De vierde toren van Hanoi en drie ordeverstorende puzzels

A.J. Goddijn
OW&OC, RU Utrecht

Eind juli had de zesde ICME-conferentie plaats in Boedapest. Zo'n twee-en-een-half duizend mensen uit vele hoeken van de wereld praten tegen, met en door elkaar over mislukking en succes bij het verbeteren van het wiskunde-onderwijs. Er is een chaotische diversiteit aan meningen, doelgroepen en methodes om je plannen te realiseren. In zaal A wordt verteld dat in land X de klassen zo'n 80 leerlingen bevatten, dat er geen boeken zijn, dat alles van het bord moet worden overgeschreven in een taal die de leerlingen alleen op school tegenkomen. In zaal B gaan intussen zakcomputers rond die een mooi schermpje grafieken vertonen van wat je maar intoetst. Daarbij wordt verteld dat deze apparatuur een must is als we nog ooit iets met ons wiskunde-onderwijs willen bereiken. Toch tekenen zich ook trends af binnen deze diversiteit.
De eerste is: schoolwiskunde dient bij de realiteit aan te sluiten en voor 'de toekomst' nuttig te zijn. Deze trend kennen we in ons land al vrij lang.
De tweede trend is vooral in opkomst in landen die wij ontwikkelingslanden noemen. Daar wordt geprobeerd de wiskunde te laten aansluiten bij de in de eigen cultuur al aanwezige elementen. Vaak blijkt het wiskundeprogramma inclusief illustraties, voorbeelden en contexten nog geheel overgenomen van de voormalige kolonisator, terwijl in de eigen wijze van werken en leven zoveel wiskunde in impliciete vorm aanwezig is, die dan binnen school niet naar voren komt.

Een van de subgroepen van de ICME-6 houdt zich tweemaal twee uur bezig met 'Mathematical Recreations'. Daar vertelt David Singmaster, bekend van zijn publikaties in verband met de kubus van Rubik, over de onverklaarbare toepasbaarheid van allerlei wiskundige puzzels en licht dit toe met een gigantische hoeveelheid materiaal uit vele culturen. Chinese, Arabische, Italiaanse en Indische voorbeelden wisselen elkaar af. Waarschijnlijk onbedoeld wordt in deze meest zuiver wiskundige afdeling van de conferentie zo aangesloten bij bovenstaande trends.

Merkwaardig genoeg zijn veel traditionele puzzels vaak in een context ingebed: een vader van drie zonen sterft en laat 17 kamelen na – zes schipbreukelingen stranden op een eiland waar ze cocosnoten vinden – enzovoort.

Eén zo'n opgave (uit Chinese bron) was:

Opgave 54
Een pijlenmaker kan op een dag maken:
50 pijlpunten
of 30 schachten
of 15 staartveren.
Hoeveel pijlen kan hij op een dag maken?

Echt toegepast? Nou ja, niet direct misschien, maar het onderliggende verhoudingsrekenen is niet meer weg te denken.

De Möbius band,
(Plak A op A en B op B in deze strook:

B	∀
A	ꓭ

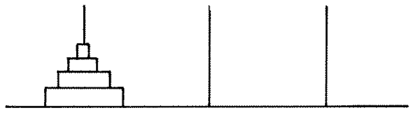
is bedacht als zuiver wiskundig object: als voorbeeld van een éénzijdig oppervlak. Puur wiskundig dus. Toch:

Opgave 55
Zoek bestaande toepassingen van de Möbiusband. Het logo van het vroegere IOWO hoeft u niet op te sturen, zoek naar meer 'nuttige' toepassingen.
Aansluitend hierbij:

Opgave 56
Zoek meer toepassingen van dergelijke eenvoudige wiskunde.
De laatste opgave is wel erg open gesteld, maar nu na opgave 55 zal de bedoeling wel duidelijk zijn. Kan er volgende keer een lijstje verzameld zijn voor deze rubriek?

Een aparte rubriek van Singmasters verhaal was de groep puzzels waarin het tweetallig stelsel een rol speelt. Hij gaf onder andere het voorbeeld van een bekende Chinese puzzel van 2000 jaar oud, waarin het oplossingspatroon een in de telecommunicatie gebruikte code is.
In dit kader noemde hij een nieuwe puzzel rond de 'torens van Hanoi'.
Dat zijn drie staven waar ringen omheen passen. In de uitgangssituatie liggen alle ringen op staaf I in volgorde van grootte.

Ze moeten door stuk voor stuk verplaatsen naar staaf III, maar nooit mag een grotere ring op een kleinere komen.



Dit is de uitgangssituatie met vier ringen.
Hoeveel zetten zijn nodig bij n ringen?
De laatste ring kan pas naar staaf III als alle $n-1$ kleinere ringen op staaf II liggen opgestapeld. Na het verplaatsen van ring n naar staaf III, moeten de $n-1$ ringen nog van II naar III.
Als we het aantal zetten bij n ringen met $H(n)$ aangeven, zien we:

$$\begin{cases} H(0) = 0, \\ H(n) = H(n-1) + 1 + H(n-1), \text{ als } n>0. \end{cases}$$

Met dit herleiden van situatie n naar situatie $n-1$ zijn de torens van Hanoi vele malen gebruikt als voorbeeld bij volledige inductie, bij recursief programmeren en bij exponentiële groei.

O ja, dat tweetallig stelsel. Noem de ringen (bij $n=4$) A, B, C en D van klein naar groot. In onderstaande tabel ziet u de getallen 1 t/m 15 in het tweetallig stelsel. Erboven staan D, C, B en A. De rechter kolom geeft aan welke letter boven de meest rechtse 1 van het getal staat. Die letters geven precies de verleggingsvolgorde!

D	C	B	A	
0	0	0	1	A
0	0	1	0	B
0	0	1	1	A
0	1	0	0	C
0	1	0	1	A
0	1	1	0	B
0	1	1	1	A
1	0	0	0	D
1	0	0	1	A
1	0	1	0	B
1	0	1	1	A
1	1	0	0	C
1	1	0	1	A
1	1	1	0	B
1	1	1	1	A

Intussen zult u wel gevonden hebben:

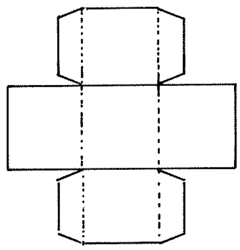
$$H(n) = 2^n - 1, \quad n>0.$$

De nieuwe opgave is: we breiden Hanoi uit met één toren. Nu heeft u meer parkeerruimte voor de schijven. Het verplaatsen van n schijven moet dan toch sneller kunnen?

Opgave 57
Vind de formule die nu het aantal zetten dat nodig is aangeeft.

Bij de Mathematical Recreations hoorde een tentoonstelling. Intrigerend vond ik een rechthoekig plastic doosje; het doosje was rood en er zat een wit doosje in.
Dit kon ermee:
deksel van rode doosje nemen,
witte doosje uit rode doosje halen,
deksel terug op rode doosje,
deksel van witte doosje nemen,
rode doosje in witte doosje doen,
deksel op witte doosje doen.
Het lijkt bizar, maar het kon.

Opgave 58
Maak zelf zo'n stel doosjes met deksels uit twee kleuren karton. De doosjes worden precies gelijk op de kleur na.
Neem dit als uitgangsschets voor doosjes en deksels.



De maten van doosjes en dekseltjes, zoek die zelf maar uit!

Een puzzel als opgave 58 is een verstoring van ons gevoel voor orde. Eerder in deze rubriek lieten we al een grotere kubus door een gat in een kleinere glijden. Singmaster kende dit probleem uiteraard allang; hij noemde als eerste bron overigens Rupert, de broer van Willem de Zwijger!

Een geheel andere ordeverstoring: knip een rond gaatje precies ter grootte van een dubbeltje in een dun stukje papier. Door dit gaatje kan nu ook een kwartje, zonder dat het papier scheurt of kapot gaat. Proberen, het kan echt!

De waarschijnlijkheidsrekening is een tak van wiskunde die alom toegepast wordt, maar oorspronkelijk geheel uit de speelsfeer stamt. Met de volgende ordeverstoring komen de thema's van deze rubriek dan weer bijeen.
Het gaat nu om drie dobbelstenen, afwijkende stenen in dit geval, want er staan niet precies de getallen van 1 t/m 6 juist een keer op. Verder zijn de stenen eerlijk: elk van de 6 vlakjes heeft evenveel kans boven te rusten.
Hier zijn er drie; A, B en C.

Op A staat: 3, 3, 3, 3, 7, 8.
Op B staat: 4, 4, 4, 4, 4, 4.
Op C staat: 2, 2, 5, 5, 5, 5.

We zoeken de beste van de drie. Vergelijk eerst A en B. De kans dat B van A wint als ze gelijk gegooid worden is $\frac{2}{3}$. Dat is makkelijk te zien: B rolt altijd op 4 en in $\frac{2}{3}$ van de gevallen is dat meer dan het getal dat A boven brengt.

Nu is $\frac{2}{3}$ meer dan $\frac{1}{2}$ en B is dus beter dan A. We vinden ook dat C met kans $\frac{2}{3}$ van B wint. C is dus beter dan B.
Tot slot vergelijken we A en C. In onderstaande tabel vinden we wie bij de verschillende combinaties wint.

		A					
		3	3	3	3	7	8
	2	A	A	A	A	A	A
	2	A	A	A	A	A	A
C	5	C	C	C	C	A	A
	5	C	C	C	C	A	A
	5	C	C	C	C	A	A
	5	C	C	C	C	A	A

A wint met kans $\frac{5}{9}$, A is dus beter dan C, B beter dan A, C beter dan B, en A toch beter dan C! Helaas het is niet anders!
Droom eens over deze eigenaardigheid en duik dan in de volgende twee opgaven, waarbij het niet meer gaat om de voorbeeld-stenen van zo net. De vlakken A, B en C mogen gevuld worden met wat voor gehele getallen dan ook. De puzzels gaan juist over algemene kenmerken van deze ordeloosheid.

Opgave 59
Noem de betrokken kansen $P(A<B)$, $P(B<C)$ en $P(C<A)$. Laat zien dat, hoe de getallen op stenen A, B en C ook zijn, de ordeloosheid niet tè gek kan worden. Altijd geldt namelijk:

$$P(A<B)+P(B<C)+P(C<A)\leq 2.$$

Het gegeven voorbeeld heeft $1\frac{8}{9}$ in het linkerlid.
De 2 is wèl gerealiseerd met de stenen:

A: 1, 1, 1, 1, 1, 1,
B: 2, 2, 2, 2, 2, 2,
C: 3, 3, 3, 3, 3, 3.

Maar dat is geen ordeverstorend drietal!

Opgave 60
Kunnen de stenen zó gemaakt worden dat er ordeverstoring is èn de som van de kansen juist 2 is.
En zijn de drie kansen dan per se allemaal $\frac{2}{3}$?

Inzending van antwoorden zoals gebruikelijk: altijd, en aan ondergetekende, Vakgroep OW&OC, Tiberdreef 4, Utrecht.

Antwoorden vorige keer

Opgave 52 en 53 worden (schriftelijk) door W. van Velthoven, G. Vonk, J.G. van de Putte, S. Bijlsma en T. Afman, opgelost.
Vele anderen wezen ook op het bedrog van de tekening van opgave 53: SA loopt links van C langs en niet tussen C en D door.

Opgave 53 ging over de gelijkbenige driehoek ABC. Nogmaals de tekening (Zie figuur 1.)

Hoek CDE is gezocht.
Iedereen vond snel $\angle CBD=20°$ en van daaruit $CD=DB$.

Nu werd vaak over dit soort meetkunde-opgaven geklaagd dat je een totaal onbekende hulplijn of truc moet gebruiken en dat is geen wiskunde die iedereen kan. In een puzzelrubriek als deze zijn de wonderbare trucs juist het zout in de pap en daarom geef ik nu de oplossing van Guus Vonk weer.

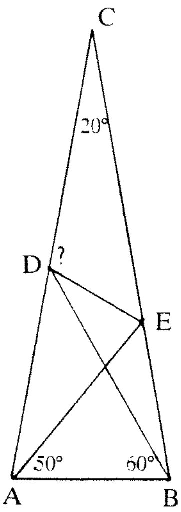


fig. 1

Die spiegelt de driehoek om zowel CA als CB; voor de zuiverheid laat hij lijnstuk DE daarbij ongetekend. De volgende figuur ontstaat:

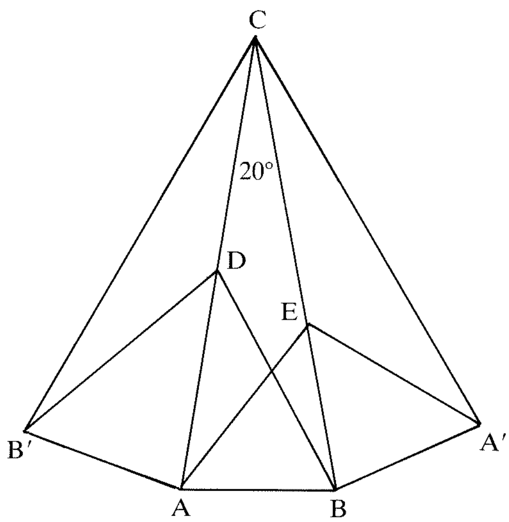


fig. 2

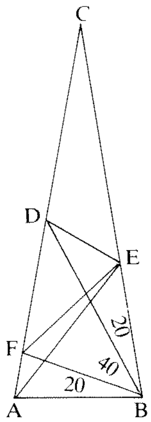
Nu is $B'D=BD=DC$ en D ligt dus op de middelloodlijn van $B'C$.
Hoek $CA'E$ weten we, CAE is immers $80-50=30°$.
Maar dan is $A'E$ deellijn in de gelijkzijdige driehoek $B'A'C$ (Gebruik $\angle B'CA=\angle BCA'=\angle ACB=20°$).
Die deellijn valt samen met de middelloodlijn op $B'C$.
Dus D op het verlengde van $A'E$.
$\angle CDE=110°$ is nu kinderspel!
Wim van Velthoven vermeed de cosinusregel, maar gebruikte virtuoos de sinusregel.
Als spin-off geeft zijn bewijs nog de onverwachte identiteit:

$$\sin 140° + \sin 20° = \sin 80°!$$

Een klein puzzeltje op zich…

Weer geheel anders is de oplossing van J. van de Putte. Teken in de gegeven driehoek eerst DB met $\angle DAB = 60°$, en dan E met $\angle BDE = 30°$.
Bewijs daaruit dat $\angle EAB = 50°$. Een fraaie omkering; het rekenen met de sinusregel in de driehoeken EBD en ABD leidt snel tot AB = BE.

S. Bijlsma geeft een stuk geschiedenis van het probleem, die mij niet bekend was. Hij kreeg het probleem al 20 jaar geleden onder ogen en vond de volgende fraaie oplossing.



Er geldt: AB = BE ($\triangle$ABE gelijkbenig)
Teken BF zó dat $\angle ABF = 20°$ dus:

$$\begin{array}{ll} AB = BF & (\triangle ABF \text{ gelijkbenig}) \\ \left.\begin{array}{l}\text{dus } BF = BF \\ \angle EBF = 60°\end{array}\right\} \Rightarrow & \triangle FBE \text{ is gelijkbenig}\end{array}$$

Bovendien $\triangle$FBD is gelijkbenig ($\angle FDB = 40°$) dus
$\triangle$FDE is gelijkbenig met $\angle EFD = 40°$
dus $\angle FDE = 70° \Rightarrow \angle CDE = 110°$.

Hij meldt dat hij later hetzelfde probleem in 'Mathematical Gems II' van Ross Honsberger is tegengekomen. Die meldt een oplossing uit 1951; globaal is dat dezelfde die Guus Vonk geeft.
Guus Vonk meldt nog dat hij (later!) in het juni/juli-nummer van het Franse tijdschrift 'Tangente' een soortgelijke oplossing van de hand van Michel Bobin vond.

Een onverwachte variëteit aan inzendingen op één opgave deze keer. Hartelijk dank voor de zeer verzorgde inzendingen!

Aad Goddijn