Ramanujan

J.J. Seidel
Technische Universiteit, Eindhoven

Dit artikel vormde een bijdrage aan het Van der Blij-symposium op 13 mei 1988.

Inleiding

Srinivasa Ramanujan werd geboren op 22 december 1887 in Tamil Nadu, de staat in Zuid-India waarvan Madras de hoofdstad is. Vorig jaar was dit feit de aanleiding voor vele herdenkingen: in de gewone pers, in wetenschappelijke tijdschriften, tijdens wiskundige bijeenkomsten, in India en elders in de wereld. Ik was in Madras tijdens het meest belangrijke symposium en ik wil u daarover vertellen; tevens iets over Ramanujan, zijn korte leven, zijn creativiteit, zijn wiskunde en zijn actuele betekenis.

Vandaag lijkt daartoe een goede gelegenheid. Op 20 maart 1948 hield F. van der Blij, als medewerker van het Mathematisch Centrum, een voordracht over *'De functie $\tau(n)$ van S. Ramanujan'* in de serie 'Actualiteiten'. Waarschijnlijk was ik toen toehoorder, want als leraar in Amsterdam nam ik geregeld deel aan de M.C.-activiteiten. Ik heb de vergeelde syllabus opgediept en ontleen er gegevens aan. Voorts putte ik uit de verzamelde publikaties van Ramanujan (1927), boeken over hem van G.H. Hardy (Chelsea 1959) en van Ranganathan (1967), twee delen Notebooks (Tata 1957), meer recente publikaties (onder andere van de Association of mathematics teachers of India), het zogenaamde Verloren Notebook (1988) en voorts een paar recente wiskunde-artikelen.

Levensloop

De bijzondere begaafdheid van Ramanujan werd reeds door zijn lokale onderwijzers ontdekt, maar in India had hij geen echte begeleiding. In 1903 krijgt hij een boek van Carr: *'Synopsis of pure and applied mathematics'* in handen – een verzameling van 6000 wiskundige resultaten, de meeste zonder bewijs – voor de volgende tien jaar zijn belangrijkste bron. Er volgde een geweldig vruchtbare periode van 1907 tot 1911. Zijn resultaten, een zee van formules, legde hij neer in zijn Notebooks.

Te zeer geabsorbeerd door zijn belangstelling voor, en zelfwerkzaamheid in de wiskunde, faalde hij op andere vakken bij zijn 'First examination in Arts' en had daardoor geen toegang tot universiteit en bibliotheek. Hij werd klerk in Madras en trouwde als 21-jarige met de 9-jarige Janaki Ammal, thans nog in leven en aanwezig bij de opening van het symposium in Madras.

Zijn wiskundige prestaties bleven niet onopgemerkt en op raad van Indiase en Engelse zijde wendde hij zich in 1913 per brief tot de beroemde G.H. Hardy, toen professor aan de Universiteit van Cambridge. Deze herkende het talent en zorgde voor zijn overkomst naar Cambridge in 1914, het begin van een tweede periode 1914-1918 van grote wiskundige prestaties. De overgang van India naar Engeland ging gepaard met veel moeilijkheden. Als Indiër had hij een totaal andere levensstijl en hij kon slecht tegen het Engelse klimaat. In 1917 werd hij ziek, maar door de oorlog werd zijn terugkeer naar India uitgesteld tot 1919. Een jaar later stierf hij in Madras, 32 jaar oud, na een derde en laatste geconcentreerde periode van wiskundig werk, volgens Askey alleen al gelijkwaardig aan dat van een heel leven van een groot wiskundige.

In Engeland bleek hoezeer het Ramanujan ontbrak aan kennis van de westerse wiskunde, bijvoorbeeld op het gebied van de complexe functies. Volgens Littlewood had hij geen duidelijk begrip van wat een bewijs is. Hij ontdekte formules en schreef ze neer. Tot veler verbazing klopten ze (meestal). Er zijn nu projecten gaande om al zijn formules te bewijzen en met elkaar in verband te brengen. Tot zijn nadere wiskundige vorming werd vooral bijgedragen door Hardy, die overigens nadrukkelijk de beïnvloeding wederzijds vermeldt en Ramanujan vergelijkt met Euler en Jacobi. In zijn voordracht voor het symposium stelt Selberg naast elkaar de harde analyse van Hardy en de algebraïsch-combinatorische instelling van Ramanujan. Wellicht verklaart dit de recente betekenis van

Ramanujan's werk, waarop wij nog nader terugkomen.
In zijn Engelse periode schreef Ramanujan 32 publikaties, waarvan zeven met Hardy. Aan de Universiteit van Londen behaalde hij eindelijk zijn BA-graad. In 1918 werd hij (hoge eer!) Fellow van de Royal Society, later Fellow van Trinity College en Scholar van Madras University.

School-wiskunde

Hoe nu een indruk te geven over zijn werk en zijn invloed, ook op de hedendaagse wiskunde? Ik probeer dat te doen door te citeren uit de Gidsen over de Creativiteit van Ramanujan, bestemd voor Indiase leraren wiskunde aan primary, middle en high school. Voorts zal ik na het volgende hoofdstuk twee voorbeelden behandelen van recente wiskunde die verband houden met zijn werk.

Ramanujan, vriend van getallen

Op een sticker wordt dit gedemonstreerd door een magisch vierkant en een formule:

22	12	18	87
21	84	32	2
92	16	7	24
4	27	82	26

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3.$$

De formule geeft aanleiding tot twee opdrachten over natuurlijke getallen:
a. Wat is het kleinste getal dat op twee manieren kan worden geschreven als som van twee kwadraten?
b. Construeer andere voorbeelden met behulp van $(10x+a)^3 + (9x-a)^3 = (12x+b)^3 + (x-b)^3$.

Sterk samengestelde getallen

De volgende monotoon toenemende rij getallen heeft een monotoon toenemend aantal delers:

getal:	2	4	6	12	24	36	48	60	120
#delers:	2	3	4	6	8	9	10	12	16

Het grootste en het vergeten voorbeeld van Ramanujan is:

getal:	6 746 328 388 800	293 318 625 600
#delers:	10080	5040

Op P.A.-niveau zijn vele vragen en projecten te bedenken over sterk samengestelde getallen, ook met P.C.-hulp.

Twee sommetjes zondere P.C.

Ga na dat $8^8 9^9 = 3^3 3^3 12^{12}$.
Bewijs dat $n^2(n^2-1)$ deelbaar is door 4, voor $n \in \mathbb{N}$.

Wortels

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\ldots}}}} = 3.$$

Verklaar deze formule met behulp van:
$n^2 = 1 + (n-1)(n+1)$.

Vind zo'n formule met behulp van:
$n^2 = n + 2 + (n-2)(n+1)$.

Breuken

Toon aan dat:

$$\frac{11}{10} \times \frac{1111}{1110} \times \frac{111111}{111110} \times \ldots = 1{,}101\ 001\ 0001\ 00001\ 000001\ 0000001\ldots$$

Recente wiskunde

De functie $\tau(n)$ van Ramanujan

De definiërende formule luidt:

$$x[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots]^{24} =: \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n.$$

De eerste paar waarden van $\tau(n)$ zijn:

$$\tau(1)=1,\ \tau(2)=-24,\ \tau(3)=252,\ \tau(4)=-1472.$$

De functie is multiplicatief:

$$\tau(mn)=\tau(m)\tau(n),\ \mathrm{GGD}(m,n)=1.$$

Wat de grootte betreft, voor priem p geldt dat:

$$|\tau(p)| \leq 2\sqrt{p^{11}},$$

een vermoeden van Ramanujan (1916) dat werd bewezen door Deligne (1974).

De substitutie $x = e^{2\pi iz}$ maakt de definiërende formule tot een Fourierreeks:

$$\Delta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)e^{2\pi inz} = e^{2\pi iz}[1 + \ldots].$$

Men kan bewijzen dat $\Delta(z)$ een modulaire vorm van gewicht 12 is. Een *modulaire vorm* $M(z)$ van gewicht γ wordt gedefinieerd door:

$$M\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{\gamma} M(z),$$

$a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $ad-bc=1$, $\gamma \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$.

De vorm $\Delta(z)$ houdt verband met thetareeksen van roosters. Zij $\Lambda = \bigcup_{r \in R} \Lambda_r$ een *rooster* in $\mathbb{R}^d$ met:

$$\Lambda_r := \{x \in \Lambda : (x,x) = r\},\ R := \{r = (x,x) : x \in \Lambda\},$$

$$r_0 := \min r \text{ over } 0 \neq r \in R.$$

Wij nemen het rooster Λ geheel, unimodulair en even, zodat $R \subset 2\,\mathbb{Z}$. De *thetareeksen* van Λ worden gedefinieerd door:

$$\theta_h(z) := \sum_{r \in R} h(\Lambda_r)e^{\pi irz},\ h(\Lambda_r) := \sum_{x \in \Lambda_r} h(x),$$

waarin $h(x)$ een homogeen harmonisch polynoom van positieve graad is, bijvoorbeeld:

$$h(x) = (x,y)^2 - (x,x)\,(y,y)/d;\ x,y \in \mathbb{R}^d;$$

$$h(x) = (x,y)^4 - 6(x,y)^2\,(x,x)\,(y,y)/(d+4) + \\ + 3(x,x)^2(y,y)^2/(d+2)\,(d+4).$$

Omdat $h(0)=0$, geldt dat:

$$\theta_h(z) = e^{\pi i r_0 z}(h(\Lambda_{r_0}) + \ldots).$$

Nu is het interessante, dat volgens een *stelling van Hecke en Schoeneberg* (1940) met elke factor $e^{2\pi i z}$ ook een hele $\triangle(z)$ buiten haken kan worden gebracht en dat de thetareeks, $\triangle(z)$ en het quotient modulaire vormen zijn:

$$\theta_h(z) = (\triangle(z))^{\frac{1}{2}r_o} M_h\ (z),$$

waarin θ_h, Δ, M_h modulair zijn, met gewichten:

$$\tfrac{1}{2}\text{dim} + \text{graad } h = \tfrac{1}{2}r_o \times 12 + \text{gewicht } M_h.$$

De conclusie is dat voor:

$$0 < \text{graad } h < \tfrac{1}{2}(12r_o - \text{dim}) =: 4\varepsilon$$

geldt dat $M = 0$, dus $\theta_h = 0$, en dus

$$h(\wedge_r) = 0 \quad \forall\, r \in R.$$

Dit geeft sterke uitspraken over de schillen, zoals:

$$\sum_{x \in \wedge_r} (x,y)^{\text{graad } h} = c \int_{\Sigma_r} (x,y)^{\text{graad } h}\, d\sigma(x),$$

voor graad $h < 4\varepsilon$, $y \in \mathbb{R}^d$. Dit is een approximatie van sterkte $4\varepsilon - 1$ van de sfeer Σ_r door de eindige $\wedge_r$.

Voorbeelden

E_8-rooster, $d=8$, $r_o=2$, $\varepsilon=2$, graad $h<8$;
Leech-rooster, $d=24$, $r_o=4$, $\varepsilon=3$, graad $h<12$.
(Ref. B.B. Venkov, Steklov 1985).

Ramanujan graphen

Een Ramanujan graph heeft eigenschappen die aantrekkelijk zijn voor de informatica, zoals grote samenhang, grote taille en goede expansie. De *taille* van een graph is de lengte van zijn kleinste circuit. Een graph $(V,\sim)$ heeft goede *expansie* als elk deel S van V een grote buurt

$$\partial S = \{x \in V : \exists_{s \in S}\, (x \sim s)\}$$

heeft. Een maat hiervoor is de op één na grootste eigenwaarde λ_2 van de graph: een kleine λ_2 geeft grote expansie en samenhang.

Zulke graphen kunnen worden geconstrueerd met behulp van een groep Q en een deel P.
Zij gegeven twee priemgetallen q en p, beide $\equiv 1(4)$, $p<q$, niet quadraat mod q. Wij rekenen met gehelen modulo q en definiëren Q als de groep van de matrices:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, ad - bc \not\equiv 0$$

modulo vermenigvuldiging met $f \not\equiv 0$. Dan geldt:

$$|Q| = q(q^2-1).$$

Om P te definiëren stellen we eerst p voor als:

$$p = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

met $a_0 > 0$ oneven, en a_1, a_2, a_3 even gehelen.
Dan is P de verzameling van de matrices:

$$\begin{bmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & a_0 - ia_1 \end{bmatrix},$$

met bovenstaande a_0, a_1, a_2, a_3 mod q en $i^2 \equiv -1 (\text{mod } q)$.

Dus P is een deel van Q. Construeer nu de *Cayley graph* (Q,P) als volgt. De knopen zijn de elementen van Q en de verbindingen worden gedefinieerd door:

$$(x \sim y) \Leftrightarrow \exists_{z \in P}\, (x = yz).$$

Deze graph heeft $q(q^2-1)$ knopen, en is regulier met valentie $p+1$, omdat $|P| = p+1$.
Inderdaad, er zijn $p+1$ verschillende voorstellingen van p als som van vier kwadraten van gehelen volgens (1). Dit volgt uit een formule van Jacobi:

$$\# = \$ \sum_{d|p} d = \$(p+1):$$

$5 = 1+4+0+0$, $13 = 9+4+0+0 = 1+4+4+4$,
$17 = 1+16+0+0 = 9+4+4+0$.
Moeilijker is de voorstelling van p^k als som van kwadraten volgens:

$$p^k = x_0^2 + 4q^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \quad x_i \in \mathbb{Z}.$$

Volgens een vermoeden van Ramanujan (1916), later geverifieerd door Eichler (1954), wordt het aantal van zulke voorstellingen benaderd door:

$$C \sum_{d|p^k} d + 0_\varepsilon(p^{k(\frac{1}{2}+\varepsilon)}), \quad \varepsilon > 0, \quad k \to \infty.$$

Met behulp van deze benadering kan men bewijzen dat:

$$\text{taille} \geqslant 2 \log_p q, \ \lambda^2 \leqslant 2\sqrt{p},$$

dat wil zeggen dat deze graph de eigenschappen van een Ramanujan graph bezit.
(Ref. A. Lubotzky, R. Phillips, P. Sarnak, *Combinatorica*, to appear.)

Het symposium

Op dinsdag 22 december 1987 werd het vierdaagse Ramanujan Centenary Symposium geopend door Rajiv Gandhi, de eerste minister van India. Hij maakte een goede indruk, maar hij is niet populair bij academici. Er waren nogal wat veiligheidsmaatregelen, maar na verloop van tijd let je daar niet meer op. Het publiek bestond uit de twaalf sprekers, een honderdtal wiskundige deelnemers en minstens zoveel officials, in India een belangrijke categorie, want de bureaucratie viert er hoogtij. Typerend waren de twee volgende welkomsttoespraken.

Op indrukwekkende wijze waarschuwde S. Chandrasekhar, Nobelprijswinnaar in de astrofysica, om toch vooral nuchter te blijven en niet te vervallen in mystiek of bla-bla. Wat hij met dat laatste bedoelde werd onmiddellijk daarna gedemonstreerd in de retoriek van de gouverneur van Tamilnadu. Die spanning voel je aldoor. Denkt u ook niet, zo werd mij gevraagd, dat Ramanujan een reïncarnatie van Gausz is? Anderzijds is het interessant om te ervaren hoeveel, vooral jonge mensen proberen een wetenschappelijke voorhoede te vormen en de oude tradities met een meer moderne ontwikkeling te verbinden. Maar het land lijdt onder een keurslijf van loze en schadelijke voorschriften, die meestal hun oorsprong vinden in de Britse koloniale periode. Dit geldt met name voor het onderwijs.

Het programma van het symposium begon veelbelovend. De eerder genoemde Chandrasekhar relativeerde de 100 jaar, door te spreken over Newton's Principia, die 300 jaar geleden werden gepubliceerd. Varandarajan relativeerde door andere prominente wiskundigen met India te herdenken, met name Harish Chandra. De betekenis van Ramanujan voor de hedendaagse wiskunde werd belicht door Raghavan, Askey, Andrews en Selberg (be tolerant towards the unusual). Er bleef het vooruitzicht op voordrachten van Rankin, Berndt, Balasubramanian, Ramanathan, Zagier en Bambah, een gelukkige combinatie van jonge en oudere baanbrekers betreffende Ramanujan's werk. Maar het mocht niet zo zijn.

Op de avond van de tweede dag stierf de eerste minister van de deelstaat Tamil Nadu. Hij was vroeger een geliefd filmster, van lokale betekenis. Als politicus was hij belangrijk voor de centrale regering en zeer populair bij het volk. Hij leed overigens reeds tien jaar aan hartaanvallen en alle mogelijke kwalen. Er geschiedde wat sommigen reeds voorspelden. Gedurende de volgende twee dagen werd het openbare leven volkomen ontwricht en er vielen vele doden. Deels waren dat zelfmoorden, omdat de grote leider er nu niet meer was; soms ook werden oude rekeningen vereffend. Het was letterlijk levensgevaarlijk om je op straat te begeven en zeker niet in een vervoermiddel als een taxi: als de ziel verhuist dienen de omstanders niet te bewegen.
Zo gebeurde het dat de twaalf sprekers in hun hotel in de stad werden gescheiden van de overige deelnemers op de Campus van het Indian Institute of Technology. Het symposium werd geschorst. Wij op het I.I.T. hielden toen maar ons eigen tweedaags congresje en hadden ampel tijd voor contacten. Na drie dagen was alles weer normaal, maar toen moesten velen van ons vertrekken, zodat ook ik helaas slechts de helft van het symposium heb kunnen meemaken.

Wat ik nog wel kon meenemen was een exemplaar van het 'Lost Notebook', vers van de pers. Het is voorzien van een inleiding door George Andrews, die het manuscript in 1976 opdiepte in de bibliotheek van Trinity College te Cambridge. Rankin, geciteerd door Andrews in het begin van zijn inleiding, spreekt van een 'Long Manuscript': het was geen notebook en strikt genomen was het niet verloren. Waarschijnlijk zijn deze geschriften van Ramanujan uit het laatste jaar van zijn leven, zorgvuldig verzameld door zijn vrouw, na zijn dood gezonden aan Hardy, doorgegeven aan Watson, bij hem gevonden en met ander materiaal door Rankin gedeponeerd in de bibliotheek van Trinity College. Het is de verdienste van Andrews dat hij de inhoud van Ramanujan's 'lost notebook' in een aantal publikaties onder de aandacht van hedendaagse wiskundigen heeft gebracht, zo bijdragend tot de huidige publikatie.

Ik heb geen gelegenheid om meer over de inhoud te vertellen. Daarom geef ik het boek nu aan de persoon die er veel meer verstand van heeft en die na vandaag ook de tijd heeft om zich te verdiepen in Ramanujan's Lost Notebook.