Meer mogelijkheden met matrices (3)

R. Geel
NLO Ubbo Emmius, Groningen

Samenvatting

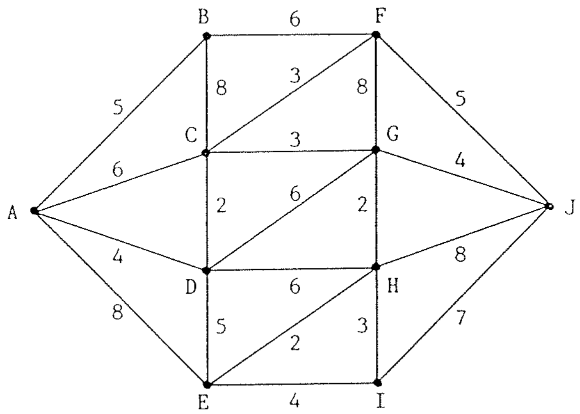
Generalisatie van het klassieke matrixprodukt leidt tot nieuwe toepassingsmogelijkheden. In een serie van drie artikelen (waarvan dit het laatste is) laten we een aantal toepassingen van het gegeneraliseerde matrixprodukt de revue passeren.

Dit artikel is het laatste in een serie van drie artikelen over de toepassingsmogelijkheden van het gegeneraliseerde matrixprodukt.
In de beide voorgaande artikelen (zie [1] en [2]) introduceerden we het gegeneraliseerde matrixprodukt en lieten we enkele toepassingen zien. Dit derde artikel is gewijd aan een tweetal verdere toepassingen van het gegeneraliseerde matrixprodukt.
In de paragraaf *Routes met maximale capaciteit* verplaatsen we ons naar het denkbeeldige natuurgebied 'De Veluwsche Wouden' en bespreken we een grafentheoretische toepassing van het gegeneraliseerde matrixprodukt.
In de paragraaf *Planning van projecten: het kritieke pad* laten we tenslotte zien hoe een bekend probleem uit de Operations Research kan worden opgelost met behulp van gegeneraliseerde matrixrekening.

Routes met maximale capaciteit

We beschouwen het volgende probleem.
Het beschermde natuurgebied 'De Veluwsche Wouden' is uitsluitend toegankelijk voor wandelaars. Auto's worden in het gebied niet toegelaten, maar er is wel een net van smalle landwegen waarlangs boswachters, jachtopzieners en onderhoudspersoneel zich in hun jeeps kunnen verplaatsen.
Dit wegennet is (schematisch) aangegeven in figuur 1.

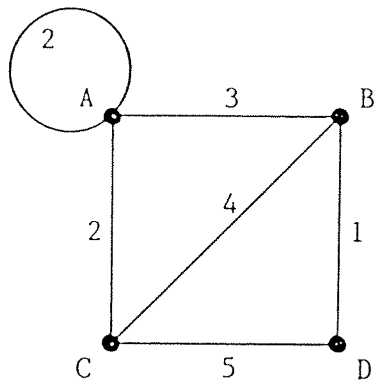
De ingang van het gebied bevindt zich bij A, de overige letters geven de ligging aan van boswachterswoningen, houtopslagplaatsen, voederplaatsen, etc. Bij J bevindt zich een toren die een prachtig uitzicht verschaft over het hele gebied.



Figuur 1

Gedurende het hoogseizoen trekt het gebied veel bezoekers, waarbij vooral de uitkijktoren zich in een grote belangstelling mag verheugen. Omdat de wandelafstand van A naar J vrij groot is, heeft de 'Vereeniging tot Behoud der Natuur' die het gebied beheert, besloten om langs nog nader te bepalen landwegen een tramlijntje aan te leggen van A naar J. Teneinde de rust in het gebied niet al te zeer te verstoren, heeft men voor elke landweg een maximum gesteld aan het aantal tramritten dat per dag langs deze weg mag voeren. Deze maxima staan vermeld in figuur 1. Zo lezen we onder andere af, dat langs de weg EH (die door het rustgebied van het edelhert loopt) hoogstens twee tramritten per dag gemaakt mogen worden.
De vraag is nu, langs welke wegen het tramlijntje van A naar J moet worden aangelegd, opdat er per dag zoveel mogelijk tramritten gemaakt kunnen worden.

Het bovenstaande probleem kan worden opgelost met behulp van gegeneraliseerde matrixrekening. Om enig inzicht te verkrijgen in de hierbij toe te passen binaire operaties $\oplus$ en $\otimes$ richten we onze aandacht eerst eens op de iets eenvoudiger graaf van figuur 2:



Figuur 2

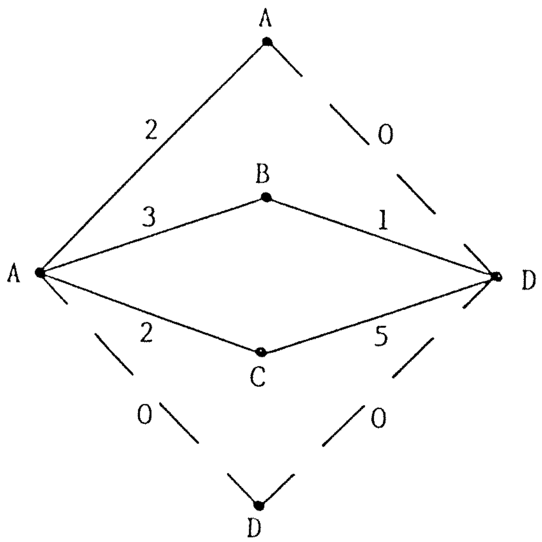
Deze graaf stelt een wegennet voor tussen vier punten A, B, C en D en de getallen langs de wegen stellen het maximale aantal tramritten voor dat per dag langs de betreffende weg gemaakt mag worden.
Uit de figuur blijkt onmiddellijk, dat de maximale capaciteit voor een tramlijn van A naar D drie ritten per dag bedraagt (langs de route ABCD).

De bij de graaf van figuur 2 behorende *capaciteitenmatrix* M wordt gegeven door:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(aan een niet-bestaande weg tussen twee punten kennen we de capaciteit 0 toe).

Als we alle tweestapsroutes van A naar D opschrijven die *in principe* mogelijk zijn, dan ontstaat figuur 3



Figuur 3

waaruit blijkt, dat de maximale capaciteit voor een tweestapsroute van A naar D als volgt berekend kan worden:
a. neem in figuur 3 het minimum van de beide getallen langs elk van de vier tweestapsroutes, en
b. neem vervolgens het maximum van de vier minima.

We vinden op deze manier voor de capaciteit van de optimale tweestapsroute van A naar D:

$$\max\{\min\{2,0\}, \min\{3,1\}, \min\{2,5\}, \min\{0,0\}\} =$$
$$\max\{0,1,2,0\} = 2$$

corresponderend met de route ACD in figuur 2.

Hiermee is duidelijk geworden, dat we bij dit soort capaciteitsproblemen gebruik kunnen maken van een gegeneraliseerd matrixproduct waarbij de verzameling V en de binaire operaties $\oplus$ en $\otimes$ als volgt gedefinieerd zijn:

$$(1) \quad \begin{cases} V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \cup \{\infty\} \\ a \oplus b = \max\{a,b\} & \text{voor alle } a, b \in V \\ a \otimes b = \min\{a,b\} & \text{voor alle } a, b \in V. \end{cases}$$

Men gaat eenvoudig na, dat de operaties $\oplus$ en $\otimes$ alle voor de gegeneraliseerde matrixrekening vereiste eigenschappen bezitten (zie [1]).
Zo spelen bijvoorbeeld de elementen 0 en ∞ de rol van het nulelement respectievelijk het eenheidselement.

We laten het aan de lezer over om voor zichzelf na te gaan, dat het bovengedefinieerde matrixprodukt tot de volgende resultaten leidt:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

en

$$M^3 = M^2M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

waarbij bijvoorbeeld het element $[M^3]_{42} = 2$ als volgt werd berekend:

$$\begin{aligned} [M^3]_{42} &= (2\otimes 3)\oplus(4\otimes 0)\oplus(1\otimes 4)\oplus(5\otimes 1) \\ &= \max\{\min\{2,3\}, \min\{4,0\}, \min\{1,4\}, \\ &\quad \min\{5,1\}\} \\ &= \max\{2,0,1,1\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

corresponderend met de maximale capaciteit voor een driestapsroute van D naar B (zie de route DCAB in figuur 2).

Algemeen geldt blijkbaar:

het element $[M^k]_{ij}$ van de matrix M^k stelt de maximale capaciteit voor langs een k-stapsroute van punt i naar punt j.

Het is verder eenvoudig in te zien, dat de routes met maximale capaciteit gezocht kunnen worden onder de routes die uit *hoogstens drie* takken bestaan. Om de maximale capaciteit te bepalen voor een route tussen twee gegeven punten, is het dus voldoende om de gegeneraliseerde sommatrix:

$$T^{(3)} = M \oplus M^2 \oplus M^3$$

te berekenen. We vinden dan:

$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

waarbij bijvoorbeeld het element $[T^{(3)}]_{14} = 3$ op de volgende wijze werd berekend:

$$\begin{aligned} [T^{(3)}]_{14} &= [M]_{14} \oplus [M^2]_{14} \oplus [M^3]_{14} \\ &= 0 \oplus 2 \oplus 3 \\ &= \max\{0,2,3\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Dit element stelt dus de maximale capaciteit voor langs een route van A naar D (zie de route ABCD in figuur 2).

Opmerking
Ook hier geldt weer de formule $T^{(k)} = T^{(3)}$ voor $k > 3$, zoals men zelf gemakkelijk verifieert (vergelijk analoge resultaten in [1] en [2]).

Conclusie
Het element $[T^{(3)}]_{ij}$ van de gegeneraliseerde sommatrix $T^{(3)}$ stelt de maximale capaciteit voor langs een route van punt i naar punt j.

We keren nu terug naar het oorspronkelijke probleem voor het natuurgebied 'De Veluwsche Wouden'. Het zal duidelijk zijn, dat we dit probleem kunnen oplossen door de computer de sommatrix:

$$T^{(9)} = M \oplus M^2 \oplus \cdots\cdots \oplus M^9$$

te laten berekenen, waarbij de matrix M gegeven wordt door (zie figuur 1):

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 8 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 8 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

en waarbij de gegeneraliseerde matrixbewerkingen gedefinieerd zijn door (1).

Door enkele wijzigingen aan te brengen in het computerprogramma voor het 'kortste route'-probleem (zie [1] of eventueel [4] verkrijgen we uiteindelijk de volgende tabellen:

TABEL VAN MAXIMALE CAPACITEITEN:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	8	6	6	6	8	6	6	6	6	6
B	6	8	8	6	6	6	6	6	6	6
C	6	8	8	6	6	6	6	6	6	6
D	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
E	8	6	6	6	8	6	6	6	6	6
F	6	6	6	6	6	8	8	6	6	6
G	6	6	6	6	6	8	8	6	6	6
H	6	6	6	6	6	6	6	8	7	8
I	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7
J	6	6	6	6	6	6	6	8	7	8

TABEL VAN OPTIMALE REISROUTES:

	A	B	C	- - -	I	J
A	AEA	ACB	AC		ACBFGDHJI	ACBFGDHJ
B	BCA	BCB	BC		BFGDHJI	BFGDHJ
C	CA	CB	CBC		CBFGDHJI	CBFGDHJ
D	DGFBCA	DGFB	DGFBC		DHJI	DHJ
E	EA	EACB	EAC		EACBFGDHJI	EACBFGDHJ
F	FBCA	FB	FBC		FGDHJI	FGDHJ
G	GFBCA	GFB	GFBC		GDHJI	GDHJ
H	HDGFBCA	HDGFB	HDGFBC		HJI	HJ
I	IJHDGFBCA	IJHDGFB	IJHDGFBC		IJI	IJ
J	JHDGFBCA	JHDGFB	JHDGFBC		JI	JHJ

waaruit blijkt, dat ACBFGDHJ (met een capaciteit van zes tramritten per dag) de optimale route is.

Planning van projecten: het kritieke pad

Ingewikkelde projecten (zoals bijvoorbeeld de bouw van een huis), bestaan vaak uit een groot aantal activiteiten die op een logische manier in de tijd op elkaar aan dienen te sluiten. Sommige van deze activiteiten kunnen gelijktijdig worden uitgevoerd (zoals bijvoorbeeld het bestellen van de bouwmaterialen en het bouwrijp maken van het terrein), maar er zijn ook activiteiten die pas kunnen starten nadat andere geheel zijn afgerond (zo kunnen bijvoorbeeld de muren pas worden opgericht nadat de fundering is gelegd).

Bij het plannen van een project probeert men onder andere een antwoord te vinden op de volgende vragen:
a. Wat is de kortste tijd waarin het project kan worden voltooid?
b. Op welke tijdstippen dienen de verschillende activiteiten aan te vangen?
c. Wat zijn de gevolgen voor het project, indien er bij een bepaalde activiteit vertraging optreedt?

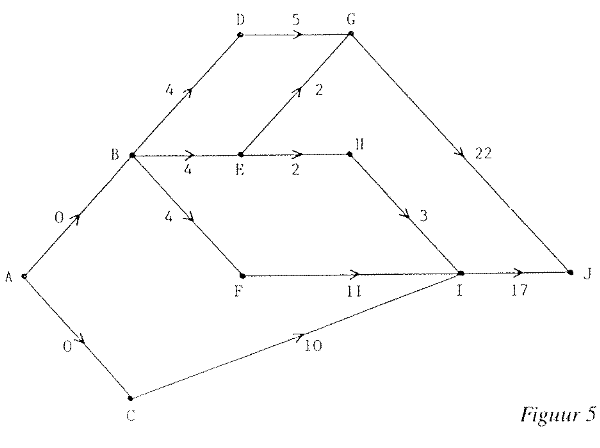
Om een project te kunnen analyseren, moeten we uiteraard beschikken over een tabel met alle activiteiten waaruit het project bestaat. Uit deze tabel moet ook blijken:
1. hoelang elke activiteit duurt, en
2. welke de voorgangers zijn van elke activiteit, dat wil zeggen welke activiteiten voltooid moeten zijn voordat de betreffende activiteit gestart kan worden.

In figuur 4 staat een voorbeeld van zo'n activiteitentabel.
A en J zijn hierin dummy-activiteiten (met tijdsduur nul), die de start respectievelijk de voltooiing van het project representeren. B t/m I zijn de werkelijke activiteiten.
We lezen uit de tabel bijvoorbeeld af, dat de activiteit H pas kan starten na beëindiging van de activiteit E (dit houdt tevens in, dat dan ook de activiteiten B en A reeds beëindigd zijn!).

Activiteit	Tijdsduur (in dagen)	Voorgangers
A	0	–
B	4	A
C	10	A
D	5	B
E	2	B
F	11	B
G	22	D,E
H	3	E
I	17	C,F,H
J	0	G,I

Figuur 4

Uitgaande van de activiteitentabel kunnen we een *activiteitengraaf* construeren (zie figuur 5): elk van de punten A t/m J van deze graaf stelt de *start* voor van de betreffende activiteit en elk punt is door een *gerichte* tak verbonden met zijn voorganger(s).



Figuur 5

Uit de graaf van figuur 5 kunnen we aflezen, wanneer elke activiteit op zijn vroegst kan aanvangen. Zo kan bijvoorbeeld de activiteit I pas starten, nadat in figuur 5 de 'activiteitentrajecten' ABEHI (met een tijdsduur van $0+4+2+3=9$ dagen), ABFI (tijdsduur 15 dagen) en ACI (tijdsduur 10 dagen) zijn afgelegd. Dit houdt dus in, dat op zijn vroegst 15 dagen na de start van het project een begin kan worden gemaakt met de activiteit I. We trekken hieruit de volgende conclusie:

Conclusie 1
Het vroegste tijdstip waarop een activiteit, zeg X, kan beginnen (gerekend vanaf de start van het project), wordt bepaald door de lengte van de *langste* route van punt A naar punt X in de graaf van figuur 5.

Passen we het voorgaande speciaal toe op de activiteit J (de voltooiing van het project), dan komen we tot:

Conclusie 2
Het vroegste tijdstip waarop het project kan worden voltooid (gerekend vanaf de start van het project), wordt bepaald door de lengte van de *langste* route van punt A naar punt J in de graaf van figuur 5.
Men gaat eenvoudig na, dat ABFIJ (met een lengte van 32) de langste route is van A naar J. De kortste tijd waarin het project kan worden voltooid, zeg T_{min}, is dus gelijk aan:

$$T_{min} = 32 \text{ (dagen)}.$$

Wat zijn nu de gevolgen voor het project, indien er bij een bepaalde activiteit vertraging optreedt?
Het zal duidelijk zijn, dat een vertraging in één van de activiteiten A, B, F en I (die deel uitmaken van de langste route van A naar J) tot een toename van T_{min} leidt en dus een vertraging van het totale project tot gevolg heeft. Om deze reden wordt de langste route ABFIJ wel *het kritieke pad* in de graaf van figuur 5 genoemd.
Bij activiteiten die niet langs het kritieke pad liggen, vertoont het tijdschema een zekere *speling:* deze activiteiten kunnen enigszins worden vertraagd zonder dat daarmee de totale tijdsduur van het project toeneemt. Om dit duidelijk te maken, richten we onze aandacht eens op de activiteit E in figuur 5.

Gerekend vanaf het moment dat de activiteit E start, duurt het nog minstens 24 dagen voordat het project voltooid kan worden (dit volgt uit de lengte van de langste route van E naar J in figuur 5; deze route wordt gegeven door EGJ met een lengte van 24). Het *laatste* tijdstip, zeg $t_L(E)$, waarop de activiteit E nog kan beginnen zonder het totale project te vertragen, is dus gelijk aan:

(2) $\quad t_L(E) = T_{min} - 24 = 32 - 24 = 8$ (dagen)

gerekend vanaf de start van het project.
Omdat het *vroegste* tijdstip, zeg $t_V(E)$, waarop de activiteit E kan beginnen, gelijk is aan:

(3) $\quad t_V(E) = 4$ (dagen)

(namelijk gelijk aan de lengte van de langste route van A naar E), vertoont het tijdschema voor de activiteit E een speling, zeg S(E), die gelijk is aan:

(4) $\quad S(E) = t_L(E) - t_V(E) = 8 - 4 = 4$ (dagen).

Dit betekent dus, dat de activiteit E maximaal vier dagen vertraagd kan worden zonder dat dit van invloed is op de totale duur van het project.

Het voorgaande maakt duidelijk, dat de *langste routes* in een activiteitengraaf een belangrijke rol spelen bij de planning van projecten. Zo volgt uit (2), (3) en (4), dat de speling S(X) voor een activiteit X gelijk is aan:

$$S(X) = L_{max}(AJ) - L_{max}(AX) - L_{max}(XJ),$$

waarbij $L_{max}(AJ)$ de lengte voorstelt van de langste route van A naar J, etc.

Het is mogelijk om de langste routes in een graaf te bepalen met behulp van gegeneraliseerde matrixrekening. In [1] zagen we, dat de kortste routes in een graaf bepaald konden worden met behulp van een gegeneraliseerd matrixprodukt, dat gedefinieerd was door:

$$\begin{cases} V = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ a \oplus b = \min\{a,b\} \\ a \otimes b = a + b \quad \text{(de gewone optelling).} \end{cases}$$

Het zal dan ook geen verbazing wekken, dat de langste routes in een graaf op analoge wijze bepaald kunnen worden door gebruik te maken van een matrixprodukt dat gebaseerd is op de keuze:

$$(5) \qquad \begin{cases} V = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ a \oplus b = \max\{a,b\} \\ a \otimes b = a + b \quad \text{(de gewone optelling).} \end{cases}$$

De binaire operaties (5) bezitten alle voor de gegeneraliseerde matrixrekening vereiste eigenschappen (zie [1]). Zo spelen bijvoorbeeld de elementen $-\infty$ en 0 de rol van het nulelement respectievelijk het eenheidselement.

We laten het verder aan de lezer over om voor zichzelf na te gaan, dat de graaf van figuur 5 correspondeert met de 10×10-matrix:

$$M = \begin{pmatrix}
-\infty & 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\
-\infty & -\infty & -\infty & 4 & 4 & 4 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\
-\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 10 & -\infty \\
-\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 5 & -\infty & -\infty & -\infty \\
-\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 2 & 2 & -\infty & -\infty \\
-\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 11 & -\infty \\
-\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 22 \\
-\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 3 & -\infty \\
-\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 17 \\
-\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty
\end{pmatrix}$$

en dat het element $[T^{(9)}]_{ij}$ van de gegeneraliseerde sommatrix:

$$T^{(9)} = M \oplus M^2 \oplus \cdots\cdots \oplus M^9$$

weer de lengte voorstelt van de langste route tussen de punten i en j.

N.B. De matrix M is nu *niet-symmetrisch*, omdat we te maken hebben met een *gerichte* graaf: er loopt bijvoorbeeld wel een tak van A naar B, maar er loopt geen tak van B naar A.

Door enkele voor de hand liggende wijzigingen aan te brengen in het programma voor het 'kortste route'-probleem (zie [1] of eventueel [4]) kunnen we de matrix $T^{(9)}$ door de computer laten berekenen.
Uit de elementen van deze matrix laten zich dan tenslotte de aanvangstijden bepalen voor de verschillende activiteiten waaruit het project bestaat (vergelijk de formules (2), (3) en (4)). De volgende tabel is het resultaat:

Activiteit	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Vroegste aanvangstijdstip	0	0	0	4	4	4	9	6	15	32
Laatste aanvangstijdstip	0	0	5	5	8	4	10	12	15	32
Speling	0	0	5	1	4	0	1	6	0	0

Opmerking
De problematiek van het kritieke pad kwam al eens eerder ter sprake in De Wiskrant (zie [3]).

Literatuur

[1] Geel, R.: *Meer mogelijkheden met matrices (1),* De Nieuwe Wiskrant, 7e jaargang, nr. 2, feb. 1988, pp. 5-15.

[2] Geel, R.: *Meer mogelijkheden met matrices (2),* De Nieuwe Wiskrant, 7e jaargang, nr. 3, mei 1988, pp. 21-25.

[3] Lange, J. de: *Tom Poes en de graaf,* De Nieuwe Wiskrant, 2e jaargang, nr. 6, februari 1977, pp. 14-15.

[14] Wie belangstelling heeft voor de listings van de in deze artikelenserie genoemde computerprogramma's (in MBASIC), kan deze aanvragen bij:
Dr R. Geel
Lerarenopleiding Ubbo Emmius
Sektie Wiskunde
Postbus 2056
9704 CB Groningen
Vermeld in uw brief duidelijk uw naam en adres en sluit twee postzegels van 75 cent bij.

Rectificatie

1. In de vorige twee artikelen is de naam van Marten Toonder ten onrechte gespeld als Maarten Toonder.
2. Op pag. 12 (7e jrg; nr. 2) bevat formule 14 twee zetfouten.
   De formule luidt als volgt:

$$(14) \qquad [AB]_{ij} = (a_{i1} \otimes b_{1j}) \oplus (a_{i2} \otimes b_{2j}) \oplus \ldots \oplus (a_{in} \otimes b_{nj}).$$