Ruimtemeetkunde met de micro (2)

M. Kindt/H.B. Verhage
OW & OC, RU Utrecht

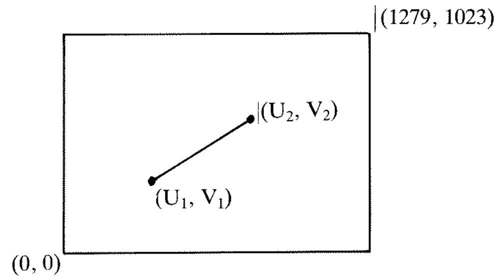
Samenvatting

In dit artikel wordt het tweede deel van een computerpracticum over ruimtemeetkunde beschreven.
De belangrijkste activiteit voor de leerlingen is het 'inbreken' in kleine tekenprogrammaatjes, waardoor ze zonder al te veel kennis van programmeren toch tot wiskundig aardige resultaten komen.
Men name de introductie van algebraïsche voorstellingen van krommen en gebogen vlakken in de ruimte met behulp van de computer lijkt een veelbelovende richting te zijn.

In het artikel *Ruimtemeetkunde met de micro (1)* in het vorige nummer van de Nieuwe Wiskrant zijn enkele overwegingen om de computer in te schakelen bij ruimtemeetkunde aan de orde geweest. Tevens is deel 1 van een uit drie delen bestaand practicum besproken. In dit deel stond het inleidende standaardprogramma RUIMFIG centraal.
In dit vervolgartikel gaan we nader in op de delen 2 en 3 van het practicum: het tekenen van krommen in het platte vlak resp. het tekenen van krommen en gebogen vlakken in de ruimte op het computerbeeldscherm. Het doel van de lessen was met behulp van de computer algebraïsche voorstellingen te introduceren en de leerlingen actief met zulke voorstellingen te laten omgaan. Enkele korte BBC-Basic programmaatjes waren hierbij het uitgangspunt. De leerlingen hebben deze programma's verwerkt en bewerkt tot andere tekenprogramma's. Twee lessen voor tekenen in het platte vlak, twee lessen voor tekenen in de ruimte. We gingen er vanuit dat de leerlingen programmeerervaring hadden. Zoals te verwachten was, was de klas op dit punt erg heterogeen samengesteld. Veel problemen gaf dit niet, alleen ontstonden wel vrij grote verschillen in tempo. Lang niet alle leerlingen zijn dan ook aan de laatste (moeilijke!) opdrachten toegekomen. Achteraf gezien was het jammer dat het niet mogelijk was (vanwege de vakantie) nog een extra les hier aan te besteden.

Elementair tekenen

Om te beginnen werden de leerlingen vertrouwd gemaakt met het grafische beeldscherm en de tekenopdrachten van de BBC-computer.



MOVE U1, V1	een denkbeeldige tekenpen wordt op het punt met beeldschermcoördinaten (U1, V1) gezet; er wordt *niets* getekend.
DRAW U2, V2	er wordt een lijnstukje getekend vanaf het punt waar de pen stond naar (U2, V2).

Na een uitstapje waarin het transformeren van coördinaten op papier naar beeldschermcoördinaten aan de orde kwam, werden enkele procedures geïntroduceerd die de leerlingen steeds in hun eigen programma's konden gebruiken. Dit waren de procedures:

- PROSCHAAL(XMIN, XMAX, YMIN, YMAX)
  voorziet het beeldscherm van een schaalverdeling.
- PROCPUNT (X1, Y2)
  zet de denkbeeldige tekenpen op (X1, Y1) volgens de *nieuwe* schaalverdeling.
- PROCLIJN(X2, Y2)
  tekent een lijnstukje vanaf het punt waar de pen al stond naar (X2, Y2) volgens de *nieuwe* schaalverdeling.

De leerlingen hoefden deze procedures niet zelf te maken. De procedures konden van een achtergrondgeheugen (in ons geval cassette, het netwerk was kapot...) in de computer geladen worden, waarna de leerlingen hun eigen programma toe konden voegen. Voor computers die standaard een schaalopdracht kennen (zoals bijv. de WINDOW-opdracht uit de Basic van de NIVO-apparatuur), is het voor het tekenen in het platte vlak niet nodig nieuwe procedures te introduceren. Helaas kennen de meeste Basics trouwens ook geen echte procedures.

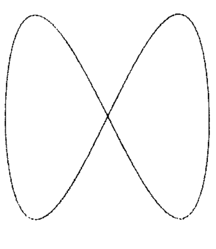
Inbreken in programma's

Eén van de eerste opgaven:

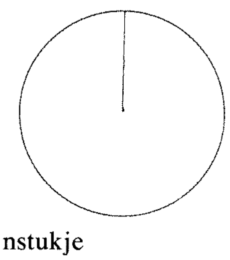
5 *Laad met de opdracht LOAD" GRAPROI" <RETURN> het programma met de grafische procedures en kijk met LIST <RETURN> of het laden gelukt is.*
Voeg daarna de onderstaande regels aan dit programma toe, verwerk het programma en schets de uitvoer.
Opmerking: de constante π heet in BBC-Basic PI.

```
10 REM GRAFIEK VAN ???
20 MODE 4
30 PROCSCHAAL(-1,1,-1,1)
40 PROCPUNT(0,0)
50 FOR T = 0 TO 2*PI STEP 0.05
60 X = SIN(T): Y = SIN(2*T)
70 PROCLIJN(X, Y)
80 NEXT T
90 END
```

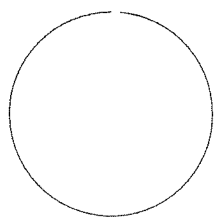
Opgemerkt hierbij moet worden dat de leerlingen noch bij ruimtemeetkunde, noch bij analyse parametervoorstellingen hadden gezien. De parametervoorstelling in een FOR-NEXT lus is blijkbaar zo vanzelfsprekend, dat niemand moeite had met het lezen van het programma.
Het resultaat:



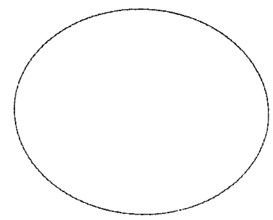
Hoe verander je zo'n mooie Lissajoufiguur in een cirkel? In het programma werd meestal Y=SIN(2*T) vervangen door Y=COS(T). Maar daarmee is de kous niet af, er traden allerlei ongerechtigheden op:



een ongewenst lijnstukje
(te verhelpen door het aanpassen van het startpunt van de kromme lijn met PROCPUNT)



de cirkel sluit niet
(het lassen geschiedde door het ophogen van de bovengrens van T tot iets boven 2π)



de cirkel is ellipsig
(een kwestie van 'schalen')

De leerlingen repareerden deze ongerechtigheden alvorens de volgende opdrachten te maken:

- *Verander het programma zo dat een regelmatige zeshoek getekend wordt (Oplossing: grote stappen maken!).*

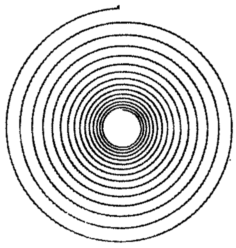
- *Maak een twee keer zo kleine cirkel op het scherm (Twee oplossingen: parametervoorstelling veranderen of de schaal aanpassen).*

- *Probeer het programma te wijzigen of uit te breiden zodat een spiraal getekend wordt.*

Vooral de laatste opdracht is interessant, omdat die aanleiding geeft tot het creatief hanteren van formules. Om te beginnen moet het inzicht doorbreken dat de straal niet langer een constante is, maar continu moet variëren. Met wat voor soort formule kan dat worden bereikt? Een idee kan onmiddellijk getoetst worden door de computer te laten tekenen. Het ontstane plaatje vormt de feedback op de formule en is een stimulans om door te gaan.
De spiraal kan vast op een aantal punten nog verder verfraaid worden: de spiraal moet niet één keer, maar meerdere keren rond gaan, de spiraal moet niet te snel van het scherm af rollen, het plaatje moet er mooi uit komen te zien.
Zo vinden de leerlingen al doende zelf een algebramodelletje voor de spiraal.
Er zijn heel wat verschillende oplossingen mogelijk, zoals blijkt uit de volgende programmafragmenten:

```
50 FOR T=0 TO 20*PI STEP 0.05
55 C=T/80
60 X=C*SIN(T): Y=C*COS(T)
70 PROCLIJN(X, Y)
80 NEXT T
```

Dit geeft de (naar buiten draaiende) spiraal:



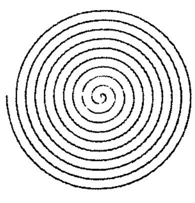
Of in plaats van de regels 55 en 60:

```
60 X=1/(T+1)*SIN(T): Y=1/(T+1)*COS(T)
```

met het plaatje:

Twee leerlingen kwamen met:

```
45 R=1
50 FOR T=0 TO 10*PI STEP 0.05
60 X=R*COS(T): Y=R*SIN(T)
70 PROCLIJN(X, Y)
75 R=0.999*R
80 NEXT T
```



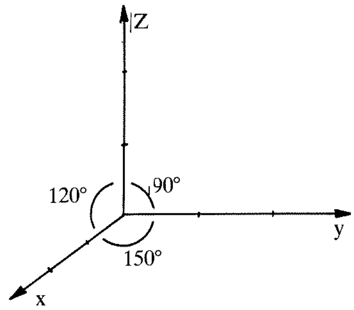
Hiermee was deel 2, het tekenen in het platte vlak op de computer, tot een eind gekomen.
Het idee om met kant-en-klare schaal- en tekenprocedures te werken beviel goed. De leerlingen kwamen daardoor vrij snel tot resultaten en verloren weinig tijd met programmeertechnische zaken of met het intypen van programmaregels.
Sommige leerlingen bekeken de procedures wat beter, maar andere hadden die behoefte helemaal niet. Het effect van de procedures sprak eigenlijk voor zichzelf, dat bleek wel uit het gemak waarmee de leerlingen PROCSCHAAL en PROCPUNT aanpasten waar dat nodig was.

Tekenen in de ruimte

Het derde deel van het practicum was gewijd aan het ruimtelijk tekenen. Voor het tekenen van krommen in de ruimte werden, analoog aan de procedures voor het tekenen in het platte vlak, de volgende procedures geintroduceerd:

- PROCSCHAAL(XMIN,XMAX,YMIN,YMAX, ZMIN,ZMAX)
  Deze procedure legt niet alleen de schaalverdeling vast, maar tekent ook een assenstelsel op het beeldscherm.
- PROCPUNT(X1, Y1, Z1)
- PROCLIJN(X2, Y2, Z2)

De procedures zijn hier gebaseerd op de gebruikelijke scheve-projectiemethode, waarbij de coördinaatassen in projectie hoeken maken van 90°, 120°, 150° en waarbij de verkortingsfactor op de x-as gelijk is aan ½.



Deze projectie wordt beschreven door de formule:
$(x,y,z) \rightarrow (-\frac{1}{4}\sqrt{3}x+y,\ -\frac{1}{4}x+z)$
of door de matrix:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Voor het platte vlak was het gebruik van de gedefinieerde procedures niet zo essentieel, maar voor het maken van ruimtelijke tekeningen blijkt hier de kracht.*) De procedures kunnen op een voor de hand liggende manier met een dimensie uitgebreid worden en de leerlingen worden niet afgeleid door meer of minder ingewikkelde projectiemethoden. Dit neemt niet weg dat het behandelen van projectiemethoden met de computer ook heel interessant kan zijn, maar daar ging het ons niet om.

De opbouw van deel 3 is hetzelfde als voorheen: één programma is gegeven en met dat programma als basis maken de leerlingen zelf nieuwe programma's. Op deze manier blijft de hoeveelheid programmeerwerk voor de leerlingen tot een minimum beperkt.
De eerste opgave:

1 *Een cirkel in de ruimte kan worden beschreven met een parametervoorstelling. Ga na dat het onderstaande programma een cirkel in de ruimte produceert.*
Wat zijn de coördinaten van het middelpunt, hoe groot is de straal en in welk vlak ligt de cirkel?

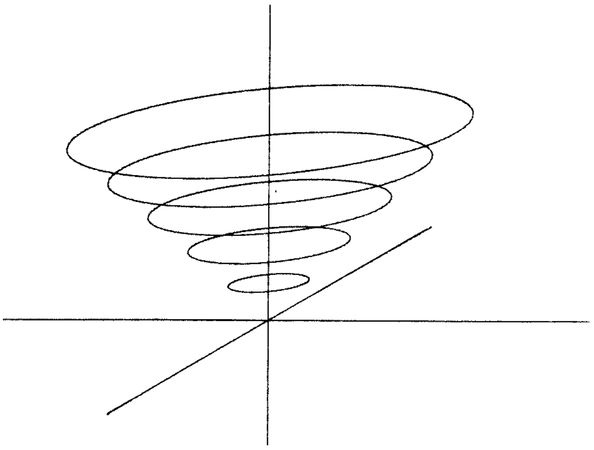
```
10 REM WELKE KROMME?
20 MODE 4
30 PROCSCHAAL(-5,5,-5,5,-5,5)
```

```
40 PROCPUNT(2,0,3)
50 FOR U=0 TO 2*PI STEP 0.1
60 X=2*COS(U): Y=2*SIN(U): Z=3
70 PROCLIJN(X, Y, Z)
80 NEXT U
90 END
```

En de varianten hierop:

- *Maak een programma dat een parabool tekent in het OXZ-vlak (werk met een parametervoorstelling).*

- *Maak een programma dat een serie cirkels tekent met een straal van resp. 1, 2, 3, 4 en 5 op een hoogte van resp. 1, 2, 3, 4 en 5 (zie de figuur).*



Het tekenen van de serie cirkels diende als voorbereiding op het werken met twee parameters en het maken van gebogen vlakken.
De meeste leerlingen pikken dit idee wel op: ze voeren een tweede parameter in (de namen T, I, A en Aantal komen voor) en maken er een herhalingslus bij.
Een enkeling schrijft het programma als het ware vijf keer onder elkaar met:

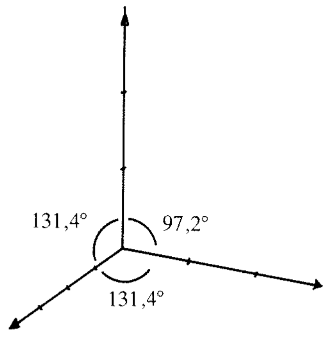
```
X=COS(U): Y=SIN(U): Z=1
.
.
X=2*COS(U): Y=2*SIN(U): Z=2
.
.
enz.
```

Geïnspireerd door de spiraal uit het vorige deel van het practicum, maakten verschillende leerlingen naar aanleiding van deze opgave uit eigener beweging een ruimtelijke spiraal.

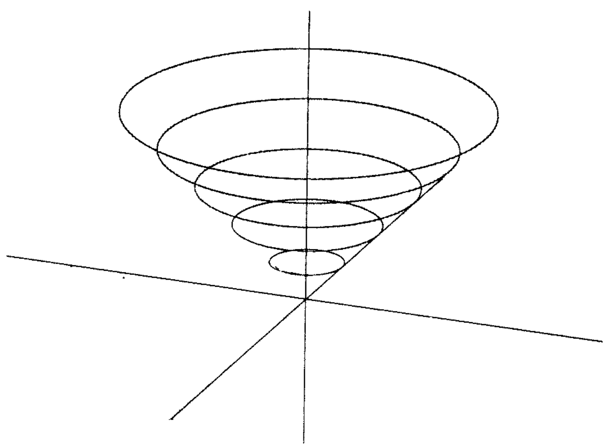
Het zal de lezer zijn opgevallen dat het plaatje van de cirkels iets onnatuurlijks heeft, alsof de cirkels scheef staan of iets dergelijks. Dit heeft te maken met de gekozen projectiemethode (een scheve parallelprojectie). Ook leerlingen vielen hierover en geloofden het plaatje niet. Pas nadat de stoel achter het scherm verlaten was en vanuit een zijdelingse positie met een schuin oogje naar het plaatje werd gekeken, was het acceptabel.

Het argument dat de scheve projectie makkelijk te tekenen is voor de leerlingen, komt bij het tekenen op de computer te vervallen. Achteraf hadden we spijt dat we niet gekozen hadden voor de meer natuurlijk ogende axonometrische projectie. Bijvoorbeeld de ingenieursprojectie met hoeken 97,2°, 131,4° en 131,4° en verkortingsverhoudingen $\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
De matrix van de ingenieursprojectie is:

−0.471*cos(41.2°)	0.943*cos(7.2°)	0
−0.471*sin(41,2°)	0.943*sin(7.2°)	0.943



Het voordeel van het werken met de standaardprocedures is, dat zo'n wijziging gemakkelijk doorgevoerd kan worden. Alleen de procedures hoeven immers aangepast te worden.
De activiteiten voor de leerlingen veranderen er niet door, ze krijgen alleen wat andere plaatjes als resultaat.
In axonometrische projectie ziet de serie cirkels er zo uit:



Een paraboloïde voorgeschoteld

Als klap op de vuurpijl kwamen er tenslotte enkele opgaven over een paraboloïde en een bol.

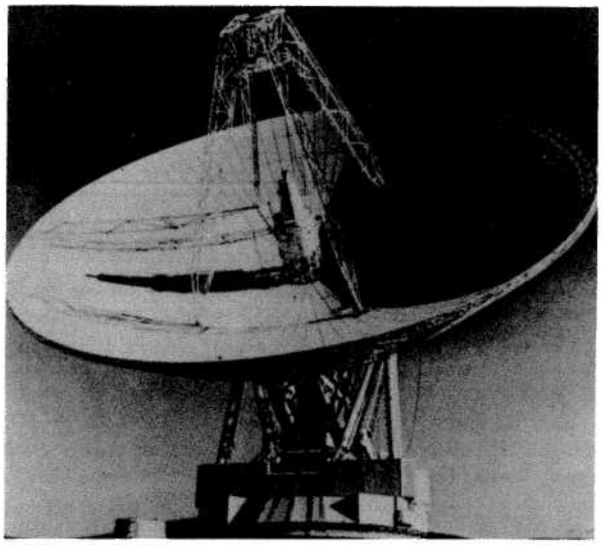
Om te beginnen:
4 *Onderstaand programma tekent een paraboloïde met behulp van een verzameling cirkels.*

```
10 REM SCHOTEL
20 MODE 4
40 PROCSCHAAL(-5,5,-5,5,-4,6)
50 FOR T=0 TO 4 STEP 0.5
```

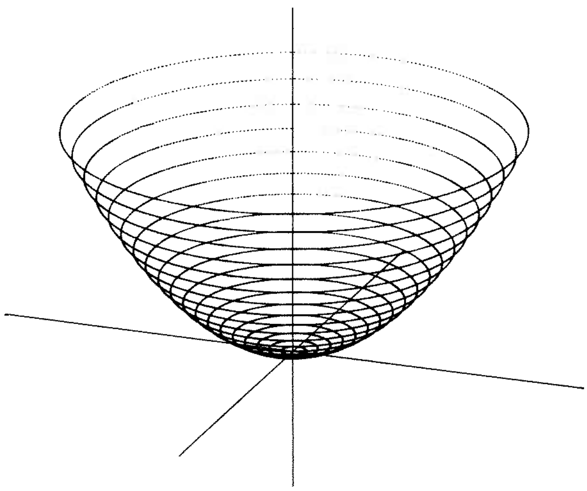
```
60 PROCPUNT(T, 0, 0.25*T*T)
70 FOR U=0 TO 2*PI STEP 0.1
80 X=T*COS(U): Y=T*SIN(U): Z=0.25*T*T
90 PROCLIJN(X, Y, Z)
100 NEXT U
110 NEXT T
120 END
```

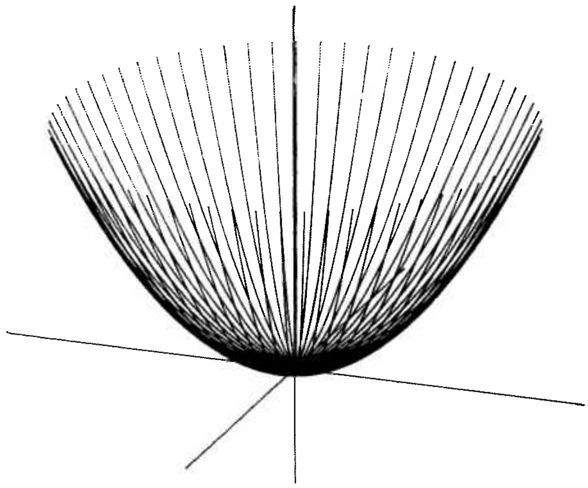
a. Ga na dat de beginpunten van deze cirkels (zie regel 60) op een parabool liggen.
b. Verwerk het programma.
c. Wat moet je in het programma veranderen om een plattere schotel te krijgen?

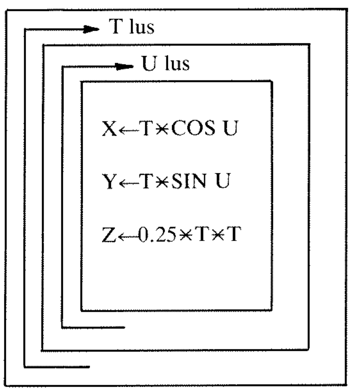
Met dit programma wordt de paraboloïde getekend als verzameling cirkels, maar door het binnenste buiten keren van de twee herhalingslussen kan de paraboloïde getekend worden als verzameling parabolen! In de volgende opgave wordt dan ook van de leerlingen gevraagd het programma in die zin te veranderen.

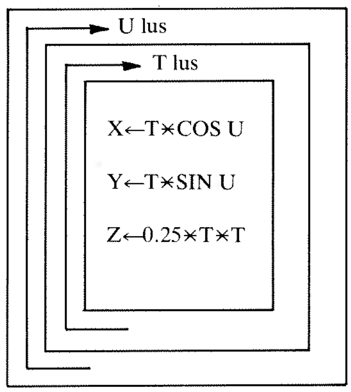


De foto toont een grote radiotelescoop. De schotel heeft de vorm van een paraboloïde.









De laatste opgave van het practicum was:

Ontwerp zelf een programma dat een bol tekent met
a - breedtecirkels
b - meridianen.

Helaas zijn slechts twee groepjes hier aan toegekomen, maar dat mag ook geen wonder heten als we bedenken dat veel leerlingen nauwelijks computerervaring hadden en er slechts twee lessen uitgetrokken waren voor het maken van deze ruimtelijke tekeningen.
Opmerkelijk was dat de leerlingen die deze opgave wel gedaan hebben en passant zelf de parametervoorstelling van de bol uitvonden! Het manipuleren met variabelen en formules is in de context van een dergelijk tekenprogramma blijkbaar heel natuurlijk en daagt de leerlingen uit om zelf te experimenteren en ontdekkingen te doen.

Reacties van leerlingen

Na afloop van de serie van zes lessen heeft leraar Leon v.d. Broek gevraagd om hun mening over deze lessen op te schrijven.
Een greep uit de reacties:

Het programma voor het ruimtetekenen vond ik goed voor ruimtelijk inzicht en om projecties beter te begrijpen (vooral door de mogelijkheid tot draaien).
Het tweede programma voor parameterkrommen in een 2-dimensionaal vlak was handig om de functies vlug te laten tekenen.
Het derde programma voor deze functies in de ruimte was ook handig, omdat het op papier moeilijk is om 3-dimensionale functies te tekenen.
Deze laatste programma's hadden wel meer weg van een computercursus dan van wiskunde, omdat het er vooral om ging functies te vertalen naar Basic. (Jeroen)

Ik vond de lessen ruimtemeetkunde die wij met behulp van de microcomputer gevolgd hebben best wel leuk. Dit in de eerste plaats omdat een beetje afwisseling op zijn tijd niet te versmaden is. En in de tweede plaats omdat ik het ook wel leuk vind om eens achter een computer te zitten, anders kom je er nooit (nou ja, bijna nooit) mee in aanraking. Maar naar mijn mening waren de lessen behalve leuk, ook erg leerzaam. Voor mij werkte het 'ruimtelijk zien' heel verhelderend, ik begreep de stof daardoor beter dan voorheen. Ook de opdrachten vond ik goed in elkaar zitten, hoewel er vooral op het laatst pittige bijzaten, die Herma en ik niet zonder hulp konden oplossen. Naar mijn mening hadden jullie één of twee lessen meer moeten geven, en de stof van de keer daarvoor bespreken (dit is één keer gedaan). Het was, naar mijn mening, een goed idee om verder mee te experimenteren. (Ariana)

Computeren vind ik leuk, omdat ik het 'nooit' doe, maar minder leuk was dat onze computer het een aantal malen af liet weten, wat zoveel tijd kostte, dat we niet het hele programma hebben kunnen doen. De 'kantel een kubus' was leuk, maar zelf een parabool en 5 cirkels boven elkaar ontwerpen lukte niet. We kregen (gelukkig) een ander mooi figuur (5 fluitjes boven elkaar). In het algemeen vond ik het best leuk, voor herhaling vatbaar. (Clairette)

Met computers heb ik nooit zoveel te maken gehad. Af en toe bij wiskunde A en soms spelletjes op een computer maar verder eigenlijk niet. De computerlessen bij wiskunde A waren wel leuk maar wel een beetje saai. De 6 lessen over ruimtefiguren waren in ieder geval niet saai en ik heb er veel van geleerd. Ik wist niet dat er zoveel met een computer kon. Ik vond het af en toe heel moeilijk maar na veel proberen kwam er meestal wel wat uit. Ik vond het tweede deel het leukst omdat je in dit deel zelf veel dingen in het programma moest veranderen en dat lukte meestal wel. Het derde deel vond ik ook leuk maar moeilijker dan het tweede. Alles bij elkaar heb ik veel geleerd en ik vond het ook leuk en interessant. (Petra)

Conclusie

Computerprogrammaatjes van een paar regels kunnen vermoedelijk enorm verhelderend werken bij het verwerven van inzicht in algebraïsche voorstellingen. Een ander belangrijk aspect is, dat je de tekening op de computer *ziet ontstaan*. Je ziet *t* haast letterlijk lopen over het scherm. Door zelf aan de hand van formules plaatjes te maken, is er een voortdurende interactie tussen algebra en meetkunde. De interactie tussen mens en computer zorgt ervoor dat de vaart er in blijft, want haast elk plaatje roept wel ideeën voor een nieuw plaatje op.
Tekeningen in een boek zijn altijd af en zonder beweging, en daardoor soms moeilijk ruimtelijk te 'zien'. Door de computer in te schakelen, wordt de meetkunde dynamisch gemaakt.
Het maken van ruimtelijke tekeningen op het bord is nauwelijks een alternatief, gezien de hoeveelheid werk die dat met zich meebrengt.
Als eerste aanzet tot het gebruik van de micro bij ruimtemeetkunde was de lessencyclus geslaagd te noemen, maar meer dan een aanzet was het ook zeker nog niet.
Ideaal zou zijn, als de micro helemaal geïntegreerd met het boek bij de lessen ruimtemeetkunde gebruikt zou kunnen worden. Dat zou veel beter zijn dan een los practicum zoals dit van enkele lessen. Om dat te kunnen verwezenlijken moet er echter nog heel wat gebeuren. Met name de organisatorische problemen zullen niet de geringste zijn. In het wiskundelokaal zou een vaste demonstratieset moeten staan, inclusief een grote (kleuren) monitor. Nog mooier zou zijn om bijv. één wiskundeles per week in het computerlokaal te geven, zodat de leerlingen waar nodig de computer even kort kunnen gebruiken.
Aan het gebrek aan goede software hoeft het in dit geval niet te liggen, want de aanpak zoals in dit artikel geschetst biedt interessante perspectieven en vraagt geen andere software dan een eenvoudige programmeertaal die grafische opdrachten kent en het definiëren van procedures toelaat.

*) Een Basic die geen procedures toelaat is een stuk minder aantrekkelijk bij deze benadering. Natuurlijk kan het wel, met een constructie als X=X1: Y=Y1: Z=Z1: GOSUB 1000 of door gebruik te maken van functies (DEFFN...), maar deze oplossingen zijn niet fraai.

Literatuur

[1] Kindt, M. en H.B. Verhage: *Ruimtemeetkunde met de micro*(1), Nieuwe Wiskrant, 6e jrg nr. 2.
[2] Craats, J. v.d.: *Voorbeelden*, Euclides, jrg. 61, nr. 7.
[3] Lauwerier, H.A.: *Meetkunde met de micro*, Nieuwe Wiskrant, 5e jrg. nr. 1.