Het Eierverfprobleem

J.W. Nienhuys
Faculteit Wiskunde en Informatica, TU, Eindhoven

Samenvatting

Ruim een dozijn contexten voor het probleem van het aantal rijtjes van v *getallen met som* e *wordt gegeven. Tevens worden enige elementaire oplossingsmethoden geschetst.*

1. Het is al bijna Pasen en ik heb 20 eieren die ik met de kleuren rood, oranje, groen, blauw, paars of zilver wil verven. Eén manier om dat te doen kunnen we kortweg noteren met $r^5o^2g^0b^6p^4z^3$ (geen groen dus), maar er zijn nog meer manieren. Hoeveel eigenlijk?
2. Er zijn verkiezingen in een vereniging en er zijn zes kandidaten, namelijk Richard, Olga, Geraldine, Bastiaan, Peter en Zita. Op hen samen worden 20 stemmen uitgebracht. Eén uitslag zou kunnen zijn – verkort weergegeven – : $R^5O^2G^0B^6P^4Z^3$, een beetje sneu voor Geraldine! Hoeveel uitslagen zijn er eigenlijk mogelijk?
3. Ik doe een graai in een grote bak met munten. In de bak zitten roebels, ouguiyals, guldens, baht, peseta's en zloty's. Ik pak in totaal 20 munten, toevallig heb ik $r^5o^2g^0b^6p^4z^3$getrokken. Dat is pech, want aan al dat buitenlandse geld heb ik niets. Hoeveel mogelijkheden zijn er eigenlijk voor een graai van 20?
4. Ik moet 20 knikkers verdelen over zes verschillende doosjes. De doosjes zijn respectievelijk gemerkt met R, O, G, B, P en Z. Op hoeveel manieren kan ik die 20 knikkers verdelen over de doosjes? (Eén zo'n manier is natuurlijk $R^5O^2G^0B^6P^4Z^3$, er hòeven geen knikkers in alle doosjes, er mogen er leeg blijven.)
5. Ik gooi met 20 dobbelstenen tegelijk. Toevallig gooi ik 5 enen, 2 tweeën, 6 vieren, 4 vijven en 3 zessen. Kort genoteerd is deze uitslag $1^52^23^04^65^46^3$. Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er?
6. Aan een zestal verschillende waslijnen genummerd 1 tot en met 6, wil ik 20 witte zakdoeken te drogen hangen. Eén manier om de zakdoeken over de waslijnen te verdelen is $1^52^23^04^65^46^3$. Hoeveel manieren zijn er in totaal mogelijk? Dit probleem is niet zó huiselijk als het lijkt. Ik kan met die waslijnen en zakdoeken een geheim signaal geven aan iemand anders. Hoeveel verschillende geheime signalen kan ik op die manier afspreken?
7. Ik vraag me af hoeveel rijen er zijn van nullen en enen, met precies 20 nullen en 5 enen. Als ik die enen vast opschrijf, zó:

   . . . 1 . . . 1 . . . 1 . . . 1 . . . 1 . . .
   (1) (2) (3) (4) (5) (6)

   dan moet ik op de stippeltjes nog 20 nullen verdelen.
   Eén zo'n verdeling is $(1)^5(2)^2(3)^0(4)^6(5)^4(6)^3$, dat wil zeggen:

   $\boxed{00000\ 1\ 00\ 1\quad 1\ 000000\ 1\ 0000\ 1\ 000}$

   maar er zijn natuurlijk nog veel meer mogelijkheden. Ik moet me wel houden aan het totale aantal van 20 nullen, maar ik hòef al die stippeltjes niet te gebruiken.
8. In een dierentuin staan 29 lege kooien op een rij naast elkaar. De dierentuin heeft 5 leeuwen onder te brengen. Om bepaalde redenen moet er tussen twee leeuwen altijd een lege kooi blijven. De dierentuin komt er dus ongeveer zó uit te zien.

   $$(1)\ L\ \varnothing\ (2)\ L\ \varnothing\ (3)\ L\ \varnothing(4)\ L\ \varnothing\ (5)\ L\ (6)$$

   met nog 20 lege kooien te verdelen over de 'tussenruimten' (1) tot en met (6). Eén mogelijke manier is $(1)^5(2)^2(3)^0(4)^6(5)^4(6)^3$, we laten het aan de lezer over er een plaatje bij te tekenen. Hoeveel manieren zijn er in totaal?

9. Hoeveel termen zou je in $(a+b+c+d+e+f)^{20}$ krijgen als je de haakjes zover mogelijk uitwerkt en gelijksoortige termen bij elkaar raapt? Eén zo'n term is natuurlijk:

$$\frac{20!}{5!2!0!6!4!3!}\, a^5b^2c^0d^6e^4f^3$$

Niemand is zo gek om dit uitschrijven echt te gaan doen, want er zijn in totaal veel te veel – ja hoeveel eigenlijk? – termen.

10. Hoeveel oplossingen heeft

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=20$$

als we voor de x_i alleen niet-negatieve gehele getallen toelaten? De oplossingen zijn allemaal rijtjes van zes getallen met som twintig, bijvoorbeeld (5,2,0,6,4,3).

11. Wat is de coëfficiënt van x^5 in $(1+x)^{25}$? Ik kan me deze formule voorstellen als een produkt.

$$(1+x)(1+x)\ldots(1+x)$$

van 25 tweetermen. Als ik dit produkt wil uitrekenen, moet ik in alle 25 factoren telkens één term pakken, die allemaal met elkaar vermenigvuldigen, en dat op alle mogelijke manieren. Eén zo'n manier is dat je ze zo pakt:

$$11111x11xx111111x1111x111,$$

dit geeft een x^5. Er zijn nog wel andere manieren om x^5 te krijgen. Het totaal aantal manieren is juist de gevraagde coëfficiënt.

12. Het wordt steeds wiskundiger! Nog eentje! Als ik

$$\frac{1}{(1-x)^6} = (1+x+x^2+x^3+\ldots)^6 =$$
$$(1+x+x^2\ldots)(1+x+\ldots)(1+x+\ldots)$$
$$(1+x+\ldots)(1+x+\ldots)(1+x+\ldots)$$

zou uitvermenigvuldigen, wat wordt dan de coëfficiënt van x^{20}? Eén manier om x^{20} te krijgen is door in de respectievelijke factoren termen

$$x^6, x^2, x^0, x^6, x^4, x^3$$

te pakken (waar x^0 hetzelfde is als 1). Er zijn nog heel veel andere mogelijkheden. Het totaal aantal is juist de gevraagde coëfficiënt.

13. Ik kan me niet inhouden. Nu echt de allerlaatste. Gegeven zes verschillende vlaggemasten en 20 verschillende signaalvlaggen. Elke mast is lang genoeg om er desnoods alle 20 signaalvlaggen boven elkaar aan te hangen. Hoeveel verschillende signalen kan ik geven door alle 20 vlaggen aan de masten te hangen? De onderlinge volgorde op de masten is van belang.

De lezer heeft het hopelijk al door. Al deze problemen lijken op elkaar als je op de wiskundige structuur let. Die structuur komt het duidelijkst tot uiting in versie tien. Persoonlijk noem ik ze allemaal het eierverfprobleem. De oplossing is het makkelijkst als je naar de zevende versie kijkt. Het gaat daar om 25 posities waarvan je er vijf moet kiezen om er een één neer te zetten. Het antwoord is het aantal manieren om uit een verzameling van 25 verschillende dingen (hier: posities) er vijf uit te kiezen, oftewel:

$$\binom{25}{5} = \binom{25}{20} = \frac{25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$$

Eigenlijk is het plaatje bij 7 ook een plaatje bij 1. Als je goed kijkt zie je in het plaatje van versie 7 zes bakken verf staan, de enen zijn de tussenwanden tussen de bakken en de nullen zijn de eieren die al in de eierverf liggen.

Natuurlijk zijn er nog wel andere manieren om dit probleem op te lossen. Versie 11 gaat heel snel door de vijfde afgeleide te berekenen van $(1+x)^{25}$ en evenzo gaat versie 12 vlug door links en rechts in

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$$

de vijfde afgeleide te berekenen. Ze gaan allemaal tamelijk vlot door met recurrente betrekkingen te werken. Dat gaat als volgt. Laat $A_{e,v}$ het aantal manieren zijn om e eieren met v soorten verf te verven. Als we de manieren verdelen in twee soorten: manieren waarbij de laatste kleur niet gebruikt wordt (dat zijn er $A_{e,v-1}$) en manieren waarbij er in de laatste kleur tenminste één ei komt (dat zijn er $A_{e-1,v}$), dan vind je:

$$A_{e,v} = A_{e-1,v} + A_{e,v-1} \quad ,$$

en je vindt dat de getallen $A_{e,v}$ op dezelfde manier worden opgebouwd als de getallen uit de rekenkundige driehoek*. Dit is al een 'geleerde' manier, maar het kan nog wel ingewikkelder, zie [1]. Het zal ook wel gaan met Pólya-theorie, maar dat is een kanon om op een mug te schieten.

Hoe dan ook, als je op de een of andere manier merkt dat het antwoord van een dergelijk probleem iets simpels is, zoals een binomiaalcoëfficiënt, dan loont het meestal de moeite om ook een simpele oplossing te zoeken.

De lezer heeft zich misschien afgevraagd wat dat dertiende probleem met de andere te maken heeft. Als u dat al gezien hebt, mag u doorlezen, anders moet u nu even stoppen en proberen dat zelf te ontdekken.

Het is niet zo moeilijk als het lijkt. Die vlaggemasten zijn natuurlijk gewoon de waslijnen van versie zes. De signaalvlaggen vervangen we gewoon door witte vlaggen. Vanzelfsprekend is dat niet goed. Maar bij elke waslijn-oplossing zijn er nog twintig-faculteit manieren om de signaalvlaggen op de plaatsen van de witte vlaggen te hangen. Dus het antwoord is dat van probleem 1 tot en met 12, vermenigvuldigd met 20!

Als u hier toch even over hebt moeten nadenken, dan heeft u ervaren hoe lastig het is om hetzelfde probleem in telkens andere contexten te herkennen. Dit blijkt ook bij het onderwijs. De leerlingen vinden het vaak moeilijk om een probleem waarvan ze al meerdere versies gezien hebben, te herkennen in een andere versie. Het lijkt me dat dit stof genoeg biedt voor bespiegelingen over het wezen van de wiskunde, het doel van het onderwijs, enzovoorts. U kunt net zo goed bespiegelen als ik, dus dat ga ik nu niet voordoen.

[1] Jonge, C. de: *Pascal*, Nieuwe Wiskrant, 6e jaargang, nr. 3, april 1987, pag. 27-29.

* Ook wel bekend als de driehoek van Pascal. Deze sierde al geruime tijd voor Pascal de titelpagina van rekenboeken. In 1303 verscheen in China een boek waar hij in stond als "Antieke Tabel", met aanduidingen waaruit blijkt dat hij gebruikt werd voor het berekenen van machten van een binomium.