Het twaalfjarig bestand

G. Schoemaker
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

In Noordwijkerhout hield ik een lezing op de najaarsconferentie 1987 van de NVORWO (Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs).
Achteraf vroegen de organisatoren of ik mijn tekst wilde inleveren voor het verslag. Ik had slechts trefwoorden en een stapel sheets. Daaruit heb ik een artikel samengesteld. Wie er geweest is, mist de vlieg op de overheadprojector en de schuiftrombone. Wie er geweest is en het artikel leest, ontdekt veel meer lijn en explicitering dan tijdens de lezing.

Toen we Indië nog hadden, was het vaststellen van de schoolleeftijd van kinderen soms een probleem. Ouders hadden niet altijd de zorgvuldigheid van Saïdjah en Adinda, die elke maan een kerf zetten, in totaal 3 maal 12 manen. Adinda kerfde alle manen in haar rijstblok.
In een dessaschool, meestal zending- of missieschool, hadden de kinderen niet zo'n kerfstok. Toch moest iemand beslissen wanneer het leren lezen en schrijven met kans op succes een aanvang kon nemen. Men liet de kinderen met hun rechterarm over het hoofd heen naar hun linkeroor reiken. Wie bij zijn oor kon, was zes jaar of ouder. Er zijn nog onderwijzers/essen in leven die in de jaren twintig deze oorpakproef toepasten. Ook in Nederland werd deze methode toegepast als men twijfelde of een kind schoolrijp was. De methode zou ook gebruikt zijn in de vorige eeuw om vast te stellen of kinderen al deel konden nemen aan het produktieproces.*
In figuur 1, afkomstig uit een boek over ontwikkelingspsychologie, is te zien dat de zuigeling in verhouding met de lengte van de ledematen een groot hoofd heeft. Die verhouding verandert in de volgende jaren. Zo omstreeks het zesde levensjaar haalt de rechterhand het linkeroor.
Zo op het eerste gezicht een merkwaardig plaatje. Hoe haal je het in je hoofd om al die personen van foetus tot volwassene even groot te tekenen. Voor het vaststellen van de interne verhouding lengte arm tot omtrek hoofd is dat niet nodig. Het plaatje maakt het makkelijk dit soort interne verhoudingen te vergelijken.
Bij procenten gebruiken we zo'n denkmodel. Vergelijken we de uitgaven van de USA met die van Nederland dan kunnen we met dit plaatje illustreren dat het Nederlandse begrotingstekort naar verhouding groter is dan het Amerikaanse, bij voorbeeld door te wijzen op de hoofden van de tweejarige en de 25-jarige. Als we vinden dat tienjarige kinderen met procenten moeten kunnen rekenen, dan verklaren we daarmee dat ze zo'n denkmodel moeten kunnen hanteren.
De oorpakproef was voor de dessakinderen een eindterm maar tevens beginterm. Een eindterm is gedurende een mensenleven langer begin- dan eindterm.

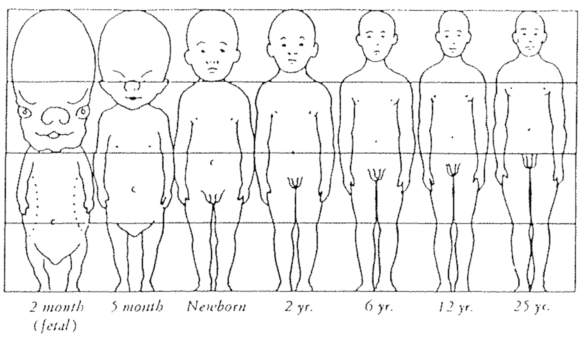

fig. 1

Voor elk examen is er spanning, aandacht voor details, die woordjes leren, dat boek lezen, deze som kunnen maken. Na het examen is er ontspanning, de woordjes, het boek en de som worden nooit meer op die manier gevraagd. Het met succes afleggen van het examen maakte een opening.
Je kunt er een grafiekje bij tekenen.

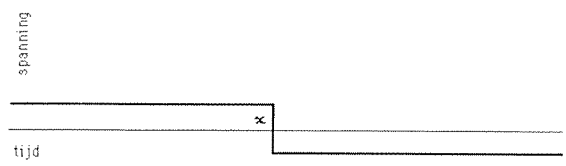

fig. 2

Langs de horizontale as verstrijkt de tijd, langs de verticale as stijgt de spanning die samenhangt met aandacht voor het detail. De x geeft het examen aan. De pendant van deze grafiek staat in figuur 3.

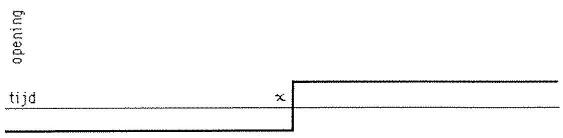

fig. 3

Nu staat langs de verticale as de opening naar maatschappelijke terreinen, zoals toelating tot een hoger type onderwijs, de toelaatbaarheid tot een bepaalde functie in het bedrijfsleven.

Inzicht in luisteren

We staan langs de kant van de weg. Er komt een ziekenauto met sirene langs. Dat klinkt geagiteerd als ie nadert. Als ie voorbij is en verder weg, klinkt het rustiger. Bij het passeren klinkt het heel even vals.
Bijna niemand kan – afgaand op zijn geheugen – het geluid van de passerende ziekenauto nazingen. Je moet er eerst over nadenken en dan is het mogelijk het geluid te reconstrueren.
Laten we het eens proberen.
De auto rijdt naar ik aanneem met constante snelheid. Als de ziekenauto naar ons toe rijdt, horen we het signaal hoger dan de chauffeur het hoort. We krijgen meer trillingen (per seconde) te horen dan waar we normaal gesproken recht op hebben. De trillingen die wij horen volgen elkaar sneller op dan normaal. Dat komt door de snelheid van de auto. Als de auto voorbij is, krijgen we minder trillingen per seconde te horen. Tijdens het passeren zakt de toon. Dat is het moment van het valse geluid. Globaal ziet de grafiek er zo uit:

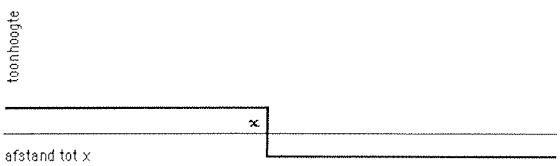

fig. 4

Langs de horizontale as de afstand tot x, waar ik stilsta. Langs de verticale as de toonhoogte behorend bij de plaats van de ziekenauto ten opzichte van x. De toonhoogte die bij elk willekeurig punt a staat aangegeven is de toonhoogte die je bij x waarneemt als de auto bij a is.
Je krijgt eenzelfde lijnenspel als bij de eindtermen. Langs de assen staan echter andere eenheden. De grafiek is slechts een globale grafiek. Het deuntje van de ziekenauto is niet in kaart gebracht.
Als de chauffeur het zo hoort:

fig. 5

Hoe ziet de grafiek van figuur 4 er dan uit?
In het deel links van x moet het signaal aangegeven door de vier evenwijdige lijnstukjes iets omhoog. Rechts van de x moet het signaal lager dan het signaal dat de chauffeur hoort.
Kunnen we daarmee volstaan? Nee. Bij voorbeeld na het passeren horen de tonen niet slechts lager maar ook langer. En voor het passeren klinken de tonen korter.
De grafiek ziet er zo uit.

fig. 6

Jammer dat we hard-zacht niet kunnen aangeven in deze grafiek. Dan moeten we een andere grafiekentaal gebruiken, die van het notenschrift.
Daarin zijn < en > tekens voor steeds luider en steeds zachter.

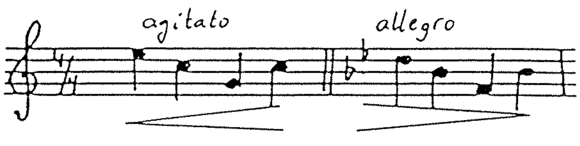

fig. 7

In het notenschrift heb ik nog een gegeven onthuld: Bij het passeren zakt het signaal een hele toon. Hoe groter deze val van het melodietje hoe harder de auto rijdt. Je kunt ook uitrekenen hoe hard de auto rijdt bij een toonval van een hele toon. Het notenschrift heeft ook zo z'n beperkingen. Daarin moet je door woorden als agitato en allegro aangeven dat de noten van een maat korter dan wel langer duren.
De grafiek in fig. 6 suggereert een kwantitatieve uitdrukking. Dat is echter nauwelijks het geval. De eenheden staan niet op de assen. Ik laat me niet uit over de precieze toonhoogte en daarmee verdoezel ik in deze plaatjes mogelijkheden tot kwantificeren. De 'toonval' kan gerelateerd worden aan de toonafstanden in het melodietje alleen als we het melodietje kennen. De lengte van de strepen na de toonval kan niet gerelateerd worden aan de toonval (tenzij we kennis van het melodietje gebruiken zoals fig. 7 die

verschaft). Ik spreek alleen maar over "hoe groter de toonval, hoe langer de strepen worden" maar niet over hoe lang ze worden.
Ook in het notenschrift kan ik me nog aardig op de vlakte houden want agitato en allegro zijn rekbare begrippen. De toonval ligt hier open en bloot en de rekenaars kunnen de snelheid van de ziekenauto uitrekenen.
Het gaat nog steeds ook over eindtermen. Moeten onze leerlingen leren dat er verschillende 'talen' zijn om iets uit te drukken! Elke taal heeft zo zijn voor- en nadelen. Binnen de wiskunde heb je ook verschillende manieren om iets voor te stellen. Met grafieken, met vergelijkingen, met meetkundige figuren. Vaak is een kwalitatieve aanpak makkelijker dan een kwantitatieve. Soms helpt de kwalitatieve om tot een kwantitatieve methode te komen.
Het springen van de ene naar de andere manier om iets voor te stellen, moeten leerlingen dat kunnen? Als ze daar niet zelf toe in staat zouden zijn, heeft het dan zin de achterliggende technieken te leren?

Van haken, aardbol en touwen en de grafieken die erbij horen

In het boek 'vriendelijke wiskunde' staat een plaatje van Heleen Verhage, die een door haar gemaakte pannelap toont. De pannelap is niet plat geworden en dat was wel de bedoeling. Kennis over de omtrek van een cirkel en de hoogte van een steek is voldoende om precies uit te rekenen hoeveel steken in elke toer gemeerderd moeten worden. Opmerkelijk is dat het aantal steken dat gemeerderd moet worden in elke toer even groot is.
Het staat als volgt uitgewerkt.

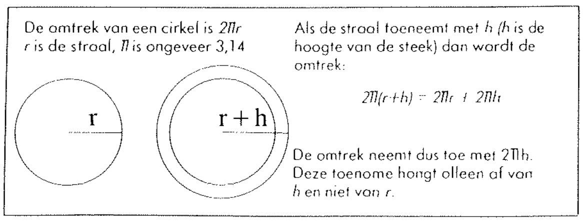

fig. 8

Voor de meeste leerlingen in de leeftijd twaalf tot zestien jaar is zo'n uitwerking niet te volgen. (Voor deze leerlingen is het boekje overigens niet geschreven.)
Een mooi voorbeeld van didactische overdrijving is het bekende probleem:

> Leg een touw om de evenaar, las een meter in, span het touw door het op even lange stokjes te zetten. Hoe lang moeten die stokjes zijn?

Die blijken ongeveer 16 centimeter lang te moeten zijn.
Neem je een schoteltje en je last in het touw om de omtrek weer een meter in dan krijg je ook stokjes van 16 cm.
Het stond al te lezen in het zinnetje: "Deze toename hangt alleen af van h en niet van r".

Ik kom aan die 16 centimeter door de vergelijking op te lossen $2\pi r = 100$. Maar als leerlingen zo'n uitwerking met $2\pi(r+h)$ niet kunnen volgen dan komen ze ook niet aan 16 cm toe. Voldoende redenen om niet aan te komen met dit soort wiskunde bij de doelgroep van twaalf tot zestien jarigen? In de didactiek bestaat de neiging om in zo'n geval naar een niveau te gaan van getallenvoorbeelden.
Misschien lukt het wel met een andere aanpak door te kijken naar de fundamentele eigenschap en van de lineaire functie.
De omtrek van een cirkel is een lineaire functie van de straal. Maak je de straal drie maal zo groot dan wordt de omtrek drie maal zo groot. Grafisch ziet dat er zo uit:

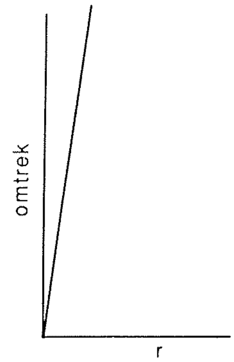

fig. 9

Tekenen we in deze grafiek gelijke stukjes op de verticale as dan horen daar onderling gelijke stukjes op de horizontale as bij. Zie fig. 10.

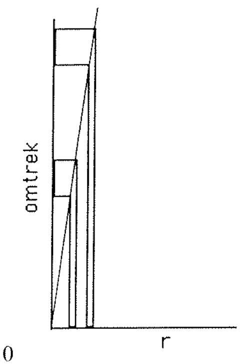

fig. 10

De grafiek van fig. 9 is opnieuw gemaakt met een andere printer. Het resultaat staat in fig. 11.

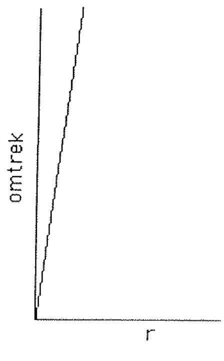

fig. 11

De onvolkomenheid van deze printer brengt iets aan het licht over het wezen van de lineaire functie. De verticale lijnstukjes zijn even lang. (Als je er een microscoop boven zet, klopt dat niet.)
Algemener gezegd: bij onderling gelijke stukken op de ene as horen ook onderling gelijke stukken op de andere as. Daarmee is duidelijk dat de lengte van de stokjes bij de aardbol en het soepbord – mits de omtrek in beide gevallen met een meter was verlengd – dezelfde is. Ook kun je zien dat het aantal steken dat je moet meerderen in de vijfde toer even groot is als in de achtste toer van de pannelap.
Als je een dun elastisch vlies om een voetbal maakt en je last er 1 vierkante meter in en je blaast de ruimte vol met lucht dan wordt de voetbal omhuld door een bol van een dun vlies met een aanzienlijk grotere straal dan de voetbal heeft. Doe je dat met de aardbol dan neemt de straal nauwelijks toe.
De oppervlakte van een bol is een kwadratische functie van de straal. Wordt de straal 3 maal zo groot dan wordt de oppervlakte 9 maal zo groot.
Grafisch ziet dat er zo uit:

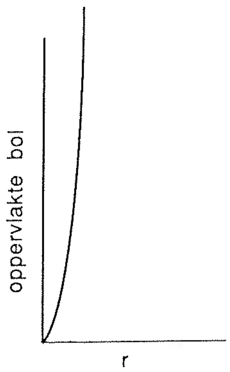

fig. 12

Met de goedkopere printer ziet het er als volgt uit:

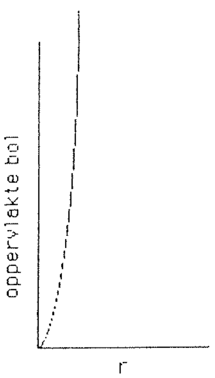

fig. 13

Nu is goed te zien dat de verticale stukjes steeds toenemen.
Aan boord van schepen worden touwen soms opgeschoten op de volgende manier:

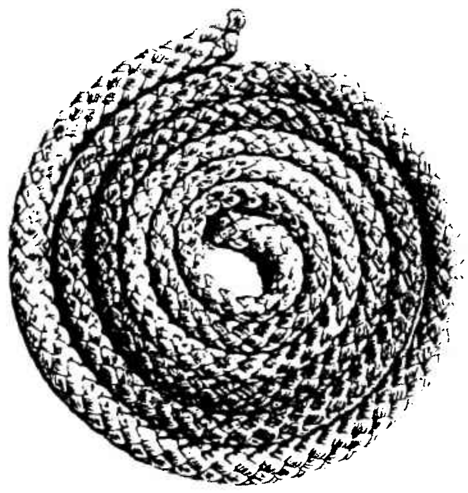

fig. 14

Een touwpannekoek. (Ik gebruik hier tot ergernis van de maritieme kenners het woord touw in plaats van lijn. In een wiskundige samenhang is het woord lijn meer verwarrend dan het woord touw ergerlijk is.)
Hoeveel touw heb je nodig? We meten de middellijn. Die is bij voorbeeld 60 cm. De lengte van het touw kun je schatten met behulp van de grafiek van $2\pi r$. Zie fig. 9. Daarin kun je aflezen hoeveel touw er voor elke toer nodig is. De hoeveelheid touw die nodig is voor de touwpannekoek wordt gepresenteerd door een rechthoekige driehoek onder de grafiek van $2\pi r$.

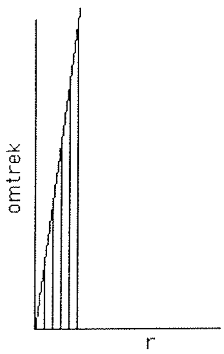

fig. 15

Hierin staan de toeren getekend. (De nukken van de computer stellen ons in staat de zeeverkenners onder ons te laten weten dat het touw geslagen is in vier kardelen.)
De touwpannekoek is als het ware vervormd tot een rechthoekige driehoek met een rechthoekszijde van 30 cm, (de helft van de gemeten middellijn) en een rechthoekszijde 2π*30 cm. Delen we de oppervlakte door de dikte van het touw dan hebben we de lengte van het touw.
Nemen we in het rekenvoorbeeld een touw van 12 mm dikte dan is de lengte van het opgeschoten touw ongeveer 24 m. In de berekening heb ik net gedaan alsof het touw verknipt was tot losse cirkels, in werkelijkheid is het een spiraal. Voor m'n schatting maakt dat niet veel uit.
Als we even afstand nemen tot het touwvoorbeeld, is

duidelijk dat de rechthoekige driehoek onder de grafiek van $2\pi r$ de oppervlakte voorstelt van een cirkel met straal r. De oppervlakte van een rechthoekige driehoek is gemakkelijk te vervormen – met passer en liniaal – tot een vierkant. En ik heb altijd gehoord dat het niet mogelijk is een cirkel met passer en liniaal te vervormen tot een vierkant met dezelfde oppervlakte: de kwadratuur van de cirkel. Met behulp van mijn grafiekje lukt het wel. Een wonder?

Samenhang in de chaos

Bij het voorbeeld van de oorpakproef hoort fig. 1. Procentrekenen kan algoritmisch, met het accent op kwantitatief, het kan ook kwalitatief met een denkmodel als bij de foetus tot de volwassene. Het (kwalitatieve) denkmodel ondersteunt de vaardigheid van (kwantitatief) procentrekenen. In de voorbeelden van pannelap tot kwadratuur van de cirkel zit een samenhang. Het probleem van de pannelap en van de aardbol zijn van hetzelfde kaliber.
$2\pi(r+h)=2\pi r+2\pi h$, met het zinnetje "deze toename hangt alleen af van h en niet van r" is een verklaring op een abstract niveau waarbij het interpreteren van een berekening met letters een belangrijke rol speelt. Ook hier is een kwantitatieve aanpak mogelijk.
De verklaring met behulp de grafiek van de lineaire functie vereist een goed inzicht in het wezen van de lineaire functie. De precieze grootte van de toename wordt niet berekend. Een kwalitatieve aanpak dus.
Van de ervaringen met de grafiek van de lineaire functie kun je als het ware een nieuw platform bouwen waarop je verder kunt gaan en dan het probleem over de lengte van het touw kunt aanpakken. De grafiek stelt je dan toch in staat kwantitatief te werk te gaan.
De vraag over de kwadratuur van de cirkel veronderstelt een heleboel andere kennis van de wiskunde: over de cultuur van het construeren met passer en liniaal.
Ik wil met deze voorbeelden iets duidelijk maken van een opvatting over wiskundeonderwijs die ten grondslag ligt aan het ontwikkelen van een nieuw programma voor de leeftijdsgroep van twaalf- tot zestienjarigen. Leerlingen dienen gereedschappen te leren die ze ook kunnen hanteren. Beter weinig gereedschap maar wel goed leren gebruiken dan overal aan snuffelen en er zelf niets mee kunnen. De lineaire functie is zo'n voorbeeld van een gereedschap dat de meeste leerlingen goed kunnen leren beheersen. Door hun kennis van de lineaire functie zijn ze in staat een probleem aan te pakken met behulp van krachtige begrippen zoals de lineaire functie die levert. Inzicht in de lineaire functie stelt leerlingen in staat op een goed wiskundig niveau bezig te zijn, zoals in het voorbeeld van de pannelap, schotel en aardbol.
De lineaire functie wordt begrepen als leerlingen erachter komen dat er ook andere verbanden dan lineaire zijn. Dat hoeft nog niet te betekenen dat ze van die andere functies een uitvoerig repertoire van specifieke behandelingen moeten leren.
In het bestand van de twaalfjarigen die binnenkomen in het voortgezet onderwijs zit een enorme spreiding: leerlingen die zijn blijven steken op het peil van groep zes tot leerlingen die toe zijn aan reflectie op wat ze geleerd hebben in groep acht.
Het zou een slechte zaak zijn als de differentiatie zo werd georganiseerd dat de zwakste leerlingen altijd alleen maar sommen van de zelfde soort maakten en slechts de betere leerlingen toekwamen aan het bouwen van nieuwe platformen die een volgende abstractie mogelijk maken.
Dit zijn idealistische verhalen die nu eenmaal horen bij de aanvang van een project. Het is zeker wel mogelijk dat van veel van deze mooie gedachten in de praktijk niet zo veel terecht komt. Dat mag zo zijn. We willen ons zo opstellen om zo ver als mogelijk is te kunnen komen. Een uitkomst van ontwikkelingsonderzoek is ook de constatering – uiteraard met onderbouwing – dat iets niet lukt.

Het team W12/16

We zijn sedert september 1987 aan het werk met een team van medewerkers van OW&OC, SLO en nieuwe voor de duur van het vijfjarige project aangestelde medewerkers. Het project en het team werken onder de naam: 'Wiskunde twaalf-zestien'.
Dit is het logo.

fig. 16

In het team zitten ook mensen die goed op de hoogte zijn van ontwikkelingen in het basisonderwijs. We willen graag betrokken zijn bij de vaststelling van eindtermen rekenen-wiskunde voor het basisonderwijs. Van ons kun je daarbij verwachten een instelling: leer ze liever wat minder maar wel zo dat ze het kunnen beheersen.
We willen graag meepraten over het verschuiven van onderwerpen uit het reken-wiskundeonderwijs van b.o. naar v.o. en andersom.
Ongeacht waar je uitkomt, betekent vaststelling van eindtermen dat vaardigheden die in het v.o. niet onderhouden worden binnen de kortste keren wegzakken. In ons ontwikkelwerk zal het bijhouden van belangrijk geachte vaardigheden een belangrijke rol moeten spelen.
Op drie scholen gaan we al in 1990 een ander eindexamen mavo en lbo C D doen, afwijkend van het centraal schriftelijk eindexamen voor alle scholen van dit type. Leerlingen van deze drie scholen moeten beoordeeld worden op wat ze in het kader van het project leren.
Bij deze wiskunde zullen contexten vaak een belangrijke rol spelen. Vaak worden contexten aangehangen vanwege de "smeuiigheid". Dat is een slechte motivering voor het gebruik van contexten. De smeuiigheid voor de één is de ergernis voor de ander. Er zijn altijd leerlingen die een hekel hebben aan een bepaalde context naast anderen die zich daarin als een vis in het

water voelen. We zullen contexten gebruiken omdat het mogelijk is vanuit contexten problemen te stellen of te ontdekken, maar ook omdat we wiskunde verweven zien met ervaringen in het dagelijks leven. We vinden wiskundeonderwijs om de 'zuivere' wiskunde niet passen in de periode van twaalf tot zestien jaar. Natuurlijk moet wiskunde ook formeel beoefend worden, maar niet door alle leerlingen. We menen dat het ook van belang is voor de leerlingen die formeel leren omgaan met wiskunde dat ze ervaringen hebben op grond waarvan ze zich iets kunnen voorstellen bij wat ze doen.
In ons werk zullen we aansluiten bij de ontwikkelingen van Hawex in havo en Hewet in het vwo.
In de voorbeelden die ik gaf speelde voortdurend de vraag: "Is dat wel zo, hoe weten we dat?"
Bij de geluidsvraag deden we veronderstellingen en verwierpen we ze weer om zo tot een betere beschrijving te komen van het geluid van de passerende ziekenauto.
In de wiskunde die we aan de orde stellen bij onze leerlingen van twaalf tot zestien willen we ze zo'n soort ervaring laten opdoen: veronderstellingen doen en verwerpen. Dat is een beetje in tegenstelling tot de vroegere schoolwiskunde waar bewijzen hoofdgerecht was. Dat leidde tot een statisch meetkundeonderwijs. In ontwikkeling is een wiskunde-onderwijs waarin verwerpen aan bewijzen vooraf gaat, waarin voortdurend klinkt: Is dat wel zo en hoe weet ik dat? In plaats van bewijzen wat iedereen wel duidelijk is, aanvechten wat nog niet zo duidelijk is.
Gelukkig hoeven wij als team niet alles nieuw te maken. Er is in Nederland al ervaring met dit soort wiskunde-onderwijs bij docenten en bij auteursteams. We hopen door samenwerking met auteursteams te kunnen komen tot een breed aanbod van wiskunde-onderwijs waar verschillende typen van docenten mee uit de voeten kunnen.
Een keuze die we nu al duidelijk maken voor klas één en twee: we willen daar een wiskunde-onderwijs waarbij de leerlingen zich een goed beeld kunnen vormen van wat wiskunde voor ze kan betekenen. Dus veel ruimte voor brede oriëntering op wiskunde. Uiteraard moet er tijd zijn voor het ontwikkelen van bouwstenen, bepaalde begrippen moeten worden geleerd. Maar het bouwsel mag nog niet zo'n sterke verticale opbouw hebben dat leerlingen die problemen hebben met een bouwsteen de rest van het wiskunde-onderwijs in klas één en twee niet kunnen volgen. Voor een aantal leerlingen is reparatie van rekenvaardigheid noodzakelijk, misschien kan gepland gebruik van de zakrekenmachine enige uitkomst bieden. Voor alle leerlingen is onderhoud van rekenvaardigheden noodzaak.
Het team is niet in staat en ook niet van plan een complete leergang te maken. Het team probeert op wezenlijke punten ontwikkelingsonderzoek te doen en de resultaten daarvan uit te brengen samen met nieuwe leerlingenmaterialen. Het eindresultaat van het project staat en valt met het vermogen van het team royaal de tijd te nemen voor hoofdzaken zoals idee-ontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek naast alle actuele zaken zoals bijvoorbeeld het houden van lezingen in Noordwijkerhout.

Dit artikel is eerder opgenomen in het PANAMA-cursusboek, verschenen in april 1988.