Problemen met hogere machten en de decimalen van pi

A.J. Goddijn
OW&OC, RU Utrecht

De laatste twee puzzelrubrieken gingen over vierkanten en kubussen. Een zekere voorkeur voor meetkunde begint vaste lezers misschien op te vallen. Vandaar dat de nieuwe puzzels van deze aflevering weer eens de analyse-kant uitgaan. Dat heeft twee voordelen: ik hoef niet zoveel tekeningen te maken en lezers die wat minder vertrouwd zijn met Euclides en zijn nazaten komen ook aan hun trekken.

Gestapelde machten

Louis Maassen zond (bij een antwoord op een opgave van enige tijd terug) een leuke serie opgaven. Ik geef ze hier precies in zijn notatie weer.

Opgave 37

a. Wat zullen we verstaan onder

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} \qquad ?$$

Bereken de limiet (als die bestaat).

b. Voor welke $a\,(\in [1;\infty\rangle)$ is er een reëel getal α zó dat

$$\alpha = a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} \qquad ?$$

c. Voor welke $a\,(\in \langle 0;1\rangle)$ is er een reëel getal α zó dat

$$\alpha = a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} \qquad ?$$

d. Voor welke $n\,(\in \mathbb{N})$ is er een natuurlijk getal m zó dat

$$m = \sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} \qquad ?$$

Van dit kwartet is volgens Louis Maassen opgave c waarschijnlijk het lastigst. Dat ben ik met hem eens! Met opgave c hangt samen:

e. We definiëren voor elke a tussen 0 en 1 een rij R_a als volgt

$$\begin{cases} R_a(1) = 1 \\ R_a(n+1) = a^{R_a(n)} \quad \text{als } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Onderzoek het gedrag van deze rijen!

Opgave d is vrij eenvoudig; hij leidt als het ware heel natuurlijk naar de tweede serie opgaven.

Machtsverwisselingen

Opgave 38

a. Welke is het grootst: e^{π} of π^{e}?

b. Voor welke $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ geldt
$a^b = b^a$?
(De belangstelling gaat vooral uit naar paren met ongelijke a,b).

c. Voor welke $(x,y) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ geldt

$$x^y = y^x \quad \text{en} \quad x \neq y?$$

Hier is c. duidelijk de lastigste!

Louis Maassen besluit zijn bijdrage met de mededeling dat er een oplossing voor genoemde problemen is.

Dat is prettig te weten, vooral als ik straks moet bekennen dat opgave 36 van vorige keer... Zo direct meer daarover!

Sabbelen op pi

Computers zijn nog duidelijk in de groei. Zoals een baby eerst leert kruipen, later staan, dan waggelen, vallen en lopen, zo komen computers ook steeds tot nieuwe kunstjes. En de ouders, pardon hardwaremakers en programmeurs, staan juichend toe te kijken bij alles dat het geval doet.
Onlangs heeft men een computer 133 miljoen decimalen van π uit laten rekenen.
Met zo'n resultaat, tweeduizend vel papier met 80 regels van 80 cijfers, is niet direct veel nuttigs te doen. Het gaat er natuurlijk om dat die 133.000.000 cijfers slechts de top van een ijsberg zijn. De ijsberg zelf: nieuwe methodes in de numerieke wiskunde, verbeterde hardware. En die is elders toepasbaar.

Een heel langzame benadering van π geeft de volgende reeks:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots\right).$$

Voor de volgende puzzel mag u aannemen dat deze reeks inderdaad naar π convergeert.
Snel gaat dat niet want de algemene term,

$$t_n = \frac{4(-1)^{n-1}}{2n-1} \text{ met } n = 1, 2, \ldots,$$

laat het resultaat nog flink op en neer gaan als n ongeveer 1000 is. Dan is $|t_n| \approx \frac{1}{500}$ en is de derde decimaal al verkeerd.

Tòch laten we een computer de som $S_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$ eens uitrekenen voor n = 10, 100, 1000 en 10000; we doen het in 30 decimalen nauwkeurig!

n	S_n
10	3.041 839 618 929 402 211 135 957 265 989
100	3.131 592 903 558 552 764 307 414 238 278
1000	3.140 592 653 839 792 925 963 596 502 863
10000	3.141 492 653 590 043 238 459 518 383 364
Hier is π zelf:	3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 276

In het tabelletje is onderstreept welke decimalen nog niet 'goed' zijn. Kijk eens goed. En dan:

Opgave 39
Hoe is het mogelijk dat er nà de foute decimaal toch zoveel, en steeds méér, goede decimalen volgen? Merkwaardig! Merkwaardig!
Allerlei oplossingen zijn welkom: van hints tot intuïties en volledige bewijzen. Alleen 'toeval' is niet acceptabel!

Oude puzzels: literatuur

Opgave 12 vroeg om voorkomen van wiskunde(docenten) in literatuur, muziek etc.

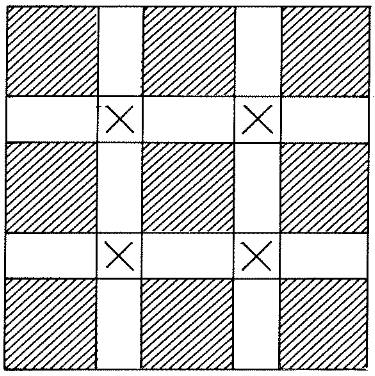
Leen Streefland wijst op:
- Ted Bokhorst: "Het einde van de rondweg."
  Op blz. 8 vraagt de ik-figuur, Jetje, iets over evenredigheden. De uitleg van de juf mag mager genoemd worden.
- Simone de Beauvoir: "Herinneringen van een welopgevoed meisje."
  Juffrouw Chassin, die algebra, goniometrie en natuurkunde doceert:

  "verloor <...> geen tijd aan preken over moraal; er werd gewerkt zonder ons met kinderachtigheden op te houden. Ze was erg dol op ons."

Meer *schriftelijke* inzendingen op puzzel 12 zijn welkom.
Heeft u 'kinderen voor kinderen' op 1 maart jongstleden gezien? Als weer even gezegd moest worden dat school vervelend is, was wiskunde weer de makkelijkste cliché-schuldige!

Oude puzzels: schaakborden beleggen

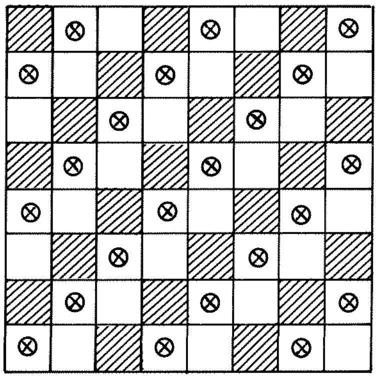
Opgave 13 vraagt om leggen van strookjes van 3 vierkanten op een schaakbord van 8 bij 8 vierkanten. Alleen de velden c3, f3, c6, f6 komen in aanmerking over te schieten.
Hier is de oplossing van Jan Zuurbier.



Als ik het 8×8-bord met tromino's probeer te bedekken blijkt al snel dat een van de velden met een kruisje overblijft. Waarom is het niet mogelijk dat er een ander veld overblijft? Welnu de tromino's bedekken ieder twee zwarte en een wit veld of twee witte velden en een aangekruist veld. Het aantal zwarte velden is even. Er kan dus nooit één zwart veld overblijven. De 36 zwarte velden worden bedekt door 18 tromino's die tevens 18 witte velden bedekken. De overgebleven 3 tromino's kunnen nooit alle vier de aangekruiste velden bedekken. Er blijft dus een aangekruist veld over.

Een andere mogelijkheid is het 8×8-bord met drie kleuren als volgt te versieren (zie volgende pagina).

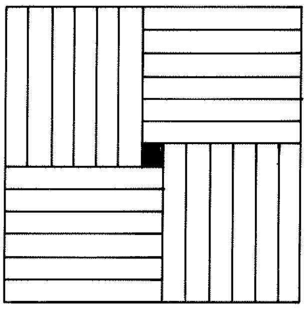
Elke tromino komt precies over één ▨, één $\boxed{\otimes}$ en één □.
Maar er zijn 21 vakjes ▨, 22 vakjes $\boxed{\otimes}$ en weer 21 vakjes □. Het overblijvende vakje is dus van 'kleur' $\boxed{\otimes}$. Nu kleuren we nog eens, maar dan met de andere diagonaalrichting als leiddraad.



De doorsnede van de twee ⊗ -verzamelingen bevat slechts vier vakjes: c3, f3, c6 en f6.

Beide methoden zijn voor de opgaven 14a en b ook bruikbaar. 16, respectievelijk 9 mogelijk gemiste vakjes in die gevallen.

J. Postma laat fraai zien dat er in al deze gevallen ook inderdaad een oplossing is; bovenstaande redeneringen laten namelijk alleen zien, dat als er een belegging is, er dan één van de aangegeven vakjes wordt gemist.



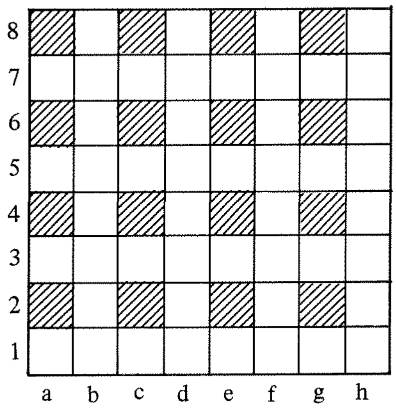
Met 24 stroken van 7 en één leeg vakje: een 13×13 veld.
Daaromheen kunnen randen van 7 hokjes breed worden gelegd, of randen aan boven- en rechterzijde.
Zo zien we dat bij alle vakjes (x, y) met x en y deelbaar door 7 er inderdaad een belegging van het 34×34 veld is die alleen (x, y) vrijlaat.
De andere beleggingen gaan analoog.

Opgave 15, het met domino's beleggen van een schaakbord op juist één wit en één zwart hokje na, is gekraakt door Marcus Nijmeijer en Mike Staring.
Zij brengen de kleinst mogelijke rechthoek aan die de twee mis-vakjes omvat en vullen rechthoek en restant apart. Ze laten zien dat dat in alle gevallen kan.
Een overwachte oplossing! De puzzelredactie dacht alleen aan het maken van één gesloten route op het schaakbord, die alle vakjes eenmaal aandoet. De 2 stukken van die route, buiten de mis-vakjes hebben even lengten en zijn dus met domino's belegbaar.

Oude puzzels: Verliezende velden

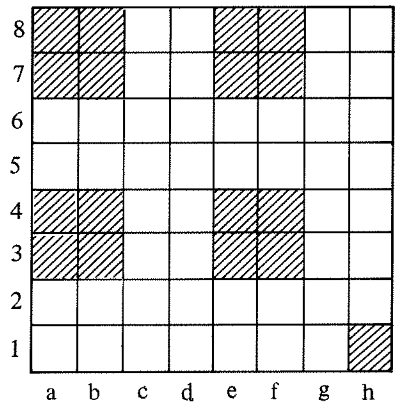
Voor de spelletjes op het schaakbord, opgave 16 en 17, geef ik de oplossing van het zojuist genoemde inzendduo.

Opgave 16
Voor de koning zijn de hieronder gearceerde velden verliezend:



De strategie, die ik gevolgd heb ter bepaling van deze velden is de volgende geweest:
I. a8 is verliezend $\Rrightarrow$ a7, b7 èn b8 zijn winnend;
II. a7 winnend $\Rrightarrow$ a6 verliezend;
III. a6 verliezend $\Rrightarrow$ a5, b5 en b6 winnend etc. etc. etc.

Opgave 17
Voor het paard zijn de hieronder gearceerde velden verliezend.



Misschien goed om op te merken: bij al deze opgaven zit een verkapte recursie:
1. Een veld is winnend d.e.s.d. als er vanuit dat veld een zet mogelijk is, die het stuk op een als verliezend bekend staand veld plaatst!
2. Een veld is verliezend d.e.s.d. als iedere zet vanuit dat veld het stuk op een als winnend bekend staand veld plaatst!!

N.B. Hoewel veld h1 en veld d5 in eerste instantie gelijkwaardig lijken blijkt h1 verliezend en d5 winnend. Dit zit hem in het ontbreken van equivalente velden voor b4 en e7!

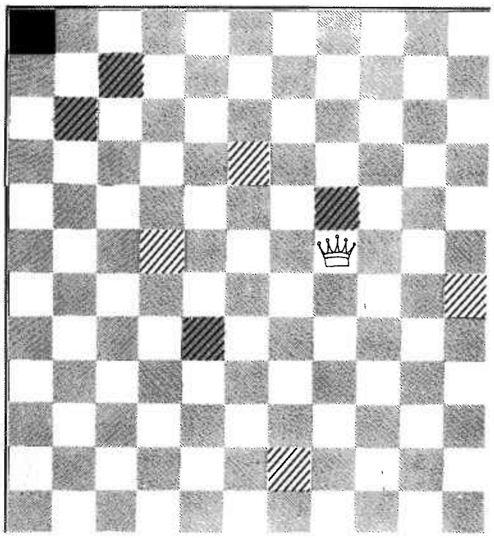
Tot zover Nijmeijer en Staring.
Als het schaakbord naar rechts en onder onbegrensd was, treedt er natuurlijk wèl regelmaat op. Ik beken dat ik zelf h1 gemist heb bij het paardenspel.
De opmerking over recursie is interessant.

In het prachtige boek *Winning Ways for Your Mathematical Games* van J.H. Conway, E.R. Berlekamp en R.K. Guy, komt een definitie van 'spel' voor, die juist op de aangegeven manier recursief is.
Een 'spel' X wordt gedefinieerd als $\{X_L | X_R\}$ waarbij X_L staat voor de mogelijke 'spelen' waarheen Links kan zetten, en X_R voor de mogelijke spelen waarheen Rechts kan zetten.
Alle X_L en X_R zijn precies weer voorbeelden van een spel. Hoe komt deze recursie nu van de grond? Doordat er soms geen zetten voor Links of Rechts zijn! Het eenvoudigste spel is dan ook

$\{ \quad | \quad \}$

Het is het spel waarin degene die aan zet is verliest, omdat die niet kan zetten.
Genoemd boek laat zien hoe je deze soort 'spelen' kan optellen. Zo ontstaat een krachtige theorie waarin elk spel een getal-achtige waarde krijgt.
Het boek is een must voor liefhebbers van spelletjes en puzzels. Het is zeer onderhoudend geschreven en maakt de lezer theoretisch onverslaanbaar in de meest uiteenlopende spelletjes, waaronder ook 'kamertje-verhuren' (een spel voor twee personen) 'solitair' (voor één persoon) en 'Life' (voor geen personen).

Opgave 18
Het antwoord is natuurlijk door dezelfde inzenders gevonden:



Ze geven ook een beschrijving van de verzameling verliezende velden, die echter tamelijk complex is.
Ik geef als uitdaging het volgende.

Stel $f(n) = [\tau n]$ $\quad \tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$
$\quad g(n) = [\tau^2 n]$ $\quad n = 0, 1, \ldots$

Dan zijn (f(n), g(n)) en (g(n), f(n)) juist de verliezende velden!

Ik herhaal nog even: er is samenhang met opgave 5. Dit resultaat is overigens al 'oud'. Het is ontdekt door de Nederlandse wiskundige Wythoff, in 1908.
Die formuleert het alleen anders, in termen van wegnemen van lucifers van twee hoopjes.
Een zet is dan:

óf van één hoopje minstens één weghalen;
óf van twee hoopjes precies evenveel weghalen, weer minstens één.

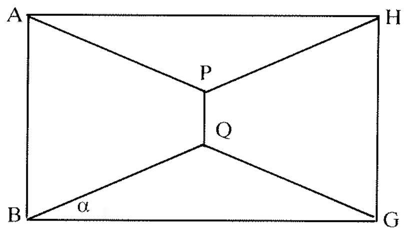
En wie niet zetten kan verliest.
J.H. Conway c.s. laten trouwens zien dat een grote klasse van spelletjes in zekere zin herleidbaar is tot dit soort Nim-achtige spelen.

De puzzels 18 en 19 zijn ook gekraakt, 20 nog niet. Ik stel deze even uit tot een volgende gelegenheid, waarbij dan wat meer spelletjes ter sprake kunnen komen en een wat algemenere aanpak. Merk alvast op dat het spel met de pionnen een soort som is van acht onafhankelijke rijen. Gelijke rijen vallen als het ware tegen elkaar weg. Immers: speelt uw toekomstige verliezer in een van de twee rijen, dan kopieert u zijn zet in de andere rij. Na even wordt dat hopeloos voor de toekomstige verliezer...
Herkent u deze strategie van het torenspel vóór opgave 16?

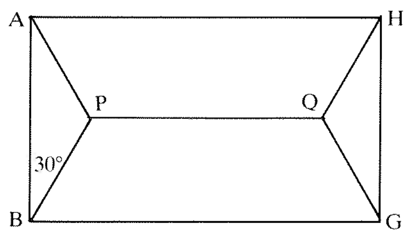
Oude puzzels: Spinnewebben

Opgave 21 staat nog open. Betekent dat, iedereen '11' als record heeft bereikt en niet verder is gekomen?

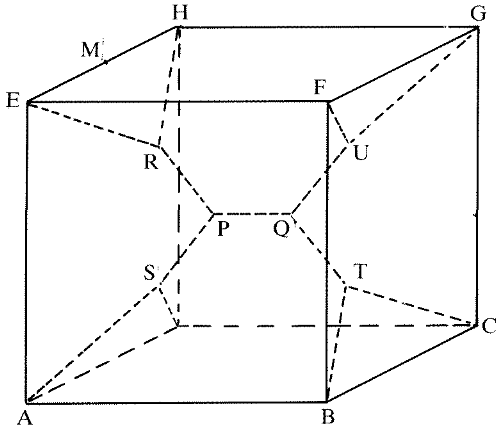
Opgaven 22, 23, 24 gaan over minimale spinnewebben die respectievelijk vlakken, ribben en punten verbinden.
Anneke Grünefeld evenaarde bestaande records, die voor opgave 22 en 24.
Ze vindt een web ter lengte $\sqrt{3}$, gewoon een hoofddiagonaal voor het verbinden van alle vlakken.
Haar oplossing van opgave 23 is instructief, het legt een fundamenteel principe bloot.
In het hoofddiagonaal vlak ABGH brengt haar spin als volgt een symmetrisch web aan:



Berekening leert nu dat als $\alpha = 30$ dit web minimaal is, en dan lengte $1 + \sqrt{6}$ heeft.
Dit leidt tot de vaststelling dat de spinragdraden elkaar bij Q allen onder hoeken van 120° ontmoeten.
Ze bewijst vervolgens de stelling dat in elke driehoek ABC (met hoeken $\leq 120°$) voor het punt P, waarvan $AP + BP + CP$ minimaal is, geldt $\angle APB = \angle BPC = CPA = 120°$.
Deze eigenschap van P (het punt van Torricelli) helpt natuurlijk bij het vinden van records bij opgave 24.
Maar er zit een addertje onder het gras!
Zo kan het ook:



Even rekenen ... nu is het web $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
Een tikkeltje beter dan $1 + \sqrt{6}$!
Het web tussen de 8 punten van de kubus ziet er bij Anneke Grünefeld zo uit:



PQ loopt over de middenas van de kubus en verder zijn weer alle hoeken in de verbindingspunten 120°. Geduldig rekenen brengt ons tot $3\sqrt{3} + 1$.

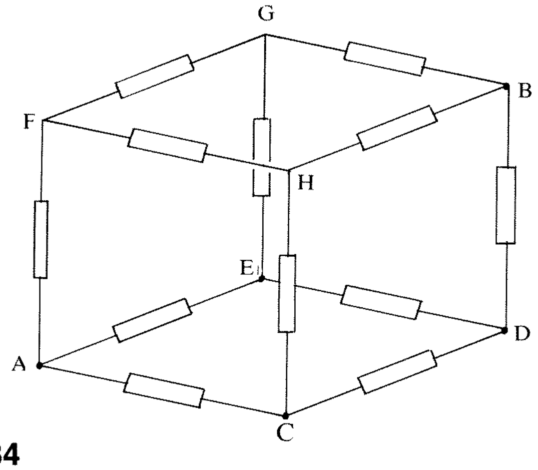
Oude opgaven: zagen en lijmen

Geen inzendingen bij opgave 25. Te makkelijk? Voor wie het nog niet gevonden heeft: hoeveel zaagsneden zijn nodig om het middelste kubusje los te krijgen?

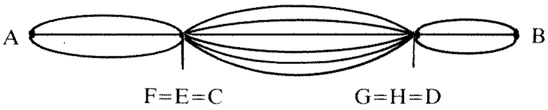
Opgave 26 is waarschijnlijk door velen al eerder opgelost. Marcus Nijmeijer en Mike Staring doen het met het schilderen van de 27 kubusjes volgens een ruimtelijk schaakbord-patroon. De houtworm komt bij elke grens in een andere kleur en kan dus na de 27-ste doorgang niet in de oorspronkelijke kleur terug zijn!
Opgave 28 leidde (mondelinge informatie) tot misverstanden. Het zou geen dobbelsteen kunnen zijn, want dan kon plaatje II niet met I kloppen. Wel, geen dobbelsteen dus is mijn antwoord en dat staat ook niet in de formulering.
U bent nu wèl op de goede weg ...
Anneke Grünefeld, Mike Staring en Marcus Nijmeijer vonden het goede antwoord.

Oude puzzels: weerstand in de ribben

De weerstandsopgaven 30, 31, 32 werden opgelost door Marlene Wouters en Paul van Tillo, studenten van de HKLS te Sittard.
Hier is nog even de kubus met weerstanden en letters:



Als er spanning wordt gezet op AB, zullen de punten F, E en C onderling gelijke spanning krijgen. We kunnen ze dus verbinden, door tegen elkaar vouwen. Idem, voor G, H en D.



Ieder lijnstuk staat nu nog voor een weerstand van 1 Ohm.
Vervangen we de lijnstukken door één enkele lijn dan krijgen we:

A $R=\frac{1}{3}$ F=E=C $R=\frac{1}{6}$ G=H=D $R=\frac{1}{3}$ B ofwel A $R=\frac{5}{6}$Ohm B

Dus vervangingsweerstand $R = \frac{5}{6}$Ohm.

Opgave 31 en 32 worden op analoge wijze opgelost. Resultaat: $\frac{7}{5}$ en $\frac{3}{4}$ Ohm.

Oude puzzel: groter door kleiner

Als enige zendt Anneke Grünefeld een antwoord in bij de vraag naar de grootste kubus die door een gat in een kubus van 10 bij 10 bij 10 cm kan:

> "De grootste kubus die er door kan is er niet, maar elke kubus met zijde kleiner dan $\sqrt{112{,}5}$ kan er door."

Zoals beloofd foto's van dit gebeuren (zie volgende pagina).

Oude puzzels: Onopgelost? Nee!

Dit was opgave 36:
Gegeven zijn 8 punten in de ruimte. Eveneens gegeven is dat alle driehoeken, die 3 van die 8 punten tot hoekpunten hebben, scherphoekig of rechthoekig zijn.
Te bewijzen: de 8 punten vormen een balk.

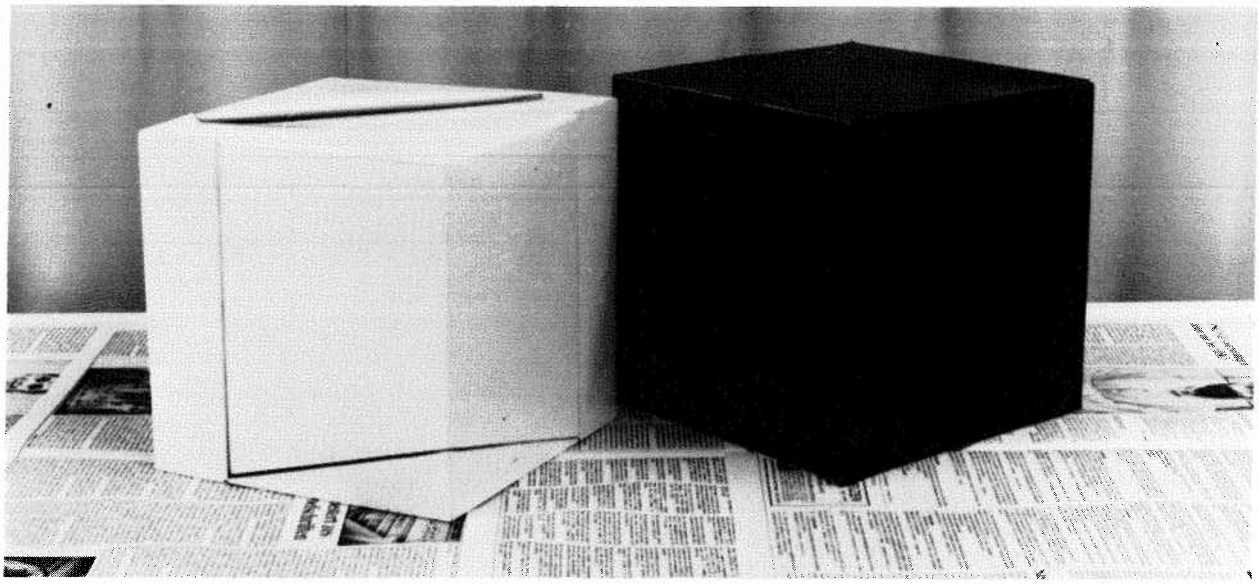
Nauw verwant is het volgende probleem van Erdös (gesteld rond 1950):

> Is er in de n-dimensionale ruimte een verzameling met meer dan 2^n punten, waarin alle onderlinge hoeken hoogstens 90° zijn?

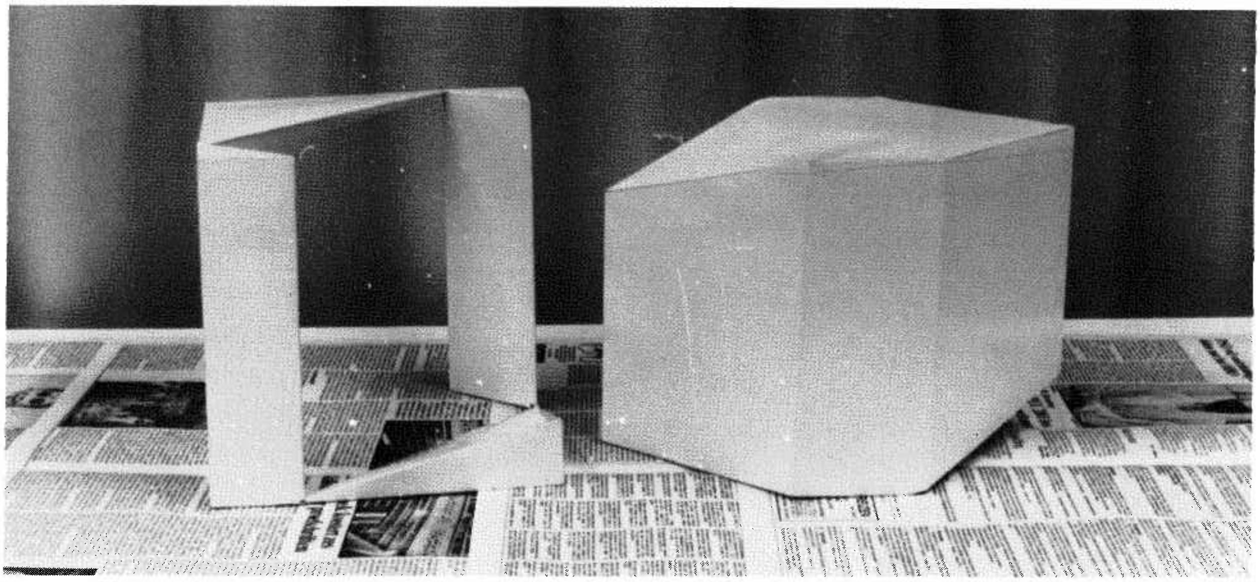
Erdös voorspelde: nee.
Dat zo'n verzameling met 2^n elementen wèl bestaat is niet zo moeilijk in te zien: neem de n-dimensionale kubus.
Erdös' bewering is bewezen door L. Danzer en B. Grünbaum. Zie *Combinatorial Geometry*, V. Boltjansky & I. Gohberg.
Dit leuke (en goedkope) boekje is uitgegeven door Cambridge University Press.

Het bewijs toont niet aan dat er in het geval van 2^n punten inderdaad een hyper kubus-ligging is.
Dat leek dus nog een open probleem. Intussen hebben we gevonden dat het inderdaad zo is. Maar deze puzzelrubriek is al lang genoeg ...

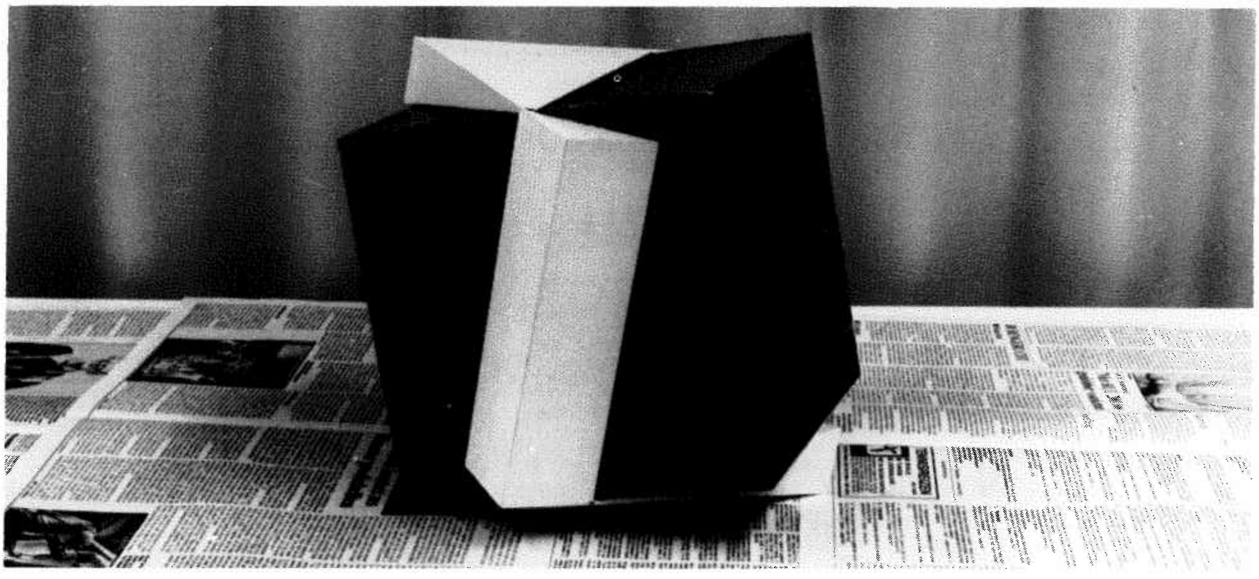
Inzendingen
Antwoorden op alle opgaven blijven welkom.
Sluitingsdatum volgende rubriek:
10 juni 1987.



De zwarte kubus is groter!



Het gat in de witte kubus. De overblijvende flard is inwendig versterkt met fietsspaken.



Midden in de doorgang!