Meetkunde –

Van 'Ik zie het zo' tot 'Hoe weet ik dat?'

H. Freudenthal
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

Na het falen van "New Math" valt er een come-back van de meetkunde te constateren – schuchter en nog niet duidelijk geprofileerd. Wat voor meetkunde moet het worden. Weer deductief of aanschouwelijk?
Euclides was niet erg deductief en deed een groot beroep op de aanschouwing. Wanneer is "dat zie je zo" toegestaan en in welke gevallen kun je het nooit zó zien?

Waren Euclides' *Elementen* ooit als leerboek bedoeld en zo ja, voor wie?
In elk geval was hetgeen tot in deze eeuw toe in Engeland als 'Euclid' onderwezen werd, bij ons als meetkunde en elders als géometrie, Geometrie, enz. een na flinke verwatering even flink aangedikte versie: Verwatering door eruit weg te spoelen wat uit de hoogte gezien de essentie was van wat er uit de laagte gezien overtollig leek. Aangedikt met oefenstof bedoeld om het begrip te toetsen maar waar dan toch weer op werd geoefend. Toch was er in principe qua leerstof en aanbieding sinds Euclides niets veranderd: meetkunde voor een kleine fractie van de jeugd, maar ook daar niet aan besteed en naarmate de vraag naar onderwijs groeide, steeds minder functioneel. Dit was dan de oorzaak waarom tegen het einde van de zestiger jaren de meetkunde praktisch uit het onderwijs verdween om – eerlijkheidshalve dient dat vermeld – vervangen te worden door iets dat op zijn minst even disfunctioneel was, maar gemakkelijker om te vertoetsen.

Mijn *Mathematik als Pädagogische Aufgabe* bevat een hoofdstuk 'Der Fall der Geometrie' met onder de titel als motto 'Hochmut kommt vor dem Fall' – een niet te vertalen woordenspel. 'Hochmut' is wellicht een te harde kwalificatie, maar van de geest die nog in het midden van deze eeuw het wiskunde-onderwijs beheerste – althans trachtte te beheersen – getuigt treffend een uiting van E.W. Beth:

> Le rôle de la formation mathématique dans l'enseignement secondaire consiste presque exclusivement, me paraît-il, à familiariser les élèves avec la méthode déductive.

Lukt dat niet met de meetkunde dan moet het maar met Bourbaki, met verzamelingenleer, abstracte algebra en logica. E.W. Beth was hier de spreekbuis van een internationale groep (zie J. Piaget et alii, *L'enseignement mathématique*, Neuchâtel 1955), die haar eerste openbare overwinning zou behalen in 1959, in Royaumont. Hoe de zegetocht van New Math uiteindelijk op een smadelijke nederlaag zou uitlopen, zal de lezer wel bekend zijn.
Uiteraard is er telkens verzet tegen deze visie op wiskunde-onderwijs aangetekend. Euclides 3 bijvoorbeeld bevat een artikel van Van Dantzig 'Over de maatschappelijke waarde van onderwijs in de wiskunde'.
Mevrouw Ehrenfest koesterde ideeën over meetkunde als ruimtelijke ervaring. Rijke context – zouden we tegenwoordig zeggen – maar bij Mw. Ehrenfest dan uitsluitend als propaedeuse, voorafgaande aan een liefst nog strakker, nog meer deductief uitgelijnd onderwijs.
Na het falen van New Math valt er een come-back van de meetkunde te constateren – nog schuchter en nog niet duidelijk geprofileerd. Aanschouwelijk of deductief? Of allebei, en zo ja, een mengsel of een sequentie en waar zou zo'n sequentie door zijn bepaald?

Laten we eventjes nog eens Euclides oproepen. Euclides – in het origineel of in wat er tot in deze eeuw op school voor doorging – was in feite helemaal niet zo deductief. In elk geval geen deductief *stelsel* en derhalve voor de New-Math-beulen ook niet deductief genoeg – 'à bas Euclide'.
In Euclides' *Elementen* onderscheidt men *stellingen* en *constructies*, respectievelijk herkenbaar door de

slotzin 'hetgeen moest worden bewezen' en 'hetgeen moest worden gemaakt', hoewel ook elke constructie door een bewijs wordt afgerond – veelal een schijnbewijs, want het eigenlijke bewijs is in de constructie zelf ingebakken: de tekening van een gelijkzijdige driehoek is geslaagd en daarmee is de kous af. Een tekening als bewijs? Euklid was in dit opzicht kieskeuriger dan zijn voorgangers, maar bepaald niet van smetten vrij.
In elk geval bij het definiëren was de tekening, het visuele, onmisbaar. Wat is een rechte lijn, wat een driehoek, een parallellogram, wat zijn congruente figuren, nevenhoeken, parallellen?
Euclides' waslijst van definities is een doorlopend beroep op de aanschouwing, terwijl haast geen van die definities echt deductief wordt toegepast. Zodoende zijn de *Elementen* een vreemd mengsel van aanschouwelijkheid en deductiviteit. Onsystematisch, veeleer historisch bepaald, wellicht niet eens authentiek Euclides.
Laat ik voorbeelden aandragen.

Parallellen

Eens hoorde ik een elfjarige spontaan uitroepen: 'Parallellen snijden elkaar nooit.' Ik reageerde weer eens verkeerd. 'Hoe is het met lijnen gesteld die elkaar nooit snijden, zijn die parallel?'
Aarzelend antwoordde hij met door vorken in de lucht gerepresenteerde, dus met kruisende lijnen. Pas als ze in één vlak liggen, wordt het menens. Jammer genoeg heb ik niet geïnformeerd wat hij met 'parallel' bedoelde. Ik had er wat van kunnen leren. Bij Euclides zijn het lijnen in het vlak – eigenlijk lijnstukken – die hoe ook verlengd elkaar nooit treffen. Vreemd – zo'n negatieve definitie! Ten tijde van Euclides was zij gloednieuw, misschien zijn eigen vondst. Een generatie vóór Euclides, bij Aristoteles, hoorde het nog tot de theoretische denkbaarheden dat parallellen elkaar wel zouden kunnen snijden, met al die theoretische gevolgen van dien, bijvoorbeeld voor de hoekensom in een driehoek.
Het Griekse 'parallelos' betekent: 'langs elkaar', maar die etymologie helpt ons niet verder als we willen weten hoe ze vóór Euclides parallellen definieerden.
Misschien helemaal niet. Want wat parallellen waren, wist – onder deze naam of intuïtief – iedere timmerman, meubelmaker, wever, kleermaker, schrijver – als ik daar de tekenaars en de landmeters nog bijhaal zit ik al vlak tegen de meetkunde aan.

Beter vraagt men misschien: hoe *maakte* men parallellen? Ik weet niet of er toen al tekenplanken en tekenhaken bestonden waar je driehoeken langs schoof, maar iets in die geest kun je je voorstellen als middel om parallellen te construeren.
Of zo iets als loodlijnen van gelijke lengte naar dezelfde kant van die lijn waar je een parallellijn wilt langsleggen. Achter zo iets schuilt natuurlijk, wellicht onuitgesproken, een definitie van 'parallel'. In tegenstelling met die van Euclides zou ik dit soort definitie van 'parallel' als lokaal willen karakteriseren. Daartegenover is die van Euclides waar men de lijnstukken – wie weet hoever – moet verlengen, 'globaal'.

Euclides laat natuurlijk ook zien (I 31) hoe men bij een lijnstuk BC door een punt A de parallellijn vindt. Dè parallel – zeg ik – want inmiddels heeft hij uit het vermaarde vijfde Postulaat de uniciteit afgeleid, hoewel al vroeger (I 16) een, zij het dan impliciete, parallellenconstructie was uitgevoerd. Maar laten we eerst naar de expliciete (I 31) kijken, een tekenhaakconstructie als het ware (fig. 1)

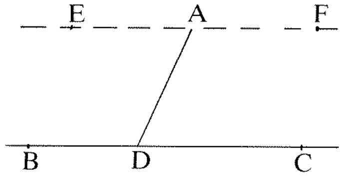

fig. 1

Euclides neemt op het lijnstuk BC een punt D aan en legt $\angle$ ADC als verwisselende hoek aan AD aan, dus $\angle$ ($\angle$ADC =$\angle$DAE).

En nu de impliciete constructie die achter I 16 schuilt (fig. 2). Die zou er ongeveer als volgt uitzien:

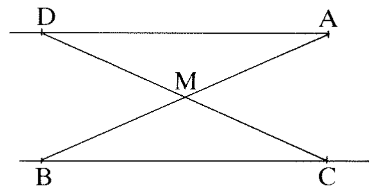

fig. 2

Trek en halveer het lijnstuk AB en wel in M; trek en verdubbel CM door M heen naar D.
Als je het niet al met het blote oog ziet, mag je je op de centrale symmetrie rond M beroepen om BC en AD als parallellen te herkennen. Of je mag dankzij het geval ZHZ de congruentie van MBC en MAD en dus de gelijkheid van de resterende hoeken bewijzen.
Maar je mag het ook doodgewoon als definitie van parallellisme beschouwen – een definitie van 'parallel' als het ware door middel van een parallellogramconstructie (BCAD).

In elk geval weer een 'lokale' definitie zoals ze nog ten tijde van Aristoteles gebruikelijk moeten zijn geweest. Want hoe had Aristoteles anders ook maar kunnen overwegen dat parallellen elkaar snijden?

Wat valt er nu op al die lokale definities van 'parallel' aan te merken? Laten we de 'tekenhaak'-definitie bekijken. Op zeker ogenblik moet een slimmerik hebben opgemerkt, dat die constructie van de keuze van punt D afhing, hoe weet ik dat er hetzelfde uitkomt als ik D vervang door een D', eveneens op BC gelegen? (fig. 3)

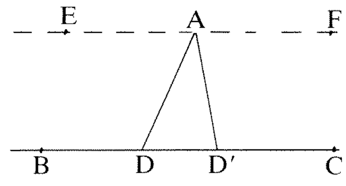

fig. 3

Heel eenvoudig – zou het antwoord geweest kunnen zijn – in driehoek ADD′ is de buitenhoek bij D′ gelijk aan de som van de binnenhoeken bij A en D, dus na optellen

$$\begin{array}{l} \angle CDA = \angle EAD \\ \underline{\angle DAD' = \angle D'AD} \\ \angle CD'A = \angle EAD' \end{array}$$

Dus leidt het aanleggen als verwisselende hoek bij AD′ in plaats van AD tot hetzelfde resultaat.

'Akkoord' – had die slimmerik kunnen insisteren – 'maar hoe weet je dat in een driehoek een buitenhoek gelijk is aan de som van de overslaande binnenhoeken?' 'Ja natuurlijk, omdat vanouds – sinds de Pythagoreërs of zelfs Thales – de hoekensom in de driehoek gelijk aan twee rechte hoeken was.'
'En hoe weet je dat?' En dan zou er zo'n bewijs zijn geleverd, bijvoorbeeld voor driehoek ADD′, waarbij door A de lokale parallel bij DD′ zou zijn getrokken (met de verwisselende hoek volgens D of volgens D′): ronddraaien in een kringetje.

De andere lokale definities van 'parallel' lijden aan een dergelijk euvel.
Bij het oprichten van evenlange loodlijnen, kan het een rol spelen *waar* die worden opgericht. Of bij fig. 2: Maakt het dan niets uit hoe de punten B, C op hun lijn zijn gekozen?
Zo zit je dus in de knoop en Euclides schijnt degene te zijn geweest die hem door heeft gehakt: de voor de hand liggende constructieve lokale definitie van 'parallel' vervangen door de vergezochte abstracte globale definitie en daarboven op het parallellenpostulaat om de ondubbelzinnigheid van de constructie te garanderen.

Kun je het zo zien?

Of je met parallellen begint of met de hoekensom in de driehoek – het doet er niet toe. De hoekensom in de driehoek 'zie je niet zo'.
In het Engelse meetkunde-onderwijs is het dus van ouds: de hoeken laten nameten en optellen en zweren dat het – goed gemeten – 180° had moeten wezen. Of ietwat moderner: de hoeken afknippen en aan elkaar zetten om ze een hoek van 180° te laten opvullen. Allebei volgens mij averechts gedoe.
Het gaat rechtstreeks in tegen wat de opgroeiende mens – nog lang vóór zijn eerste meetkundeles als meetkunde beleeft, tegen het 'ik zie het zo'. Rechte lijnen, parallellen, rechthoeken en symmetrieën zie je zo. Preciezer: je ziet zo of lijnen als recht bedoeld zijn, vierhoeken als rechthoekig, figuren als symmetrisch; je ziet het zonder passen en meten en dat is de zin van de meetkunde. Misschien is die ideale tekenplank al in onze hersens voorgeprogrammeerd, maar in elk geval wordt het je vanaf de wieg voorgehouden en – speciaal wat symmetrie betreft – met de paplepel ingegoten.

Dat in de cirkel (fig. 4) met de middellijn AB de hoek bij C recht is – desgevraagd zal ieder het beamen. Met het te laten nameten zoals in het empiristisch meet-

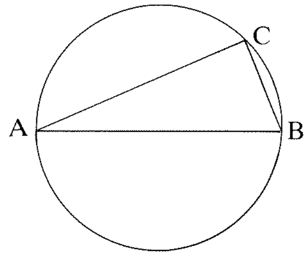

fig. 4

kundeonderwijs geschiedt ga je dwars tegen de geest van de meetkunde in. Kun je het zo zien? Misschien, maar dan niet zonder je af te vragen hoe. Een twaalfjarige vulde spontaan de figuur symmetrisch aan (fig. 5).

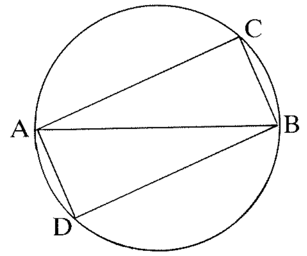

fig. 5

Hoe wist hij dat ACBD een rechthoek was?
Een parallellogram met gelijke diagonalen. Ik had door moeten vragen, want rechthoeken teken je anders alleen horizontaal en verticaal.
Kun je zó zien dat parallellen elkaar niet snijden? Misschien. Denk maar aan spoorrails en ruitjespapier. Of dat de hoekensom in de driehoek gelijk aan twee rechte hoeken is? Het hangt ervan af in welke sequentie de vraag opduikt – als leermeester of leerboekschrijver kun je zo iets slim organiseren. In rechthoeken – die kom je overal tegen – is de hoekensom uiteraard vier rechte hoeken. Een rechthoekige driehoek tot een rechthoek 'verdubbelen' – het is snel gedaan en misschien nog sneller gezien. Dat was dan de hoekensom in de rechthoekige driehoek. En een willekeurige?
Je moet een hoogtelijn maar zien om hem in twee rechthoekige te splitsen.
Een sequentie van zien en doen die je terug kunt aflopen door je telkens af te vragen 'hoe weet ik dat?'

Congruentie

Het meetkunde-onderwijs van weleer ging ervan uit dat je congruentie speciaal van driehoeken – niet zo kon zien. Of erger, de leerlingen werden er in geoefend congruentie niet te zien. En dat terwijl ze bij het puzzelen er blijk van gaven dat ze met congruentie konden omgaan. Puzzelstukjes schuiven, draaien, inpassen terwijl het oog de hand leidt is de opstap naar het overbrengen van meetkundige figuren met passer en liniaal en van zijn kant is dat weer de opstap naar het formuleren van de zogenaamde congruentiegevallen als je maar niet van de congruentiegevallen een ritueel maakt.

Neem bijvoorbeeld het overbrengen van een hoek. U kent de klassieke methode (fig. 6):

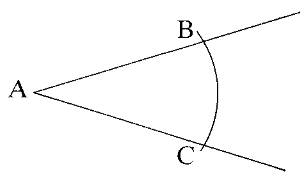

fig. 6

een cirkel met als middelpunt A snijdt de benen in B en C en die figuur breng je over door BC tussen de passerpunten te nemen. Congruentiegeval ZZZ – zou je zeggen, maar in feite is wat je in gedachten tussen de passerpunten neemt, niet het lijnstuk, maar de boog BC als hoekenmaat.
Ik zie geen noodzaak om bij deze constructie door te vragen 'hoe weet je dat?', maar als iemand zichzelf afvraagt 'hoe weet ik dat?' mag men hem best met ZZZ op weg helpen.

Symmetrie

In veel gevallen doet congruentie niet echt ter zake. Symmetrie – een speciaal geval van congruentie – is veelal het aangewezen structuurmiddel om orde te scheppen. Ik vermoed dat de bewustwording omtrent symmetrieën het begin van de meetkunde markeert. Volgens de traditie zou Thales van Milete de eerste meetkundige zijn geweest. De stellingen die volgens deze traditie met zijn naam zijn verbonden, hebben allemaal met symmetrie te maken. Ook de stelling van de omtrekhoek in de halve cirkel hoort erbij. Het is niet bekend hoe hij hem zou hebben bewezen, maar het verhaal dat ik bij fig. 5 heb verteld lijkt me helemaal niet gezocht als verklaring. (Thales in verband brengen met de stelling over evenredigheid bij homothetische driehoeken is een uitvinding van Franse leerboek-auteurs.)

Centrale symmetrie is ook wat aan de met fig. 1-2 verbonden uitspraken ten grondslag ligt en wederom: wie zichzelf afvraagt 'hoe weet ik dat' mag men best met de verwijzing naar de centrale symmetrie op weg helpen.

Een vierkant met een ingeschreven vierkant (fig. 7)

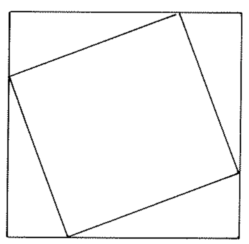

fig. 7

– je ziet zo dat dit opgaat, maar je kunt het ook met viertallige symmetrie onderbouwen. Of een voorbeeld dat ik herhaaldelijk heb aangehaald. Hoe weet je dat de diagonalen van een parallellogram elkaar middendoor delen? Wie het vlak met congruente parallellogrammen plaveit, voelt en ziet dat elk parallellogram ook 'omgekeerd' in zijn gat past, met de diagonalen omgekeerd en dus hun snijpunt als symmetriecentrum (fig. 8).

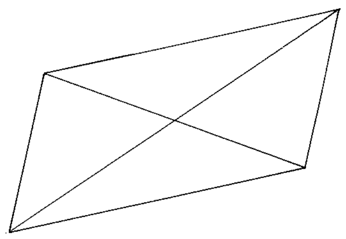

fig. 8

Een cirkel door drie gegeven punten? Laten we met twee genoegen nemen, A en B.
Hannesen met de passer tot je een plaats voor de punt vindt. En dan de blikwisseling naar cirkels toe met gelijke stralen om A en B en hun snijpunten. En wederom een blikwisseling om de middelloodlijn van AB als symmetrie-as van het puntenpaar A, B te herkennen.

En dan met drie punten. Je ziet zo dat de middelloodlijnen door één punt gaan. Ook als ze het niet doen. Je ziet het op de ideale tekenplank.

Gelijkvormigheid

Gelijkvormigheid komt in de ontwikkeling van de mens misschien nog vóór congruentie. Om een voorwerp van verschillende afstanden gezien als hetzelfde te onderkennen moet er iets in onze hersenen voorgeprogammeerd zijn. Bij het op schaal reproduceren of als gereproduceerd herkennen van voorwerpen wordt men meteen met evenredigheden geconfronteerd – een goede opstap naar al die praktische toepassingen toe van evenredigheden, ook buiten de meetkunde.
Maar in wat men traditioneel meetkunde noemt, is de gelijkvormigheid vooral vruchtbaar dankzij de kunstgrepen die men uithaalt door middel van de equivalentie van

$$a : b = a' : b'$$

en

$$ab' = a'b,$$

vooral als men zo'n produkt als oppervlak van een rechthoek interpreteert – een equivalentie die je in elk geval niet zó ziet. Hoe is de mensheid eraan gekomen? Numeriek? Het ligt nogal voor de hand. Of zoals het bij Euclides staat? (fig. 9)

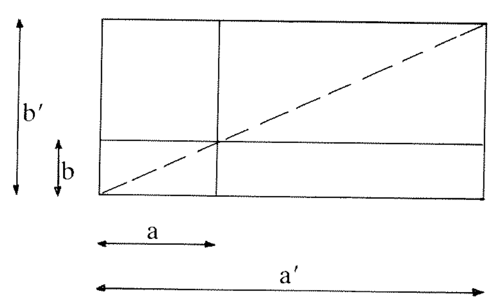

fig. 9

Je kunt wel zien dat die twee rechthoeken daar gelijke oppervlakte hebben, maar niet in één oogopslag, niet zó. Hier ben je echt toe aan het redeneren. Eenvoudig redeneren, maar toch, en niet voor iedereen weggelegd.

Met 'Pythagoras' is het van hetzelfde laken een pak. Die zie je niet zó – ook niet met wat hulplijnen. Eén is trouwens voldoende: de hoogte op de schuine zijde. Ook dan is het weer redeneren. Eenvoudig, maar toch, en ook niet iets waar iedereen aan toekomt.

Tot slot

Op 'hoe weet je dat?' is 'ik zie het zo' een geldig antwoord. Doorvragen mag wel met zonodig wat hulp bieden. Bij het doorvragen kun je best in een kringetje ronddraaien. Het is niet erg. Want waar het op aan komt is verbanden zien. Bijvoorbeeld van het parallellenpostulaat naar de hoekensom in de driehoek toe of net omgekeerd.
Maar uiteindelijk belangrijker dan 'hoe weet je dat?' is de vraag 'hoe weet ìk dat?' 'Hoe weet je dat?' dus als opstapje naar 'hoe weet ìk dat?' Trouwens niet alleen in de meetkunde.
