naar ons eerste voorbeeld en we nemen aan dat we geen nauwkeurige meting hadden kunnen doen in mm maar één in cm. De tabel is dan:

	B	L	M	P
B	0	80	60	80
L	80	0	100	10
M	60	100	0	100
P	70	10	100	0

De constructie van de 2-D kaart zou nu wel eens problemen op kunnen leveren. De eerste drie plaatsen lukken nog wel; de vierde geeft moeilijkheden:

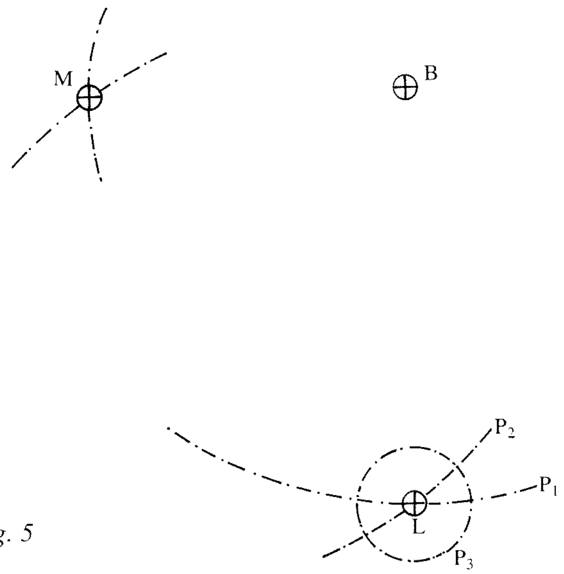


fig. 5

Parijs moet nu liggen op de cirkel(segmenten) P_1, P_2 én P_3. Dat lukt dus niet. Toch weten we dat de vier plaatsen bestaan en op een kaart te tekenen moeten zijn.
Een oplossing zou nu kunnen zijn:
P ligt in ieder geval op een korte afstand van L, dus niet op L. Laten we dus een punt nemen dat op of dicht bij cirkel P_3 ligt. Dan komen twee punten in aanmerking voor een mogelijke ligging van Parijs:

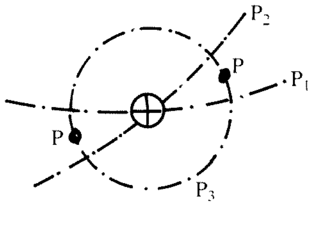


fig. 6

Een andere methode zou kunnen zijn: het tekenen van de 'ringen' i.p.v. cirkels. Ringen met een 'dikte' van 1 cm.
We wagen een poging:

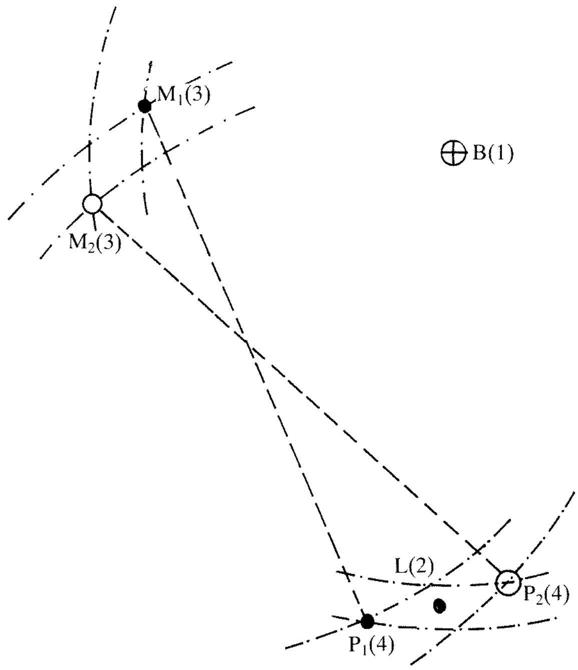


fig. 7

De volgorde van tekenen is: Boekarest (1) → Londen (2): midden in de band → twee (extreme) mogelijkheden voor Moskou ($M_1(3)$ en $M_2(3)$) → de daarbij behorende plaats voor Parijs ($P_1(4)$ en $P_2(4)$). Het vervelende is nu dat de beste oplossing $M_1(3)$ met $P_2(4)$ is: in dat geval is de totale configuratie sterk gelijkend op de oorspronkelijke van fig. 1.
Wat we met dit voorbeeld duidelijk willen maken is dat in het algemeen de te 'meten' afstanden behoorlijk grote meetfouten kunnen bevatten waardoor het hele 'scalings'proces onbetrouwbaar kan worden. Maar – beter een globale kaart dan geen kaart. Want hoe je het ook bekijkt: er zijn in ons geval van de landkaart toch wel conclusies te trekken – in eenvoudige gevallen uit de matrix, in gevallen met veel plaatsen uit de kaart. Zo kunnen we de plaatsen indelen in drie 'clusters': Moskou, Boekarest, en Londen/Parijs. De laatste 'cluster' ligt ongeveer even ver van Boekarest en Moskou. Deze afstand is wat groter dan die tussen Moskou en Boekarest. Een wat armzalig resultaat? Laten we ons oordeel nog even opschorten en wat andere voorbeelden onder de loupe nemen.

AH

'Afstanden' worden in vele betekenissen gehanteerd. Een voorbeeld dat misschien wat vreemd of gezocht voorkomt is de afstand tussen 'woorden' of 'letters' of 'kleuren' of 'getallen'. Zo kunt u in de klas gemakkelijk op experimentele wijze een afstandstabel maken tussen 'letters' (zoals ze worden uitgesproken).
Een voorbeeld:

- We beperken ons tot A, B, D, E, H en O.
- Een aantal leerlingen krijgt in hoog tempo steeds twee van deze letters te horen: dezelfde of verschillende. Die leerling noteert de letters die hij of zij denkt te horen.

Als alle leerlingen geen enkele fout maken zou een 'afstandsmatrix' er zo uit kunnen zien:

	A	B	D	E	H	O
A	100	0	0	0	0	0
B	0	100	0	0	0	0
D	0	0	100	0	0	0
E	0	0	0	100	0	0
H	0	0	0	0	100	0
O	0	0	0	0	0	100

Alle honderd keer is de A correct als A waargenomen. In werkelijkheid echter werd de A ook wel eens als H ervaren.
Een meer realistische matrix zou er zo uit kunnen zien:

	A	B	D	E	H	O
A	70	0	0	5	25	0
B	0	50	30	20	0	0
D	0	30	60	10	0	0
E	5	20	10	60	5	0
H	25	0	0	5	70	0
O	0	0	0	0	0	100

Dat deze matrix niet 'realistisch' is blijkt uit de symmetrie. Het is namelijk niet te verwachten dat bij een experiment zal gelden d(A,H) = d(H,A). Maar op realistische gevallen komen we nog terug.
Hoe kun je van bovenstaande matrix nu een afstandskaart maken?
In principe op dezelfde manier – met cirkels of bollen. Een computerprogramma moet ons daar wel bij helpen – deze programma's bestaan in verschillende soorten. Maar ook zonder computer kunnen we nog wel wat te weten komen.
In de eerste plaats gaan we er voor zorgen dat de matrix inderdaad iets als een 'afstand' weergeeft: daartoe nemen we allemaal nullen op de hoofddiagonaal en de aanvulling tot honderd voor alle andere elementen van de matrix.
Dit levert:

	A	B	D	E	H	O
A	0	100	100	95	75	100
B	100	0	70	90	100	100
D	100	70	0	90	100	100
E	95	80	95	0	95	100
H	75	100	100	95	0	100
O	100	100	100	100	100	0

Deze afstandstabel gaan we nu in een listige vorm schrijven door een herrangschikking.

'Listig' wil in dit verband zeggen dat per kolom of rij de elementen óf stijgen óf dalen óf eerst stijgen en daarna dalen óf eerst dalen dan stijgen. Dat lijkt ingewikkelder dan het is – zeker als we dit puur formeel wiskundig willen beschrijven.
Als de matrix in zo'n vorm te schrijven is wordt hij wel eens een 'Robinson' matrix genoemd.
Enig geschuif levert:

	A	H	E	B	D	O
A	0	75	95	100	100	100
H	75	0	95	100	100	100
E	95	95	0	80	90	100
B	100	100	80	0	70	100
D	100	100	90	70	0	100
O	100	100	100	100	100	0

Een ruimtelijk 'histogram' van een Robinson matrix ziet er globaal zó uit:

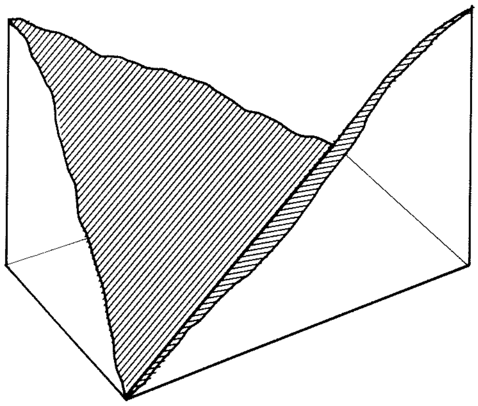


fig. 8

In ons geval is de Robinson-matrix 'perfect'. Meestal zal het niet lukken de matrix in een perfecte vorm te brengen: het landschap zal enkele lokale heuveltjes of dalen vertonen zonder dat we daar verder iets aan kunnen verhelpen.

Als de matrix 'gerobinsoneerd' is zien we onmiddellijk dat de letters al in een groepering staan die een bepaalde 'orde' en 'afstand' suggereert: in de matrix staan de A en de H en de E, B en D naast elkaar. Als we wat langer naar de matrix kijken dan zien we al haast een kaart.
Bijvoorbeeld iets dergelijks:

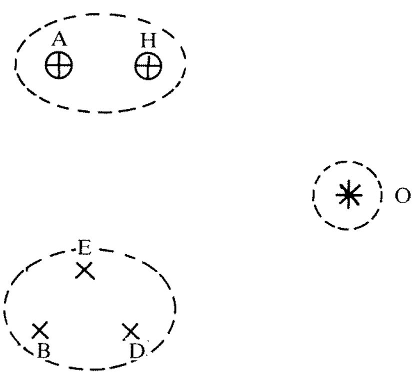
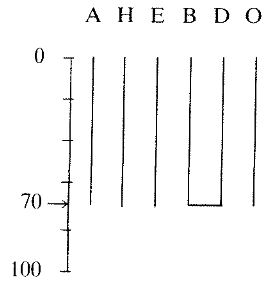


fig. 9

Bomen

We kunnen deze 'zichtinspectie' wat harder maken door het tekenen van een boomdiagram, bijvoorbeeld op de volgende manier:

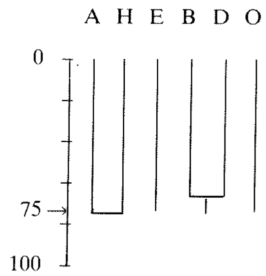


A	H	E	B	D	O
0	75	95	100	100	100
	0	95	100	100	100
		0	80	90	100
			0	70	100
				0	100
					0

zoek kleinste 'afstand'

fig. 10

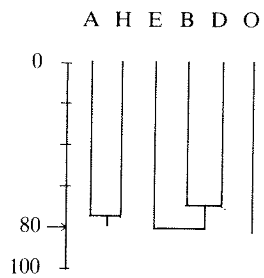
vervolgens:



A	H	E	B	D	O
0	75	95	100	100	100
	0	95	100	100	100
		0	80	90	100
			0	70	100
				0	100
					0

fig. 11

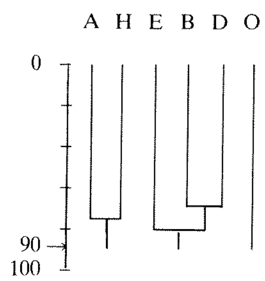
vervolgens:



A	H	E	B	D	O
0	75	95	100	100	100
	0	95	100	100	100
		0	80	90	100
			0	70	100
				0	100
					0

fig. 12

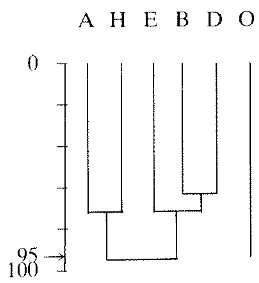
vervolgens:



A	H	E	B	D	O
0	75	95	100	100	100
	0	95	100	100	100
		0	80	90	100
			0	70	100
				0	100
					0

fig. 13

vervolgens:



A	H	E	B	D	O
0	75	95	100	100	100
	0	95	100	100	100
		0	80	90	100
			0	70	100
				0	100
					0

fig. 14

en tenslotte:

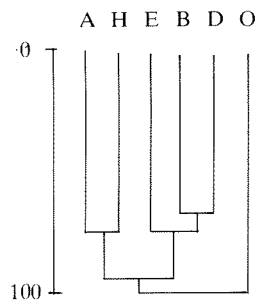


fig. 15

Duidelijk is de clustering te zien van B en D, later gevolgd door E aan de ene kant en A en H aan de andere kant. O valt helemaal uit de boot, in dit niet erg realistische geval.

De zojuist genoemde methode wordt echter niet vaak gebruikt. De reden daarvan kan worden geïllustreerd aan het volgende voorbeeld:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	10	20	35	60	60	70
2		0	15	40	60	70	70
3			0	50	75	75	80
4				0	30	40	45
5					0	5	20
6						0	20
7							0

levert de volgende boom:

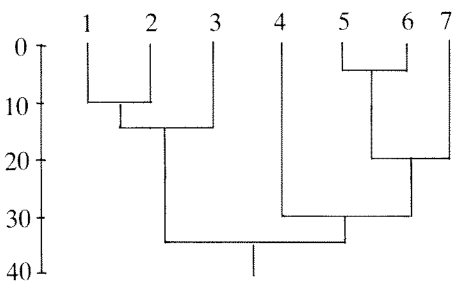


fig. 16

Het nadeel is nu dat 1, 2 en 3 nogal ver verwijderd zijn (in de matrix) van 5, 6 en 7: de kleinste afstand is 60. In het boomdiagram worden 1, 2 en 3 en 5, 6 en 7 al verbonden op niveau 35: door 'tussenkomst' van 4. Hierop is iets te vinden. Daarbij werken we met 'gemiddelde' afstanden:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	10	20	35	60	60	70
2		0	15	40	60	70	70
3			0	50	75	75	80
4				0	30	40	45
5					0	5	20
6						0	20
7							0

Stap 1: 5

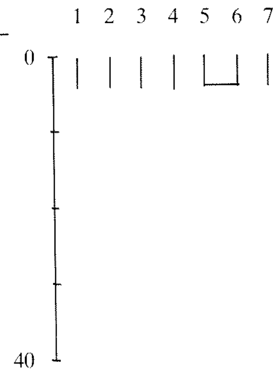


fig. 17

Stap 2
Omdat de eerste stap 5 en 6 clusterde gaan we de rijen en kolommen van 5 en 6 middelen.

1	2	3	4	5/6	7
0	10	20	35	60	70
	0	15	40	65	70
		0	50	75	80
			0	35	45
				•	20
					0

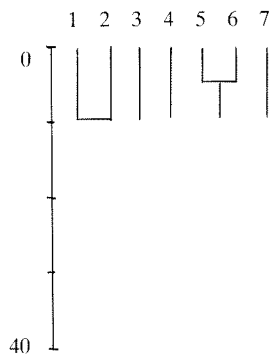


fig. 18

Hetzelfde nu met 1 en 2:

1/2	3	4	5/6	7
–	17,5	37,5	62,5	70
	0	50	75	80
		0	35	45
			–	20
				0

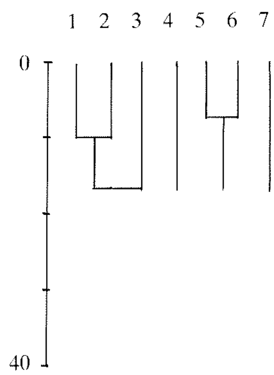


fig. 19

Op die manier doorgaand vinden we de boom van de volgende pagina.

Duidelijk is nu de boom, alhoewel niet verschillend qua structuur, veel beter in overeenstemming met de matrix.

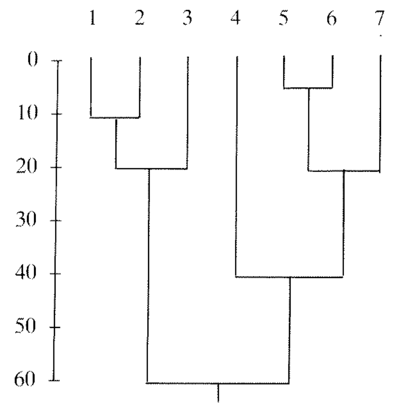


fig. 20

Kleuren

De vraag is wat je aan dit soort technieken hebt. Of zijn het misschien gewoon aaardigheidjes die 'zachte' disciplines wat harder maken?
Laten we de vraag in eerste instantie toespitsen op het voorbeeld van de letters.
Dat nut wordt misschien wat duidelijker als we het hele alfabet hadden onderzocht met de hele klas. In dat geval kun je alle individuele matrices vergelijken met de gemiddelde – zeg normale – matrix. Bepaalde afwijkingen in het horen kunnen zo worden opgespoord. Of, aan de hand van de 'normale' matrix kan worden bepaald welke letters 'irritant' dicht bij elkaar liggen. In het luchtvaartalfabet lagen bijvoorbeeld de one (1) en de nine (9) 'te' dicht bij elkaar, reden om 9 niet uit te spreken als nine (nain) maar als niner (nainer).
Zoals beloofd nu wat 'echte' voorbeelden.
Het gaat nu over 'waargenomen' afstanden van kleuren.

	1 RP	2 R	3 Y	4 GY1	5 GY2	6 G	7 B	8 PB	9 P1	10 P2
1. Red-Purple		7·1	10·2	11·1	12·5	11·8	9·9	8·6	4·3	2·9
2. Red	7·1		5·7	11·5	10·7	11·8	11·2	12·5	9·2	8·2
3. Yellow	10·2	5·7		6·7	8·9	9·4	11·3	12·5	11·9	10·5
4. Green-Yellow (1)	11·1	11·5	6·7		3·7	5·9	10·3	11·6	10·9	11·5
5. Green-Yellow (2)	12·5	10·7	8·9	3·7		3·6	8·2	9·8	11·3	11·1
6. Green	11·8	11·8	9·4	5·9	3·6		5·1	8·1	10·2	10·6
7. Blue	9·9	11·2	11·3	10·3	8·2	5·1		4·9	8·7	9·7
8. Purple-Blue	8·6	12·5	12·5	11·6	9·8	8·1	4·9		6·3	7·5
9. Purple (1)	4·3	9·2	11·9	10·9	11·3	10·2	8·7	6·3		3·0
10. Purple (2)	2·9	8·2	10·5	11·5	11·1	10·6	9·7	7·5	3·0	

	1 RP	2 R	3 Y	4 GY1	5 GY2	6 G	7 B	8 PB	9 P1	10 P2
1. Red-Purple		9·9	13·2	12·3	11·1	8·7	5·6	7·4	6·4	5·8
2. Red	9·9		7·3	7·9	6·9	6·8	9·9	13·1	12·7	12·1
3. Yellow	13·2	7·3		4·5	5·3	9·7	11·5	13·7	14·1	13·4
4. Green-Yellow (1)	12·3	7·9	4·5		5·3	8·6	12·5	13·4	14·1	13·1
5. Green-Yellow (2)	11·1	6·9	5·3	5·3		6·9	9·0	12·2	12·5	13·4
6. Green	8·7	6·8	9·7	8·6	6·9		6·7	9·7	11·3	9·9
7. Blue	5·6	9·9	11·5	12·5	9·0	6·7		5·5	7·4	5·4
8. Purple-Blue	7·4	13·1	13·7	13·4	12·2	9·7	5·5		4·2	4·0
9. Purple (1)	6·4	12·7	14·1	14·1	12·5	11·3	7·4	4·2		4·3
10. Purple (2)	5·8	12·1	13·4	13·1	13·4	9·9	5·4	4·0	4·3	

De eerste matrix geeft de afstanden tussen de kleuren zoals ervaren door iemand met een normaal kleuronderscheidingsvermogen. De tweede is van iemand die kleurenblind is. Dat zie je zo:
In de eerste plaats valt op dat de kleuren al in de 'natuurlijke' volgorde van de regenboog staan. Dat scheelt, de matrix zal dus vrijwel Robinson moeten zijn. Uiteraard is de werkelijkheid weer wat weerbarstig. De bijvoorbeeld 10e kolom van de 'normale' persoon is inderdaad perfect: de afstanden lopen mooi op, bereiken een maximum en lopen vervolgens weer af. Lang niet alle kolommen vertonen dit modelmatige gedrag. Wat ook mooi klopt is dat het 'maximum' in het midden ligt: de theoretisch maximale afstand resulteert ook in een waargenomen maximale afstand.
Vervolgens besteden we wat meer aandacht aan de matrix van de tweede persoon. Hier zien we flinke 'afwijkingen' van het normale patroon. Vergelijken we bijvoorbeeld de tweede rij van beide matrices. De kleurenblinde blijkt groen en rood tamelijk dicht bij elkaar te zien: d(R,G) = 6,8, een afstand die kleiner is dan bijvoorbeeld de afstand tussen rood en paars (van een normaal persoon).
De 'groene' kolom geeft nog meer aanwijzingen voor de afwijking: deze kolom is bepaald niet perfect Robinsons want de afstand van groen tot vrijwel elke kleur is min of meer hetzelfde.
Voor het geval de getalletjes voor u wat onontwarbaar zijn kunnen we weer terugvallen op 'kaarten'. En wel een tweedimensionale.

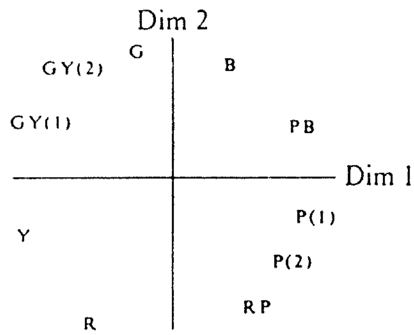


fig. 21

Dit is de kaart van de normale persoon. We zien de te verwachten kleurencirkel. De horizontale as is een soort Geel-Blauwe as, de verticale de Groen-Rode dimensie.

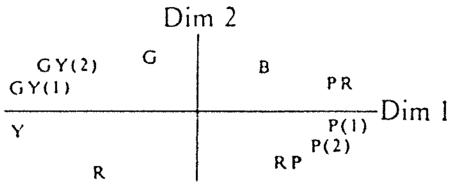
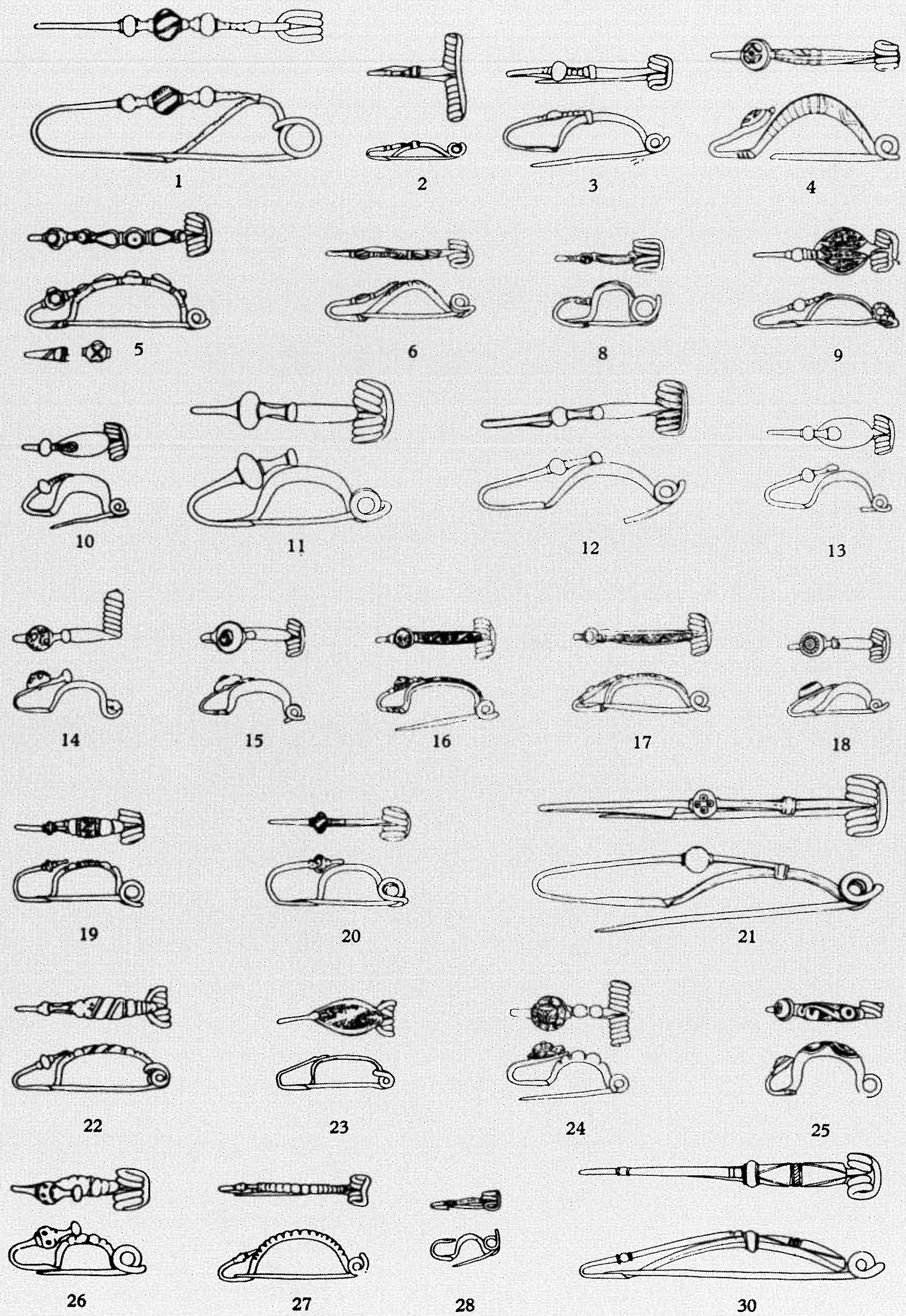


fig. 22

Uit de tweede kaart blijkt heel duidelijk de groen-rood-deficiëntie van de betreffende persoon. De cirkelvorm is verworden tot een ellips: er heeft een lijnvermenigvuldiging plaatsgevonden ten opzichte van de horizontale as met een factor van rond de 0,5.
Het laat zich raden hoe de kaart van een patiënt met een blauw-geel deficiëntie er uit zal zien.

Broches

Een heel ander voorbeeld komt uit de archeologie. Bijgaande plaat toont dertig broches van een opgraving die resten blootlegde van een nederzetting uit het ijzeren tijdperk bij Münsingen:


1
2
3
4
5
6
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
30

Hoe kun je deze broches nu classificeren? Dat is een kardinale vraag, niet alleen voor leken maar ook voor archeologen die hun intuïtie ook een rol zullen laten (moeten) spelen. Want, welke variabelen zijn nu belangrijk: de lengte, de vorm, de kop, de kromming, het materiaal? Sommige 'afstanden' zijn ook voor een leek duidelijk: 10, 15 en 18 moeten vlak bij elkaar komen te liggen. Maar uit de 1- en 2-dimensionale kaarten blijkt duidelijk dat 4 en 25 ook dicht bij elkaar liggen. Hetgeen althans te denken geeft voor wat betreft mijn archeologische intuïtie.

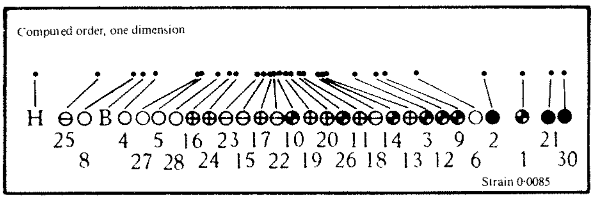


fig. 24 1-dim. kaart

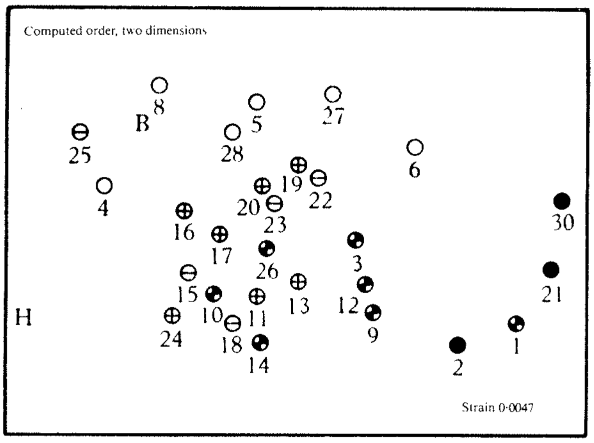


fig. 25 2-dim. kaart

Hoe construeer je nu zo'n afstandsmatrix als in het geval van de broches?
Ik noemde al vijf mogelijke variabelen: de lengte, de vorm, de kop, de kromming en het materiaal. Laten we aannemen dat we steeds een antwoord hebben dat te representeren is door een 0 of een 1 (bijvoorbeeld klein = 0, groot = 1 enz.).
Zes broches kunnen dan de volgende incidentiematrix opleveren.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
B_1	0	0	1	1	0
B_2	1	1	0	0	1
B_3	1	1	0	0	0
B_4	0	0	1	1	1
B_5	1	1	0	0	1
B_6	0	1	1	0	0

Voor de afstandsmatrix van de zes broches kunnen we nu gaan kijken op hoeveel plaatsen twee broches dezelfde getallen hebben staan.
Zo zal B_1B_2 het getal 0 opleveren en B_2B_3 een 4.
Dit levert de volgende afstandsmatrix op:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
B_1	5	0	1	4	0	3
B_2	0	5	4	1	5	2
B_3	1	4	5	0	4	3
B_4	4	1	0	5	1	2
B_5	0	5	4	1	5	2
B_6	3	2	3	2	2	5

Vervolgens proberen we er een Robinson-matrix van te maken; even goed kijken leverde mij de bijna perfecte, volgende, matrix op:

	B_1	B_4	B_6	B_3	B_2	B_5
B_1	5	4	3	1	0	0
B_4	4	5	2	0	1	1
B_6	3	2	5	3	2	2
B_3	1	0	3	5	4	4
B_2	0	1	2	4	5	5
B_5	0	1	2	4	5	5

Deze kunnen we nog meer in de 'afstandensfeer' brengen:

	B_1	B_4	B_6	B_3	B_2	B_5
B_1	0	1	2	4	5	5
B_4	1	0	3	5	4	4
B_6	2	3	0	2	3	3
B_3	4	5	2	0	1	1
B_2	5	4	3	1	0	0
B_5	5	4	3	1	0	0

Waarna het kaart tekenen – of een boomdiagram – kan beginnen. Maar nu al is duidelijk dat broche 2 en 5 in dezelfde cluster liggen en 1 en 4 in ieder geval 'dicht' bij elkaar, net als 2 en 5 en 6.

Morse

Tenslotte een ander 'echt' voorbeeld.
Iedereen heeft wel van 'Morse'-tekens gehoord. In Morse wordt A geseind als een streep – en een punt •, de B als –••• enz.
Een groot aantal personen (die nog geen Morse kende) kreeg twee Morse signalen achter elkaar te horen met een tussenpoos van 1,4 seconde. Ze moesten verklaren of de signalen hetzelfde of verschillend waren. Dit leverde de volgende frequentiematrix op:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
A	92	04	06	13	03	14	10	13	46	05	22	03	25	34	06	06	09	35
B	05	84	37	31	05	28	17	21	05	19	34	40	06	10	12	22	25	16
C	04	38	87	17	04	29	13	07	11	19	24	35	14	03	09	51	34	24
D	08	62	17	88	07	23	40	36	09	13	81	56	08	07	09	27	09	45
E	06	13	14	06	97	02	04	04	17	01	05	06	04	04	05	01	05	10
F	04	51	33	19	02	90	10	29	05	33	16	50	07	06	10	42	12	35
G	09	18	27	38	01	14	90	06	05	22	33	16	14	13	82	52	23	21
H	03	45	23	25	09	32	08	87	10	10	09	29	05	08	08	14	08	17
I	64	07	07	13	10	08	06	12	93	03	05	16	13	30	07	03	05	19
J	07	09	38	09	02	24	18	05	04	85	22	31	08	03	21	63	47	11
K	05	24	38	73	01	17	25	11	05	27	91	33	10	12	31	14	31	22
L	02	69	43	45	10	24	12	26	09	30	27	86	06	02	09	37	36	28
M	24	12	05	14	07	17	29	08	08	11	23	08	96	62	11	10	15	20
N	31	04	13	30	08	12	10	16	13	03	16	08	59	93	05	09	05	28
O	07	07	20	06	05	09	76	07	02	39	26	10	04	08	86	37	35	10
P	05	22	33	12	05	36	22	12	03	78	14	46	05	06	21	83	43	23
Q	08	20	38	11	04	15	10	05	02	27	23	26	07	06	22	51	91	11
R	13	14	16	23	05	34	26	15	07	12	21	37	14	12	12	29	08	87
S	17	24	05	30	11	26	05	59	16	03	13	10	05	17	06	06	03	18
T	13	10	01	05	46	03	06	06	14	06	14	07	06	05	06	11	04	04
U	14	29	12	32	04	32	11	34	21	07	44	32	11	13	06	20	12	40
V	05	17	24	16	09	29	06	39	05	11	26	43	04	01	09	17	10	17
W	09	21	30	22	09	36	25	15	04	25	29	18	15	06	26	20	25	61
X	07	64	45	19	03	28	11	06	01	35	50	42	10	08	24	32	61	10
Y	09	23	62	15	04	26	72	09	01	30	12	14	05	06	14	30	52	05
Z	03	46	45	18	02	22	17	10	07	23	21	51	11	02	15	59	72	14
1	02	05	10	03	03	05	13	04	02	29	05	14	09	07	14	30	28	09
2	07	14	22	05	04	20	13	03	25	26	09	14	02	03	17	37	28	06
3	03	08	21	05	04	32	06	12	02	23	06	13	05	02	05	37	19	09
4	06	19	19	12	06	25	14	16	07	21	13	19	03	03	02	17	29	11
5	08	45	15	14	02	45	04	67	07	14	04	41	02	00	04	13	07	09
6	07	80	30	17	04	23	04	14	02	11	11	27	06	02	07	16	30	11
7	06	33	22	14	05	25	06	04	06	24	13	32	07	06	07	36	39	12
8	03	23	40	06	03	15	15	06	02	33	10	14	03	06	14	12	45	02
9	03	14	23	03	01	06	14	05	02	30	06	07	16	11	10	31	32	05
Ø	09	03	11	02	05	07	14	04	05	30	08	03	02	03	25	21	29	02

	S	T	U	V	W	X	Y	Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Ø
A	23	06	37	13	17	12	07	03	02	07	05	05	08	06	05	06	02	03
B	18	02	18	34	08	84	30	42	12	17	14	40	32	74	43	17	04	04
C	14	06	06	11	14	32	82	38	13	15	31	14	10	30	28	24	18	12
D	29	06	17	20	27	40	15	33	03	09	06	11	09	19	08	10	05	06
E	07	67	03	03	02	05	06	05	04	03	05	03	05	02	04	02	03	03
F	14	02	21	27	25	19	27	13	08	16	47	25	26	24	21	05	05	05
G	05	03	15	14	32	21	23	39	15	14	05	10	04	10	17	23	20	11
H	37	04	36	59	09	33	14	11	03	09	15	43	70	35	17	04	03	03
I	35	16	10	05	08	02	05	07	02	05	08	09	06	08	05	02	04	05
J	02	07	09	09	09	22	32	28	67	66	33	15	07	11	28	29	26	23
K	02	02	23	17	33	63	16	18	05	09	17	08	08	18	14	13	05	06
L	12	05	16	19	20	31	25	59	12	13	17	15	26	29	36	16	07	03
M	07	09	13	04	21	09	18	08	05	07	06	06	05	07	11	07	10	04
N	12	10	16	04	12	04	06	11	05	02	03	04	04	06	02	02	10	02
O	03	04	11	14	25	35	27	27	19	17	07	07	06	18	14	11	20	12
P	09	04	12	19	19	19	41	30	34	44	24	11	15	17	24	23	25	13
Q	02	03	06	14	12	37	50	63	34	32	17	12	09	27	40	58	37	24
R	16	02	23	23	62	14	12	13	07	10	13	04	07	12	07	09	01	02
S	96	09	56	24	12	10	06	07	08	02	02	15	28	09	05	05	05	02
T	07	96	08	05	04	02	02	06	05	05	03	03	03	08	07	06	14	06
U	51	06	93	57	34	17	09	11	06	06	16	34	10	09	09	07	04	03
V	11	06	32	92	17	57	35	10	10	14	28	79	44	36	25	10	01	05
W	12	04	19	20	86	22	25	22	10	22	19	16	05	09	11	06	03	07
X	12	03	12	17	21	91	48	26	12	20	24	27	16	57	29	16	17	06
Y	07	04	06	13	21	44	86	23	26	44	40	15	11	26	22	33	23	16
Z	04	03	09	11	12	36	42	87	16	21	27	09	10	25	66	47	15	15
1	04	02	03	12	14	17	19	22	84	63	13	08	10	08	19	32	57	55
2	05	03	06	10	11	17	30	13	62	89	54	20	05	14	20	21	16	11
3	07	06	04	16	06	22	25	12	18	64	86	31	23	41	16	17	08	10
4	09	03	17	55	08	37	24	03	05	26	44	89	42	44	32	10	03	03
5	27	02	14	45	07	45	10	10	14	10	30	69	90	42	24	10	06	05
6	14	03	12	30	09	58	38	39	15	14	26	24	17	86	69	14	05	14
7	06	02	03	13	09	30	30	50	22	29	18	15	12	61	85	70	20	13
8	06	04	06	07	05	24	35	50	42	29	16	16	09	30	60	89	61	26
9	06	07	06	03	08	11	21	24	57	39	09	12	04	11	42	56	91	78
Ø	03	04	05	03	02	12	15	20	50	26	09	11	05	22	17	52	81	94

fig. 26

Deze tabel is ook als afstandsmatrix te interpreteren, zoals we reeds zagen. De bijbehorende 2-dimensionale kaart ziet er zó uit:

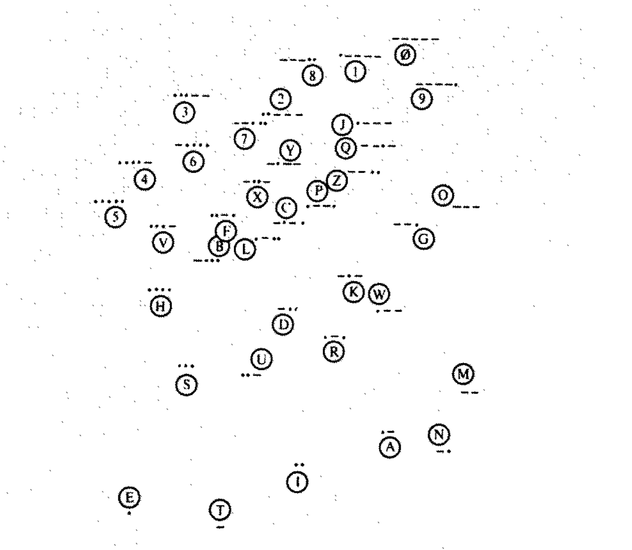


fig. 27

Als u even kijkt dan ziet u waarschijnlijk al snel een opmerkelijke structuur in deze kaart. We verklappen hem direct: onder in de kaart ziet u de letters die worden voorgesteld door 1 sein.
Bovenin zitten de meer complexere: de letters die door 4 seinen worden gerepresenteerd. Maar er loopt ook nog een verticale structuur door de kaart en die was nogal verrassend: links vinden we de punten, rechts de strepen. Verder toont de kaart duidelijk de zwakke punten van het Morse-alfabet: de F,B,L cluster, de K,W, de P,Z en de J,Q cluster.

Slot

Om te voorkomen dat u of in slaapt valt dan wel hoofdpijn krijgt zullen we het er voor dit artikel bij laten. Maar ik zal in één van de volgende Nieuwe Wiskranten graag nog wat verder ronddolen in dit merkwaardige gebied van de wiskunde. Vaag, onduidelijk, soms lastig maar toch ook vaak verrassend in z'n resultaten. Mocht u uitgekeken zijn op het eiland Hau of de Klapmutsen dan liggen hier weer geheel nieuwe mogelijkheden om met matrices te werken in zinvolle contexten.