Oude en nieuwe records in de kubus: 16 ruimtepuzzels

A.J. Goddijn
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

Sinds Aad Goddijn officieel is toegetreden tot de redactie als puzzelredacteur, lijkt hij niet meer te stoppen. Deze aflevering bevat, zoals de titel reeds aangeeft, een hele serie puzzels. Daarom dus geen puzzel maar een puzzelartikel. Aan de slag!

Even iets regelen!

Deze Nieuwe Wiskrant komt een beetje snel na de vorige uit. Geen tijd om reacties van lezers te verwerken dus. Oplossingen voor de vragen rond vierkanten in het oktobernummer kunnen nu ingezonden worden tot 15 februari 1987.
Dat is dan ook de sluitingsdatum voor de ruimterubriek van deze keer.
Reacties op vorige opgaven zijn trouwens ook na zo'n datum welkom, alleen is vermelding in de aansluitende Wiskrant dan niet altijd mogelijk.

Correcties vorige keer

Opgave 12 luidde:
Noem drie romans, verhalen, toneelstukken, films, musicals, operettes, moppen of stripboeken waarin een wiskundeleraar of -lerares en positieve, vriendelijke, menselijke rol speelt.
Om het iets makkelijker en veel interessanter te maken breiden we de zaak wat uit:

- Balletten, mime-voorstellingen, videoclips, liedjes, cabaretnummers, gedichten: het mag natuurlijk allemaal.
- Negatief afgeschilderde docenten verzamelen we ook. Nu is er keus genoeg!
- Het hoeft geen traditionele schoolsituatie te zijn, als het maar om wiskunde gaat. Socrates, die een slaaf helpt de kennis over het verdubbelen van een vierkant in eigen ziel te ontdekken, mag dus ook. Tja, dat is nu eenmaal de leertheorie die Plato in zijn dialoog Meno met dat voorbeeld uitlegt.

In opgave 14c is een zetfoutje door de mazen van het net geglipt. Lees 'q bij q' i.p.v. '9 bij 9'. En als in de vorige zin de twee fragmenten tussen aanhalingstekens toch nog erg op elkaar lijken: het gaat om 'ku-bij-ku'.

De ruimte in

Na de vierkanten in het platte vlak van de vorige rubriek nu het ruimteobject par excellence: de kubus.
Met de parabool hoort de kubus zeker tot de meest afgekloven objecten van het wiskunde-onderwijs.
Zouden er nog wel nieuwe avonturen in te beleven zijn? Ook voor leerlingen die wat snel door de gewone stof heenschieten zou dat aardig zijn. In de volgende reeks van 16 opgaven is vast wel iets te vinden, dat te gebruiken is.
Er zijn een paar oude bij, maar ook veel onbekende.
Sommige opgaven vragen naar 'records'.
Zo bijvoorbeeld bij:

Opgave 21
Hoeveel houten kubusjes van 1 bij 1 cm kunnen in een kubus van 2,99 bij 2,99 bij 2,99 cm opgeborgen worden?

Nu is '8' een goed antwoord, maar niet het beste. '27', dat is zeker fout. Wie durft een hogere score aan in het tussengebied?
Het record-tot-nu-toe staat op 11. Kan het hoger? Of kan bewezen worden dat 12 niet kan?
Bij enkele van de volgende opgaven kan het absolute record wel gevonden worden. Met bewijs dat inderdaad ... enz. Succes!

Zuinige Spinnewebben

In een kubusvormig hol van 1 bij 1 bij 1 m zit een spin. Zij spint webben in deze ruimte.

Opgave 22
Via haar eerste web zijn alle 6 zijvlakken van de kubus bereikbaar. Het web bestaat uit 3 draden spinrag van 1 m, die ieder de middens van overstaande vlakken verbinden. In het midden zitten die draden aan elkaar, zodat er inderdaad verbinding tussen alle vlakken is. Help de spin aan een plan voor een zuiniger web dat alle vlakken verbindt.

Opgave 23
Even de ragebol door het hol, alles weer leeg. Nu een nieuw web maken dat alle 12 ribben met elkaar verbindt. En zuinig met spinrag!

De volgende is te voorspellen:

Opgave 24
Vind een zo klein mogelijk web dat de 8 hoekpunten bereikt.

Een voorbeeld bij opgave 24 is een draad die via de ribben van hoekpunt tot hoekpunt loopt. Met 7 m zijn we dan klaar. Dit is natuurlijk niet het zuinigste web, maar het record tot nu toe (voor zover mij bekend) is nog geen 12% minder!

Zuinig zagen en lijmen

Een kubus, van hout bijvoorbeeld, kan met 2 zaagsneden in 3 plakken van gelijke dikte worden verdeeld. Met de 3 plakken op elkaar herhalen we de zaaghandeling, nu in een andere richting. Daarna nog eens. Enfin, we hebben 6 keer de zaag in het hout gezet en zitten nu met 27 kleine kubusjes en de volgende problemen.

Opgave 25
Als we tussentijds de houtstukken handig op elkaar leggen, moet het toch met minder keren zagen kunnen? Of niet soms?

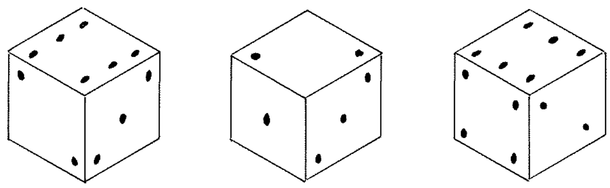
Opgave 26
De 27 kleine kubusjes staan opgestapeld in 3 bij 3 bij 3 slagorde. In één kubusje zit een houtworm. Die vreet zich van kubusje naar kubusje, steeds door de klein zijvlakjes, een weg. Komt de houtworm op punt van uitgang terug na alle kubusjes één keer doorgegaan te zijn?

Dat was een oude opgave uit het IOWO-pakketje '*Regelmatige Figuren*'. Daar stond er een tekening bij en als u er zò niet uitkomt, bestelt u dat pakketje maar even om te zien wat er méér in de tekening staat dan in opgave 26!

Opgave 27
Het wordt tijd de 27 kubusjes weer aan elkaar te lijmen.
We doen dat met z'n drieën samen. Ieder lijmt er 9 aan elkaar.
Het moet zo gebeuren dat er 3 gelijkvormige objecten ontstaan, die samen de $3 \times 3 \times 3$ kubus vormen.
Kan het anders dan in 3 plakken van 3 bij 3?

Kubussen van meer kanten gezien

Hier zijn drie aanzichten van één en dezelfde kubus:



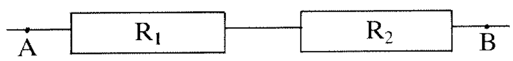
I I III

Opgave 28
Hoeveel stippen staan op de onderkant in het eerste plaatje, tegenover de 6 stippen dus?

Weerstand in de Ribben

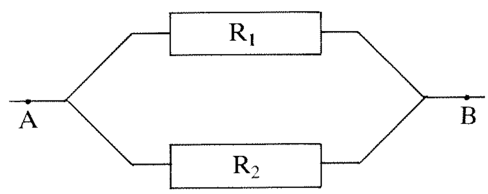
Voor dit onderdeel is enige elementaire electronicakennis nodig. Het gaat om parallel- en serieschakeling van weerstanden. Dat bestond ook al in het buizentijdperk, dus dat zullen de meeste lezers nog wel ooit eens op school gezien hebben.
Toch een korte herhaling.

a. Serieschakeling



Twee weerstanden ter grootte van R_1 en R_2. De hele weerstand tussen A en B, de vervangingsweerstand R_v is groter dan elk van de twee. Precies: $R_v = R_1 + R_2$.

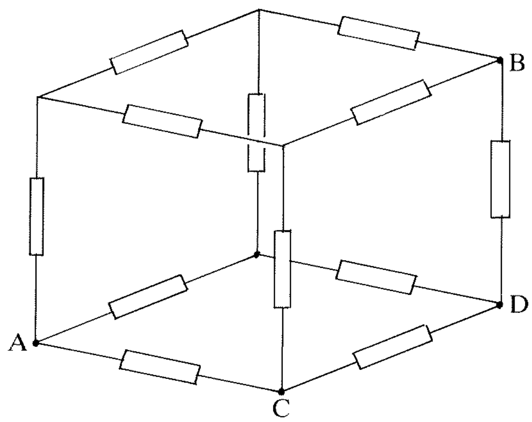
b. Parallelschakeling



In deze schakeling kan de stroom makkelijker van A naar B lopen dan wanneer er maar één weerstand, R_1 of R_2, zou zijn. De vervangingsweerstand R_v is dus kleiner dan R_1 en R_2.

Precies: $\dfrac{1}{R_v} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

Tot zover de herhaling. Nu de kubus erbij. In deze paragraaf is elke ribbe een weerstand van 1 Ohm ('Ohm' is de maateenheid voor weerstanden).



Opgave 30
Bereken de vervangingsweerstand voor de verbinding AB!

Opgave 31
En voor AC. Die is dus minder dan 1 Ohm, want de stroom kan op allerlei manieren 'achterom'.

Opgave 32
Zelfde vraag voor AD.

Twee oude records

Opgave 33
We laten de zon onze kubus beschijnen. Er ontstaat schaduw. Die kan zeshoekig of vierhoekig zijn. Door het vlak waar de schaduw op valt, de kubus, en de zon handig op te stellen ontstaan vierkanten.
Een vierkant ter grootte van een zijvlak van de kubus is gauw gevonden. Maar het schaduwvierkant kan groter zijn! Hoe groot maximaal?

Nieuwe Wiskrant-lezers van het eerste uur zijn bij opgave 33 in het nadeel. Ze zijn in de verleiding iets op te zoeken in een oude jaargang...

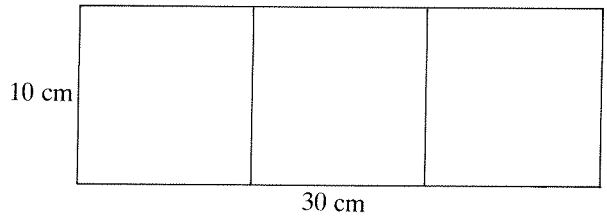
Opgave 34
Maak een houten kubus van 10 bij 10 bij 10 cm. Met geduld, handigheid en goed gereedschap kan daar een tunnel met 5 bij 5 cm vierkante doorsnede in uitgehakt worden. Daar kan dan een 5 bij 5 bij 5 cm kubus juist doorglijden.
Een vakman brengt het misschien wel tot 9,9 bij 9,9 cm.

Maar nu: geef aan hoe een gat in de kubus gemaakt kan worden, zodat een kubus *groter dan 10 bij 10 bij 10 cm* er door kan glijden.
U gaat natuurlijk uit van een verse kubus van 10 bij 10 bij 10 cm. En een gat, dat is iets waar omheen gelopen moet kunnen worden.

Volgende keer: o.a. foto's van een grotere kubus halverwege de doorgang door een kleinere. Aan u is het de grootst mogelijke grotere kubus te bepalen.

Twee lastige vragen tot slot

Opgave 35
Gegeven een rechthoekige kartonnen strook van 10 bij 30 cm.



De schaar gaat er één keer in, er ontstaan twee stukken. Die plakken we anders aan elkaar. Zonder overlappen, de totale oppervlakte blijft 300 cm^2.
Van het ontstane stuk karton vouwen we een kubus; weer zonder overlappen, de eindkubus heeft dus een oppervlakte van 300 cm^2. Weet u hoe geknipt en gevouwen moet worden?

De laatste opgave gaat strikt genomen niet over een kubus, maar past mooi in de verzameling.
Is het u wel eens opgevallen dat vanuit elk hoekpunt van een kubus elk hoekpuntenpaar onder hoogstens 90° gezien wordt?
Voor een balk geldt dat ook.
Met een kubus of balk voor ogen is het makkelijk te zien. Het is niets bijzonders. Dat maakt opgave 36 dan ook zo onverwacht.

Opgave 36
Gegeven zijn 8 punten in de ruimte. Eveneens gegeven is dat alle driehoeken, die 3 van die 8 punten tot hoekpunten hebben, scherphoekig of rechthoekig zijn.
Te bewijzen: de 8 punten vormen een balk.

Slot

De volgende keer noem ik bron van en literatuur over de algemene vorm van dat vraagstuk: met 2^n punten in een n-dimensionale ruimte.
Voor $n = 2$ zal het wel lukken te bewijzen dat de vier punten een rechthoek vormen. Boven $n = 2$ wordt het wat moeilijker.

Gedeeltelijke en volledige antwoorden, tussenstanden en records zijn welkom op het bekende adres Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht; indien ze voor 15 februari arriveren, is vermelding in de volgende Wiskrant mogelijk.

Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen
Staatssecretaris drs.N.J.Ginjaar-Maas
Postbus 25000
2700 LZ Zoetermeer

Amsterdam, 18 oktober 1986.

Geachte mevrouw,

De sectie wiskunde van het Hervormd Lyceum West te Amsterdam wil d.m.v. deze brief haar bezorgdheid uitspreken betreffende de veranderingen in het examenprogramma voor de mavo en het lbo.

De nadruk wordt steeds meer gelegd op meerkeuzevraagstukken en dat is sterk demotiverend voor deze groep leerlingen.

De praktijk leert dat de leerling een goede wiskundehouding is aan te leren wanneer ze bezig zijn met open vraagstukken. Ze ervaren het als positief om de sommen te onderzoeken en naar een oplossing toe te werken.

Zo gauw ze geconfronteerd worden met meerkeuzevraagstukken, laten ze hun onderzoekende houding varen en lossen deze vraagstukken op alsof het raadseltjes zijn.
Ze vinden het al snel vervelend om te doen en ervaren het als bijzonder negatief dat door één rekenfoutje de hele som fout is. (Bij open vraagstukken hoeft dat niet zo te zijn)

Omdat je als docent de leerling zo goed mogelijk wil voorbereiden op het examen moet je ze laten wennen aan dit type vraagstuk.
Dit betekent dat je een groot gedeelte van de lessen hier mee bezig bent, wat de motivatie voor het vak wiskunde vermindert.

Tevens zal de aansluiting met wiskunde van vervolgopleidingen moeilijker worden, de ervaring met open vraagstukken is veel minder.

In afwachting van antwoord, verblijven wij,

hoogachtend,

De sectie wiskunde
t.n.v. Mw.C.M.Tessel
Hemsterhuisstraat 79
1065 JX Amsterdam

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Op de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren van 25 oktober 1986 stelde mevrouw C.M. Tessel de verandering in het eindexamen wiskunde voor mavo en lbo aan de orde. Zij uitte hierbij haar bezwaren tegen de grote invloed van de meerkeuzevragen op het eindexamen en las een brief voor die de sectie wiskunde van het Hervormd Lyceum West te Amsterdam hierover aan de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen heeft geschreven.
De brief vindt u hierboven.
Op 4 mei 1984 hebben de besturen van de Nederlandse Vereniging voor het Onderwijs in de Natuurwetenschappen en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren over dit onderwerp reeds een brief aan de Staatssecretaris geschreven waarin ook zij de bezwaren tegen een examen bestaande uit meerkeuzevragen kenbaar maakten. (Deze brief is opgenomen in Euclides 60,7 van maart 1985, pag. 273 en 274).
Het bestuur van de NVvW wil graag blijven proberen de invloed van de meerkeuzevragen op het eindexamen te verkleinen. Daarom doet het bestuur een beroep op alle leden om hun mening over de wijzigingen in de examens 1987, zoals die in de brief van de CEVO van augustus 1986, kenmerk CEVO 86-87-12, aan de vakdocenten wiskunde voor lbo en mavo is meegedeeld, te laten weten. Uw mening wordt graag ingewacht bij de secretaris, drs. J.W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Voor een goed bestuursbeleid hopen wij op veel reacties.
Namens het bestuur van de NVvW,
J. Maassen, secretaris.

MIMICRY

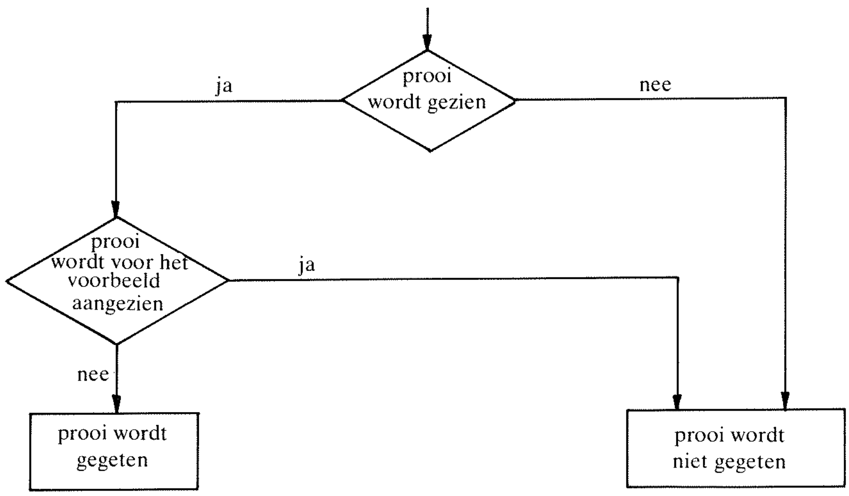
Vlinders hebben wel eens grote "ogen" op hun vleugels om andere dieren af te schrikken. De volgende werkbladen, gemaakt door A. Roodhardt, Christelijke Scholengemeenschap Oostergo, Dokkum, gaan over dit verschijnsel: Mimicry.

(foto: A.J. Goddijn)

MIMICRY

Sommige insekten worden tegen rovers, bijvoorbeeld vogels, beschermd, doordat ze lijken op andere insecten die zeer gevaarlijk of zeer onsmakelijk zijn. Dit verschijnsel heet mimicry (nabootsing).
Zo zijn er vliegen die op wespen lijken. De prooi, in dit geval de vlieg, is de nabootser en de wesp is het voorbeeld.

In onderstaand schema zijn de mogelijke lotgevallen van de prooi gedurende een bepaalde tijdsperiode beschreven:



C is de kans dat de prooi gezien wordt. M is de kans dat de rover de geziene prooi voor het voorbeeld aanziet. (De misleiding lukt.)

A 1. Bereken de kans op elk van de twee einduitkomsten.

2. Is aan deze kansen te zien dat een grotere misleidingskans M in het voordeel van de prooi werkt?

3. 'Wanneer de prooi een zeer goede schutkleur heeft, dan zal de mimicry niet zo'n grote invloed hebben'.
Wordt deze uitspraak door het model bevestigd? Je mag je redenering met een rekenvoorbeeld ondersteunen. Ga uit van P (prooi wordt niet gegeten).

4. P(prooi wordt gegeten) = $C(1 - M)$. Teken de grafieken van P als functie van M voor C resp. 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 en behandel hiermee het probleem uit 3.

5. Gebruik de tekening van de grafiek uit 4. om de waarden van M en C te bepalen, waarvoor geldt $P = 0{,}3$.

6. $0{,}4 \leq C \leq 1$ en $0 \leq M \leq 0{,}6$ met C en $M \in \mathbb{R}$.
Wat is nu de grootste kans dat de prooi *niet* gegeten wordt?

7. Bij een experiment met proefdieren blijkt de kans om gegeten te worden (P) 0,2 te zijn. Hierbij kunnen heel veel waardenparen van C en M behoren. Waarom is deze verzameling van waardenparen zo op te vatten dat C een functie van M is?
Bepaal het functievoorschrift. Waarom heeft de grafiek van deze functie geen asymptoten?
Teken de grafiek van de functie.

B In het model is verondersteld dat een rover die de prooi voor het voorbeeld aanziet, zich van deze maaltijd onthoudt. Maar sommige rovers eten het voorbeeld ook. Bovendien hebben sommige rovers nog niet geleerd dat ze het voorbeeld beter met rust kunnen laten.
Het model wordt realistischer door hiermee rekening te houden. Dat kan door aan te nemen dat de kans dat de rover, na het aanzien van de prooi voor het voorbeeld, toch besluit de prooi op te peuzelen gelijk is aan E.

1. Maak een nieuw schema waarin dit verwerkt is.

2. Toon aan dat nu geldt:

$$P \text{ (prooi wordt gegeten)} = C\,[1 - M\,(1 - E)].$$

De oorspronkelijke vorm van een prooisoort vertoont geen mimicry, maar door een mutatie ontstaat er een vorm die wel mimicry vertoont.

3. Als die mimicry voordelen biedt dan zal die nieuwe vorm gaan overheersen en zich min of meer tot de vertegenwoordiger van die soort ontwikkelen. Probeer dat aannemelijk te maken.

4. Wil de ontwikkeling uit de vorige vraag tot stand komen, dan moet een nodige voorwaarde gesteld worden aan P_{zm} en P_{mm}, de kansen om gegeten te worden in het geval zonder mimicry en in het geval met mimicry. Welke voorwaarde?

5. Door op P_{zm} en P_{mm} de formule uit 2. toe te passen (met geschikte indices zm en mm), kan een voorwaarde worden afgeleid voor de waarde die M minstens moet hebben voor een succesvolle evolutie.
Toon aan dat die voorwaarde is:

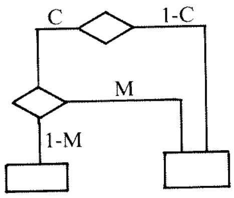
$$M > \frac{1}{1 - E}\left(1 - \frac{C_{zm}}{C_{mm}}\right)$$

6. In experimenten is gebleken dat bij kleinere waarden van E de waarde van M ook lager mag zijn. Is deze constatering in overeenstemming met het model?

7. De tekening of kleur van het dier dat mimicry vertoont dient als waarschuwing en moet daarom redelijk opvallen. Dat betekent: $C_{mm} > C_{zm}$. Als dat niet het geval is dan heeft dat merkwaardige consequenties voor het model. Geef daarvan een voorbeeld.

Antwoorden mimicry

A. 1. Invullen schema:

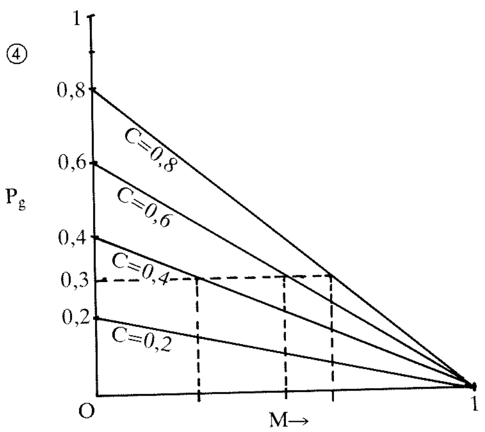


P (prooi wordt gegeten) $= C \cdot (1 - M)$
P (prooi wordt niet gegeten) $= 1 - C + CM$

2. P (prooi wordt gegeten) is een dalende functie van M.

3. Een zeer goede schutkleur impliceert een zeer kleine waarde voor C.
P (prooi wordt niet gegeten) $= 1 - C + CM$.
Neem $C = 0{,}01$.
$P = 0{,}99 + \underbrace{0{,}01 \times M}$
kan variëren van 0 tot 0,01 door de begrenzingen van M en dat is weinig t.o.v. 0,99.
P (prooi wordt gegeten) $= P_g$
$P_g = C(1 - M)$
Bij lage waarde van C (bijvoorbeeld 0,2) geeft variatie van M betrekkelijk weinig verandering in P_g.

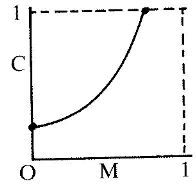
4.



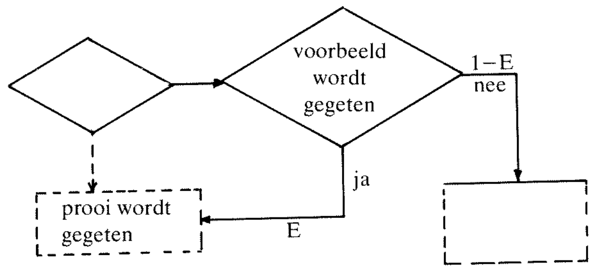
5. Zie tekening, ongeveer 0,25; 0,5; 0,6.

6. Gelijkwaardig met P_g zo klein mogelijk.
Uit tekening blijkt $M = 0{,}6$.
$P_g = 0{,}4 \times (1 - 0{,}6) = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$.
Gevraagde kans van $1 - 0{,}16 = 0{,}84$.

7. $0{,}2 = C\ (1 - M)\quad C = \dfrac{0{,}2}{1 - M}$
1 M-waarde → 1 C-waarde
C en M beperkt tot [0,1]



B. 1. Invoegen:



2. Via: $C(1 - M + ME)$

3. Mutatie erfelijk, er blijven relatief meer van de nieuwe soort over, voortplanting enz.

4. $P_{zm} > P_{mm}$

5. $M_{zm} = 0$
Dus $C_{zm} > C_{mm}\,[1 - M(1 - E)]$ enz.

6. $E \searrow \quad 1 - E \nearrow \quad \dfrac{1}{1 - E} \downarrow$ wel overeenstemming.

7. Stel $C_{mm} < C_{zm}$, dan: $\dfrac{C_{zm}}{C_{mm}} > 1$
$M >$ negatief getal.

Noot: De Heer Roodhardt liet ons weten dat het mogelijk is dat een iets gewijzigde versie van dit vraagstuk voorzien van een leerdoelenanalyse wordt opgenomen in een rapport van het CITO.