# Zeilen

**G. Schoemaker**
OW & OC, RU Utrecht

*Samenvatting*

*Met behulp van de computer kon het sturen van een zeilbootje gesimuleerd worden.*
*De snelheid hangt af van de hoek tussen vaarrichting en windrichting. Deze simulatie geeft aanleiding tot interessante wiskundige problemen.*
*Leidt dat ook tot zinvol onderwijs?*

## In een notedop

Bij het programma 'zeilen' krijgen leerlingen van 3/4 vwo of havo (en misschien ook wel mavo) te maken met een zeilsimulator. Er moet wel geïnvesteerd worden in kennis van de context zoals op werkblad 1 meteen gebeurt:

zeilen-1

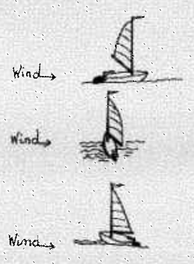
**Over zeilen**

Als je met een zeilboot vaart en de bemanning zorgt ervoor dat de zeilen steeds in de juiste stand staan dan kun je *ten opzichte van de wind* erg veel kanten op.

Het is eenvoudig in te zien dat het lukt met een zeilboot deze kant uit te varen. We noemen dit *voor de wind* zeilen.

Minder vanzelfsprekend is het dat je met een zeilboot zo kunt varen. We noemen dit *halverwind* zeilen.

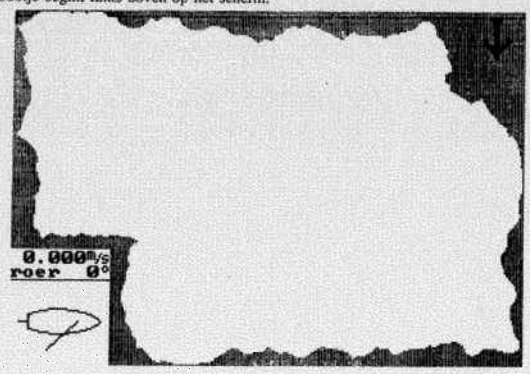
Dankzij de speciale manier van het maken van het zeil en de vorm van het schip is het zelfs mogelijk schuin tegen de wind in te varen. We noemen dit *aan de wind* zeilen.




Een nog scherpere hoek tegen de wind in lukt niet. Als je dat toch probeert, komt het schip stil te liggen en het gaat daarna zelfs achteruit varen.

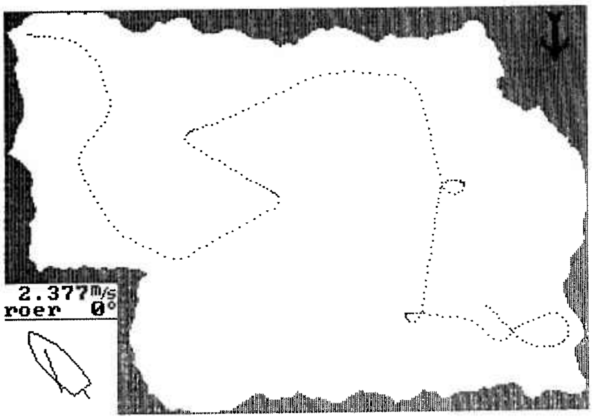
**Over het programma 'zeilen'**

Als je straks het programma gestart hebt, zie je een meer met een oever. Het bootje begint links boven op het scherm.

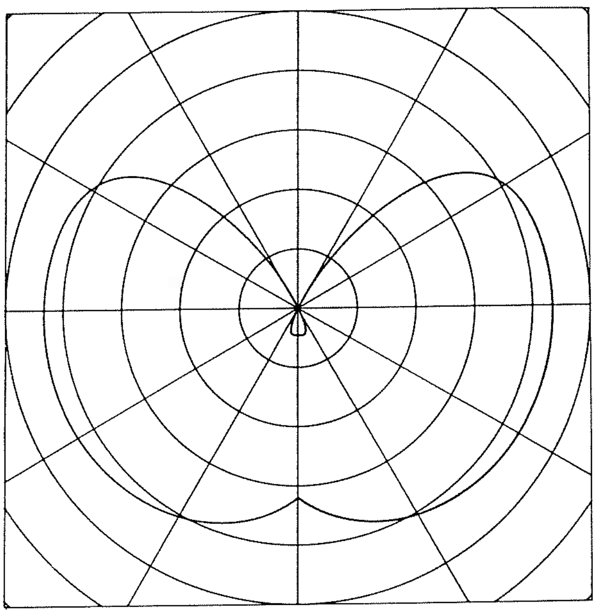



Dan volgt een toelichting op het vakje linksonder met daarin de snelheid, de roerstand en een bovenaanzicht van het bootje. Als de leerlingen een tijdje gevaren hebben, komt nadere uitleg over gijpen en overstag gaan en er volgen ook vragen, één daarvan:

6. ⇒ *Geef op de getekende route aan waar het schip gijpte en waar het overstag ging.*




Daarna volgt het programma waarbij je zelf de windrichting en de vertrekrichting kunt instellen. Leerlingen hebben dan al ontdekt dat de snelheid op een vaste koers na verloop van tijd stabiliseert. Ze krijgen de opdracht deze snelheden te vinden bij verschillende koersen ten opzichte van de wind. Het is duidelijk dat je niet tegen de wind in kunt varen, aan de wind kun je niet zo hard als halverwind. Voor de wind blijkt weer langzamer te gaan dan halverwind. Leerlingen maken van deze meetresultaten een poolgrafiek. De poolgrafiek waar het programma vanuit gaat ziet er als volgt uit:



De overige vragen gaan over het vinden van een snelste route bij het laveren.

## Reilen en zeilen

Toen de eerste versie van de zeilsimulator klaar was – dat was in april 1986 – hebben we – Leo Kalmijn, Kees Henzen en George Schoemaker – een groepje leerlingen van 4 vwo ermee laten spelen. Dat leidde tot een aantal werkbladen en tot een paar wijzigingen in het programma.

Met twee klassen leerlingen – 4 vwo – hebben we gedurende een blokuur met dit materiaal gewerkt. De meeste leerlingen waren enthousiast en kwamen ook toe aan de laatste vragen, sommigen deden lang over het leren sturen van het bootje.
De volgende revisie van de werkbladen bevatte meer informatie over zeilen en verbeterde vragen.

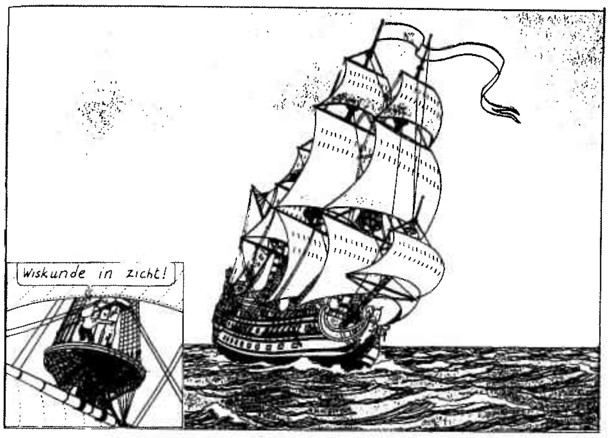
Tijdens een conferentie voor medewerkers van de vakgroep OW & OC is het materiaal aangeboden. Nog steeds was er de drempel van het leren sturen, maar velen zagen er wel wiskunde in. Daar was het allemaal om begonnen. Niet om een aardig programma voor een zeilschool te maken en evenmin om ervaringen met opspattend water te vervangen.

Inmiddels hadden we vragen voor wel zes lessen. Dat was ingegeven door de discussie of het allemaal wel wiskunde was en ook de gedane investering in tijd voor het leren sturen speelde een rol. Die investering moest rendabel gemaakt worden door veel wiskunde-activiteiten aan te bieden. Er zat bij die vragen een uitstapje naar het gebruik van een spreadsheet. Wat wil je nog meer? Vragen formuleren bij een simulatieprogramma en de antwoorden vinden met behulp van een zelf in te richten spreadsheetprogramma.
De moeilijkheid met het sturen was aangepakt zowel in het programma als in de leerlingentekst. Deze versie was uitgangspunt tijdens een halve dag van de studieweek van het WISCOMteam. De stukken vlogen ervan af. We stelden elkaar vragen die we niet een-twee-drie konden beantwoorden, zoals: kun je bewijzen dat op een bezeild traject de recht-toe-recht-aan-koers de snelste is? Dit was de basis voor een belangrijk deel van de latere docentenhandleiding.

Tijdens een conferentie met wiskundedidactici kwam de argumentatie aan de orde: is dit zinvol wiskunde-onderwijs? Hier werd vooral de rijkdom van de context geexploreerd. Hessel Pot attendeerde ons op een artikel in Pythagoras 202 van november 1980. *'Een poolgrafiek bij een zeilwedstrijd'* van de hand van H.N. Pot. De term 'poolgrafiek' namen we meteen over, ook veranderden we nog iets in onze poolgrafiek.
In april '87 leenden we acht leerlingen uit 3 vwo. Zij kregen ongeveer de helft van de oorspronkelijke vragen. De ervaringen waren van dien aard dat een eerste publikatie kon worden gemaakt, behorend bij deze 'eerste helft'. Het programma werd geschoond, de werkbladen nogeens gekuist. Ook moest er een docentenhandleiding worden geschreven bij de werkbladen en het programma.
Het geheel kon mee met de publicatie van WISCOM, zomer '87.

## Wiskunde in zicht

Deze vraag dient beantwoord te worden. Is alle zeiljargon de moeite waard om bij mogelijkheden voor wiskunde-onderwijs te komen? Het eerder getoonde voorbeeld met een gegeven route op het meer en de vraag naar gijpen en overstag gaan, past zo in de 'zeilkunde' van de zeilschool. Om de vraag van het werkblad te beantwoorden moet je de route volgen en je realiseren wat er met het zeil gebeurt. De precieze plaats van het gijpen kun je niet aanwijzen, wel dat er tussen die en die positie gegijpt moet zijn. Een soort doorlopendheidsstelling. Het vraagt een mentale activiteit die ook wordt vereist bij opdrachten *'Zie je wel'*, *'Schaduw en diepte'* en *'Ruimtemeetkunde'*.




Een andere vraag, nog voor de gijpen/overstag-vraag luidt: "Hoe groot is het meer?"

Uit een observatieverslag van George Schoemaker:
"... Ingrid zei tegen me: "Wat bedoelen ze?"
(Ze wist dat ik de tekst had geschreven. Uit beleefdheid en omzichtigheid gebruikte ze het meest verafgelegen persoonlijk voornaamwoord 'ze').
Ik: "Hoe zeg je dat als je zelf langs het meer fietst?"
Zij: "Net zo, maar dit is wiskunde en dan moet je het precies zeggen."
(Nu gebruikt ze 'je' als vervanger voor 'ik', in de betekenis van 'van mij wordt verwacht dat'. Ik kan het ook ter harte nemen als 'jij'.
Met dit antwoord zijn we op het niveau van 'wat is wiskunde'. Dat komt straks.)
Ik: "Wat zou jij kiezen als maat?"
Ingrid: "De omtrek, als je steeds wat nieuws wilt zien."
Daarna gaat ze meten samen met haar maatje Diana.
Ze varen het bootje vanaf het beginpunt, de snelheid loopt op en stabiliseert bij 4.308m/sec.
De eerste keer vergaten ze de tijd bij te houden.
Dan weten ze dat ze moeten vermenigvuldigen.
Ze vinden 4.308 een rotgetal om mee te vermenigvuldigen.
Diana: "Die 8 kan er wel af. Zo precies meten we niet."
Ingrid: "Die 3 kan er ook wel af want in 't begin was 't minder dan 4..."

Er bleken meer oplossingen mogelijk. Een groepje liet het bootje buiten het riet op snelheid komen, (het programma laat dat toe, in volgende opgaven gebruiken de leerlingen een realistischer programma waarin rietzeilen wordt afgestraft) en daarna vermenigvuldigden ze 4.308 met de gemeten tijd, waarna er werd afgerond. Zie het vervolg van dit artikel voor de diverse programma's zeilen.

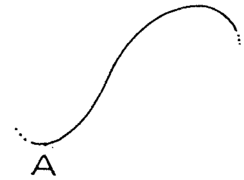
Heel interessant was het gesprek over de vraag of je zelf mocht kiezen en wat je allemaal kon kiezen: de omtrek, de oppervlakte, de langste rechte lijn, de grootste afstand die je moet zwemmen als het bootje omslaat...
Maar als je zo'n keuze doet, moet je het er wel bij zetten. De vraag staat in alledaagse taal en jij maakt er bij de beantwoording wiskunde van!

Een wiskundedidacticus stelde de vraag of een seconde in het programma ook een echte seconde is, in jargon: "Gebruik je real time?" Ja dus: stippen worden om de seconde gezet, daar kun je ook nog gebruik van maken.

## Over de poolgrafiek

Bij het vergelijken van de zelf geconstrueerde 'windappel' met de poolgrafiek van het programma stelden we de vraag:

*Waarom kan zo'n windappel niet bestaan?*

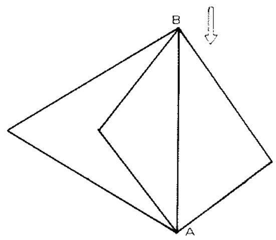



Leerlingen en volwassenen hadden daar vaak even moeite mee.
Dan komt de vraag over de snelste route:

(werkblad 8)

## De snelste route

*De gunstigste hoek bij het aan de wind varen:*
*Als je van A naar B wilt kun je verschillende routes proberen te varen. Er zijn er vier getekend.*
*De kortste route (in afgelegde weg) hoeft nog niet het snelst te zijn (in tijd).*

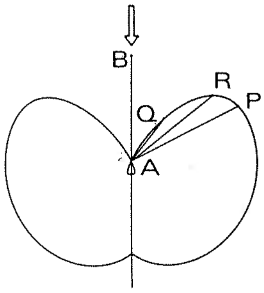



15. ⇛ *Welke van de vier getekende routes is volgens jou de snelste? Zou er nog een snellere te vinden zijn? Teken die dan.*

16. ⇛ *Hoe kun je met behulp van de poolgrafiek bij opgave 12 de 'snelste' route vinden? Maak een schetsje hoe je deze poolgrafiek gebruikt hebt en probeer te bewijzen waarom dit de snelste route is.*

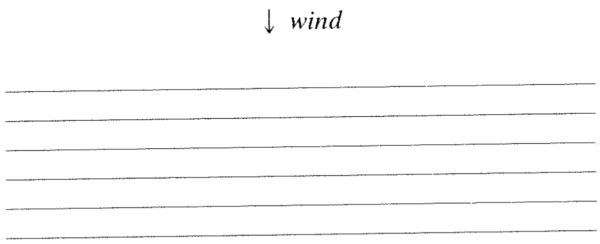
Een aantal leerlingen ontdekte dat je moest letten op de projectie van lijnstukken AP, AQ AR (met P, Q en R op de windappel) op AB.
Dat leidde weer tot de vondst van de raaklijn. In de docentenhandleiding staat hierover:

*Opgave 16: Bekijken we de drie getekende vaarrichtingen* AP, AQ *en* AR.
*Bij* AP *varen we het hardst.*
*Bij* AQ *wijkt de vaarrichting het minst af van* AB.
*Bij* AR *is snelheid in combinatie met vaarrichting optimaal.*
*Argumentatie: de eindpunten* P, Q *en* R *op de poolgrafiek kunnen worden opgevat als posities van schepen na een tijd* t. *Het gaat om de terreinwinst in de tegenwindse richting.*

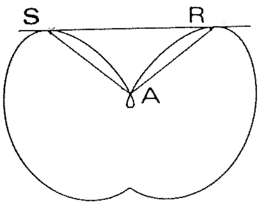



*figuur 11*

*Je kunt lijnen trekken dwars op de windrichting:*




*Die lijnen moet je zeker over, tegenwinds naar boven toe.*




*figuur 12*

*Wie alleen maar de richtingen* AR *en* AS *gebruikt, steekt steeds de meeste lijnen over en ligt dus altijd op de voorste lijn vergeleken met zeilers die ook andere koersen kiezen. Waar kun je zo komen?*

*Op alle punten (vanuit* A*): $t_1\vec{AS} + t_2\vec{AR}$, waarbij $t_1$ en $t_2 \geq 0$ zijn, $t_1$ en $t_2$ zijn evenredig met de tijd gedurende welke een richting* AS *respectievelijk* AR *gevaren wordt. Dat zijn juist alle punten in de voorwaartse sector tussen de lijnen* AS *en* AR. *Met andere woorden: door je te beperken tot die twee richtingen (*AS *en* AR*) kun je in de sector altijd de eerste zijn. Alle punten op één dwarslijnstuk kunnen bereikt worden, gebruikmakend van* AS *en* AR *in dezelfde tijd. Voor alle punten van zo'n dwarslijnstuk is $t_1 + t_2$ constant.*

De argumentatie dat bij ruimere koersen (behalve bij voor-de-windse) recht-toe-recht-aan de snelste route oplevert moet de geïnteresseerde lezer zelf bedenken.

Wellicht daarover meer in een vervolgartikel over deze context.
De docentenhandleiding die met het materiaal nog voor het schooljaar '87/'88 verspreid wordt door het NIVO, bevat een antwoord.

## Zeilgarderobe

De zeilgarderobe, oftewel de bijbehorende software, omvat een programma zeilen, zeilen met instelbare windrichting en vier boeien en zeilduo voor een zeilwedstrijd. Kees Henzen is de maker van deze software. Hij heeft naast dit zeilmakerswerk gekeken in de klas bij try-outs van het programma en iedere keer haalde hij zich nieuw werk op de hals. Zo hoort het ook. De software staat gedetailleerd beschreven in de eerder genoemde docentenhandleiding.
Bij een nabootsing van de werkelijkheid moet je ergens stoppen. Wij lieten de wind constant van snelheid, weliswaar uit variabele windrichting, maar eenmaal gekozen bleef de wind in z'n hoek. Ook wordt een volautomatische zeilkabouter bijgeleverd die de juiste zeilstand verzorgt van het grootzeil. Een fok werd te ingewikkeld. De gebruiker moet wel zelf sturen met behulp van vijf toetsen. Dus geen joystick ter vervanging van de helmstok en het bootje gaat ook ook niet schuin, geen geluiden van geklots van water of over de beeldbuis heenslaand buiswater.
Wie met deze software in zee gaat als docent hoeft de precieze werking daarvan niet te kennen om goed onderwijs te kunnen geven. De docent moet de handen vrij hebben voor de activiteiten in de klas en niet voortdurend met zeilreparaties bezig hoeven te zijn.
Wie tegen de wal vaart krijgt dit op het scherm te zien:


De docent die met zeilen scheep gaat hoeft in de klas geen schipbreuk te lijden.

## Literatuur

De avonturen van Kuifje. *Het geheim van de Eenhoorn*, Hergé, 1951.