Wiskunde leren en onderwijzen met behulp van puzzels en spelen

H.G.B. Broekman
PDIvdL, RU Utrecht

Samenvatting

Puzzels en spelen kunnen in ons onderwijs meer zijn dan een 'aardigheidje voor een laatste les' of een 'tijdpassering voor liefhebbers.'
Aan de hand van voorbeelden worden in dit artikel een aantal argumenten aangereikt voor de onderbouwing van deze mening.
Iets leren herkennen, of aanbrengen van structuur, wordt gezien als een van de belangrijkste argumenten voor het bezig zijn met wiskunde. Het vormt dan ook de kern van de eerste van een achttal criteria voor de keuze van puzzels/spelen die eveneens beschreven worden.

Tot voor kort werd in leerboeken voor het voortgezet onderwijs betrekkelijk weinig aandacht besteed aan het 'speelse element' van de wiskunde en het wiskunde onderwijzen. Dit in tegenstelling tot ontwikkelingen in met name de Verenigde Staten en Groot Brittanië.
In dit artikel wordt door middel van voorbeelden met toelichtingen een poging gedaan het gebruik van puzzels en spelen uit te tillen boven 'een aardigheidje voor een laatste les'. De voorbeelden zijn echter ook bruikbaar voor 'gewoon eens iets anders'. De toelichtende tekst geeft aan hoe puzzels en spelen tot meer kunnen dienen, namelijk tot een doordachte, leerzame afwisseling.

```
  S E N D
  M O R E
--------- +
M O N E Y
```

```
    V I J F
    V I J F
    T W E E
----------- +
D O Z I J N
```

Is dit 'dozijn' ook mogelijk als de extra eis gesteld wordt dat alle vier getallen door drie deelbaar moeten zijn?

Meer afwisseling, Meer plezier... En toch leren!!

Inleiding

'Strepen maar' noemen we veelal een PUZZEL.
Het is een puzzel die te maken heeft met getallen èn met redeneren. Daarom verwachten buitenstaanders dat ik als wiskundeleraar dit soort puzzels wel 'goed zal kunnen'. Ja, zelfs dat ik dagelijks met dat soort puzzels bezig ben en daar plezier aan beleef.

Nu *kan* ik dat soort puzzels wel een beetje (ik *ken* er ook een aantal), ik ben er *niet* dagelijks mee bezig en heb er ook *niet altijd* plezier in. Toch vind ik dat dit soort puzzelachtige opgaven een plaats zouden moeten hebben in het totale curriculum van het basis èn voortgezet onderwijs. Maar dan niet zozeer vanwege de oplossing, maar vooral vanwege de activiteit van het oplossen, het nagaan of er verschillende aanpakken zijn en deze te vergelijken, enzovoorts.

Bij deze puzzel speelt het onderscheid tussen *cijfer* en *getal* een rol en tevens het feit dat bijvoorbeeld een vijfcijferig getal dat met een 9 begint groter is dan een vijfcijferig getal dat met een 8 (of 7, 6, ..) begint.
Het op een speelse wijze leren gebruiken van deze kennis – en misschien zelfs wel het verwerven ervan – is een mogelijk doel van het werken aan deze puzzel.

'Hit and Run'

Dit spel – in mijn jeugd bekend als 'naar de overkant' – is een voorbeeld van een (strategie) *spel.* Het gaat in dit spel niet om getallen maar om lijnstukjes, om het maken van keuzes, het nagaan van mogelijkheden, kortom 'redeneren'. Dus wordt verondersteld dat een wiskundig geschoolde hier goed in is, er dagelijks mee bezig is (?), er in ieder geval plezier aan beleeft. Nu is dat weliswaar niet allemaal juist, maar toch vind ik dat dit soort strategiespelen (niet per se deze) ook een rol kunnen spelen in het onderwijs, al is het alleen maar vanwege het grote belang van *ordenen en structureren* bij dit soort spelen.

Het is mogelijk dit spel te spelen door aan een kant te beginnen en rechttoe rechtaan naar de overkant te stevenen. Maar is dat verstandig met een niet al te domme tegenspeler? Zijn er misschien patronen uit te zetten die een voorbereiding zijn op 'winst'?

Beginnende spelers blijken snel te praten in termen van 'pech' en 'geluk'. Dit is te doorbreken door een aantal gespeelde spelletjes naast elkaar te laten zetten en naar patronen te laten zoeken. De opmerking 'ja, maar ik overzie dat niet' van een 11-jarige jongen, bracht zijn 13-jarig zusje ertoe om dan maar eerst te werken met een klein rooster (3 bij 3).
Van daaruit gingen zij samen bekijken of het verstandig was om in het midden, of aan de zijkant van de rand te beginnen, of juist middenin het rooster. Daarna kwam heel voorzichtig een poging op een groter rooster.

Uit dit voorbeeld blijkt wel hoe belangrijk het is om bij het bezig zijn met puzzels en spelen *samen te praten* over de mogelijke aanpak en de mogelijke motiveringen daarvan. Vragen als 'wat doe je?', 'hoe doe je het?', 'waarom doe je dat zo?' komen in puzzels en spelsituaties zeker zo vaak voor als de vraag 'hoe moet het?' Deze laatste vraag is nogal dwingend vanuit de autoriteit van de puzzels/het spel en geeft de puzzelaar/speler erg weinig speelruimte.

Dit maakt misschien dat de vele *puzzelachtige* opgaven die in leermateriaal staan, vaak behandeld worden als gewoon de volgende som (of zelfs overgeslagen worden). Dit is jammer, want door samen praten over opgaven kan de individuele leerling gestimuleerd worden en daarbij blijkt praten over een mogelijke aanpak het leren (zoeken, plannen, uitvoeren, terugblikken) te verbeteren.

'Kubusjes stapelen', 'Blokken stapelen' en *'Plakrandjes'* zijn voorbeelden van puzzelachtige opgaven waar zowel 6 à 7-jarigen als 22-jarige wiskundestudenten plezier aan beleven èn van leren.
Dat leren bestaat dan vaak uit het herontdekken van al andere bekende eigenschappen van de kubus. Maar ook uit het herontdekken van aan hem 'bekende' zaken door een 22-jarige wiskundestudent, die opnieuw ontdekte (bij 'blokken stapelen' c) dat $t_{10} = t_9 + 2 \times 10$ een andere formulering was van $t_{10} = 10 \times (10 + 1)$.
De moeite die hij daarna had om met een 14-jarige havo-scholier over diens aanpak te praten, zal duidelijk zijn door het volgende plaatje:

$$2 \underbrace{\qquad\qquad}_{+2\times 2} 6 \underbrace{\qquad\qquad}_{+2\times 3} 12 \underbrace{\qquad\qquad}_{+2\times 4} 20$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 6 & 12 & 20 \\ \| & \| & \| & \| \\ 1\times 2 & 2\times 3 & 3\times 4 & 4\times 5 \end{array}$$

$$2 \underbrace{\qquad\qquad}_{+4} 6 \underbrace{\qquad\qquad}_{+6} 12 \underbrace{\qquad\qquad}_{+8} 20$$

Juist het gesprek over de gekozen benaderingen maakte duidelijk dat er niet alleen zeer verschillende aanpakken mogelijk zijn, maar ook verschillende achtergrondgedachten bij het al dan niet tevreden zijn met een aanpak.

Student: Als je eens kijkt hoe ik het doe, misschien dat dan ...
Scholier: Daar heb ik geen zin in. Het is toch goed wat ik doe? Ik kom behoorlijk snel bij het 20ste gebouw.
Student: Ja, maar het zou wel erg veel werk zijn om zo naar het honderdste gebouw te komen.
Scholier: Met een rekenmachine of computer gaat dat best wel.
Na enige gesputter: Trouwens die eerste van jou is hetzelfde als ik het doe.
Waarom schrijf je dat trouwens zo op?! Je zegt toch gewoon +4, +6, enzo!?
Student: Nou laten we dan eens kijken naar die 4, 6, 8 van jou.

Funkties van puzzels en spelen

"Is er dan tijd voor spelen?
Er moet toch geleerd (gewerkt) worden?"

In de inleiding is reeds een onderscheid gemaakt tussen puzzels enerzijds en spelen anderzijds. Dit onderscheid is gebaseerd op het voornamelijk *alleen* bezig zijn, respectievelijk met *meerderen*.
In het eerste geval gaat het om activiteiten die vereisen dat een individueel lerende een oplossing formuleert. In het tweede geval gaat het om activiteiten die interactie tussen lerenden vereist.
Het is echter heel goed mogelijk om een puzzel samen met anderen op te lossen, zoals je ook allerlei 'wiskunde-opgaven' samen aan kunt pakken. Bij een spel kun je samen spelen, tegen elkaar spelen, maar je kunt ook in je eentje een spel analyseren.

Gemeenschappelijk is het min of meer ontspannen bezig zijn dat ongemerkt over kan gaan in hard werken. Essentieel is in ieder geval de eigen activiteit van de betrokkenen. Het herkennen en voortzetten van patronen (het opstellen van hypothesen) speelt een grote rol. Het toetsen van de opgestelde hypothesen komt als vanzelf (klopt de oplossing?, is de gevonden strategie echt een winnende strategie?).
Gebruik in de klas betekent:

> *Verwondering oproepen, uitdagen van leerlingen, nieuwsgierig maken – Maar ook: laten stoeien met problemen en van daaruit helpen dieper door te dringen.*

Een prachtig voorbeeld van dit laatste blijft voor mij 'een oppervlakte paradox'. Deze puzzel daagt veel kinderen en volwassenen uit om eens beter te kijken naar hoeken: wanneer weten we zeker dat twee hoeken samen een gestrekte hoek vormen? En wie voelt zich niet uitgedaagd door het 'rietjes probleem'?

Behalve *uitdagen* kan een puzzel/spel gelegenheid bieden tot *oefenen*. Het spel 'de som is priem' is een oefening die gericht is op het kunnen overzien welk

tweetal getallen als som een priemgetal heeft en welk niet (het begrip priemgetal moet dan wel bekend zijn). Het is ook mogelijk dat het spel benut wordt voor het leren herkennen van patronen en het ontwikkelen van een manier van opschrijven waarmee alle mogelijke combinaties te noteren zijn. Om het zoeken van patronen en notatiewijzen op te roepen blijkt de vraag: 'is er een gelijk spel mogelijk?', of de vraag: 'is het een eerlijk spel (doet het er toe wie er begint)?' heel nuttig.
Vooral die laatste vraag 'is het een eerlijk spel?' (heeft ieder een gelijke kans om te winnen) geeft 'de som is priem', 'even-oneven' en 'place roll' een extra functie naast het uitdagen en oefenen. Dat extra zit in het spelenderwijs *vooruit gaan denken* (plannen) en het *nadenken* waarom iets niet/wel lukte (terugblikken).

Het terugblikken gaat trouwens niet altijd zo vanzelfsprekend dat het zonder stimulans van buiten gebeurt.

> Nadat een tweetal leerlingen zeker 5 à 10 minuten het Even-Oneven spel hadden gespeeld, vroeg ik ze 'welke combinaties ze al gehad hadden?'
> Een van de leerlingen vroeg daarop of ze dat moesten opschrijven, of dat ze ook gewoon verder mochten spelen. 'Want ik heb het denk ik door'.
> Op mijn vraag hoe zij dat voor elkaar kreeg, antwoordde ze: 'ik probeer steeds een idee tot er een idee is dat klopt'.
> De bijna smekende vraag van haar tegenspeelster, om haar te helpen ook eens een idee te krijgen, bracht haar ertoe om reeds gespeelde partijtjes samen te analyseren. Mijn vraag naar combinaties had haar daar niet toe kunnen brengen.

In het voorgaande zijn al enkele redenen aangegeven waarom puzzels en spelen benut zouden kunnen (moeten) worden in het onderwijs:
- ze vormen een doordachte, leerzame afwisseling;
- ze bieden een uitdaging;
- ze geven de mogelijkheid tot oefenen;
- ze geven de mogelijkheid tot het zoeken van patronen;
- ze bieden een mogelijkheid om te leren terugblikken en plannen.

Ondanks deze argumenten voor het gebruik van puzzels en spelen op school, zien we slechts een relatief gering gebruik ervan met name in het voortgezet onderwijs. Dit is vooral jammer voor de leerlingen van het structurerende type (gericht op produktie en creativiteit).
Deze leerlingen komen toch al minder aan bod dan het algorithmen type (gericht op reproduktie).

Uitbreidingen van puzzels/spelen, zoals bij 'Vijfhoek?' en bij 'Verdelen' geven het zelf produceren een kans. Bij 'Verdelen' waren het bijvoorbeeld leerlingen die aankwamen met allerlei vierhoeken, vijfhoeken, enzovoort. Belangrijke voorwaarde voor dit produceren van vragen – zoals jonge kinderen vaak zeggen 'ja, maar als ...' is een minder sterke gerichtheid op die ene goede (beste) weg naar dat ene goede antwoord op die ene gestelde vraag. Er zijn vaak meerdere wegen die bewandeld kunnen worden om tot een oplossing te komen. Heel belangrijk is vaak de weg van gewoon proberen (eerst trial and error, dan meer gericht). Dit als een *geaccepteerde vorm van patronen/hypothesen zoeken* laten ervaren en oefenen is het extra's dat bijvoorbeeld 'eenheidsdriehoekjes' en 'aantal gebieden' geven.

Een laatste functie van puzzels/spelen die niet onvermeld mag blijven, is het bieden van de mogelijkheid om een aantal *problemen van leerlingen bij het leren* (van wiskunde) op een natuurlijke wijze *bespreekbaar te maken* en daardoor mede aan te pakken.
Te denken valt daarbij aan:
- het niet accepteren van een nalopen van alle mogelijke gevallen als een bewijs (bijvoorbeeld 'getallenvierkanten');
- de neiging om je te richten op slechts één aspect (bijvoorbeeld alleen werken aan eigen winst bij 'vier op een rij, het KGV');
- de moeilijkheid om een probleem/puzzel op te splitsen of eerst te vereenvoudigen (Hit and Run).

Een waarschuwing is echter wel op z'n plaats: puzzels en spelen hebben wel degelijk ook hun beperkingen. Als ze niet aansluiten bij de mogelijkheden van de leerlingen, werken ze averechts. Anders gezegd: op trucjes gebaseerde puzzels horen niet in het onderwijs, ze zijn alleen voor de fanaten. Daarnaast dient het 'spelelement' ook bij andere onderdelen van het curriculum aan bod te komen om te voorkomen dat het 'zoeken, proberen, enzovoort' wordt ervaren als iets dat niet tot het normale wiskundige hoort.

Zijn er criteria te noemen voor de keuze van puzzels/spelen?

Wie de eerste slechte zet doet, verliest het spel altijd.
Oud Japans gezegde

Het kunnen herkennen of aanbrengen van structuur, is één van de belangrijkste doelstellingen van het wiskunde-onderwijs. Daarnaast willen we de leerlingen tevens leren de herkende/aangebrachte structuur te beschrijven èn te gebruiken.

Bij vrijwel alle puzzels en spelen is het herkennen of aanbrengen van structuur een belangrijke voorwaarde om tot de oplossing, respectievelijk een winnende strategie te komen. Dit leidt echter niet in alle gevallen tot een redelijk te beschrijven en te beredeneren oplossing/strategie. Daarom zou ik als eerste (subjectieve!) keuzecriterium willen nemen:
1) De puzzel/het spel moet een *structuur* hebben die redelijk te beschrijven is en op grond waarvan de oplossing/spelstrategie te beredeneren valt.

Onderzoek in verband met motivatie en effect van spelen hebben aangetoond dat bij spellen de volgende vijf criteria gehanteerd dienen te worden (3 t/m 8 gelden ook voor puzzels zoals 'getallenrij').

2) Er is sprake van *competitie*.
3) Het spel is vastgelegd door *regels*; een beperkt aantal specifieke goed gedefinieerde regels.
4) Het spel heeft een beperkt aantal specifieke, goed gedefinieerde *doelen*.
5) Het spel heeft een *begrenzing*; dat wil zeggen dat er een duidelijke afspraak is over wanneer een spel afgelopen is (bijvoorbeeld winst/verlies regels).

6) Het spel is *engagerend*, in die zin dat het uitdaagt en betrokkenheid bij de deelnemers oproept.

Vanuit de gedachte dat een spel binnen een lesuur (of minder) gespeeld èn geanalyseerd moet kunnen worden, èn het gegeven dat de capaciteiten van de deelnemers een rol spelen, kunnen hier nog de volgende criteria aan toegevoegd worden.

7) Het spel moet de mogelijkheid bieden om de *speeltijd te beperken* (er moet bijvoorbeeld meer structuur aan te brengen zijn, er moeten aanwijzingen gegeven kunnen worden eventueel door sturende vragen, enzovoort).
8) De *moeilijkheidsgraad* moet aangepast zijn, of aangepast kunnen worden aan de mogelijkheden van de leerlingen.

De puzzel 'vierkantjes rij' bijvoorbeeld voldoet aan de criteria 1, 3 t/m 8.

De al eerder genoemde vraag 'is dit spel eerlijk' maakt het mogelijk een spel om te vormen tot een puzzelopgave. In de praktijk blijkt tevens dat de speeltijd hierdoor beperkt wordt. De leerlingen worden er direct door geconfronteerd met de noodzaak om de essentie van het spel te doorgronden. Onder andere bij het hier weergegeven 'dobbelstenen spel' kan dit ervaren worden.

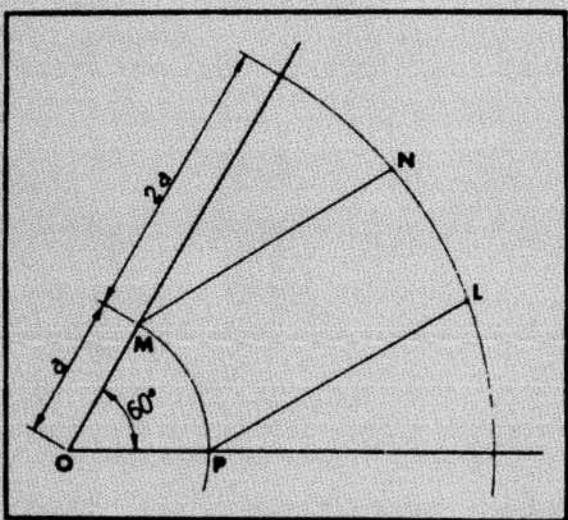
Het moeilijkste criterium is nummer vier. Bij het spel 'als eerste vijftien' is het bijvoorbeeld heel moeilijk de doelen specifiek te maken.
We kunnen de eis echter wat verzachten en genoegen nemen met 'kunnen reorganiseren en herstructureren van informatie' en 'leren zoeken naar relevante karakteristieken van aanvaardbare drietallen'.
De speeltijd en moeilijkheidsgraad zijn enigszins aan te passen door aanwijzingen te geven over mogelijke notatiewijzen en de aandacht van de spelers te richten op de karakteristieken van aanvaardbare drietallen getallen.

Voor iedere puzzel, ieder spel, is na te gaan of het voldoet aan de hiervoor genoemde criteria. Iedere leraar zal echter in zijn onderwijs andere accenten leggen en daardoor de verschillende criteria een ander gewicht toekennen. Met name geldt dit voor criterium 4 (de doelen), vooral in combinatie met de criteria 7 en 8.

Wat betreft criterium 6 kan nogmaals gewezen worden op hetgeen hierover in 'Functies van puzzels en spelen' gezegd werd: Leerlingen zijn verschillend, ook wat betreft hun motivatiestructuur. Maar juist daarom is het fijn dat er zo veel verschillende puzzels/spelen zijn.

KIEST U MAAR!

LE DUE RETTE



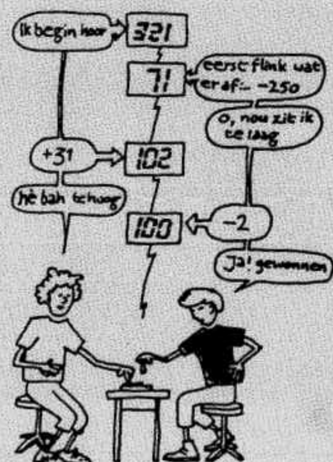
Nel disegno qui sopra è tracciato un angolo di 60 gradi con vertice in O. Vi sono poi due archi di cerchio: l'uno con raggio «a» e l'altro con raggio «3a», ed il maggiore di essi è diviso in tre parti uguali nei punti N e L. Si hanno, infine, le due rette MN e PL.
Tali rette sono parallele, oppure no?

Vedete poi la soluzione pubblicata a pagina 39.

MIK OP 100

Een spel voor twee spelers en een rekenmachine.

Speler 1 begint met zomaar een getal.
Speler 2 moet proberen daar 100 van te maken door een getal erbij op te tellen of ervan af te trekken.



Als het spel te gemakkelijk is, gebruik dan in plaats van

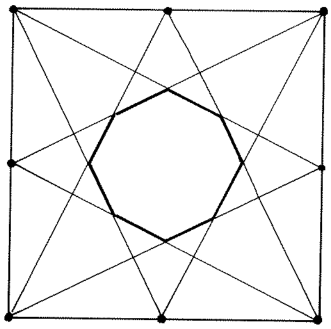
$+$ en $-$ de knoppen $\times$ en $:$

Zelfs leuk als je geen Italiaans kent!

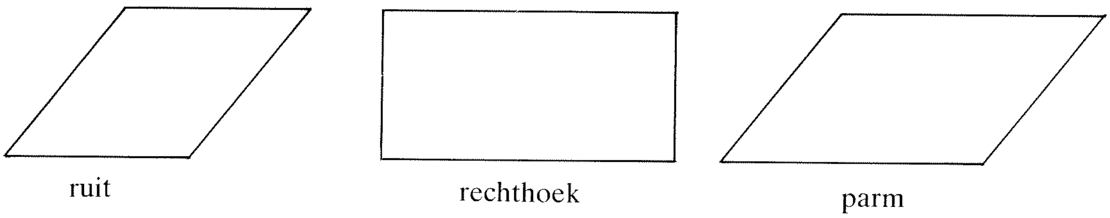
Werkblad A

'Vijfhoek?'

Verbind de hoekpunten van een vierkant met de middens van de zijden.
De getekende lijnstukken vormen onder andere een achthoek.
Is deze achthoek regelmatig?



Wat voor figuur krijg je als je met een gelijkzijdige driehoek begint in plaats van een vierkant? Wat bij een regelmatige 5-hoek, 6-hoek, enzovoort?



Wat voor figuur krijg je met als startpunt niet vierkante vierhoeken?

'Strepen maar'

Streep honderd *cijfers* weg uit het hier gegeven getal, zó dat het getal dat overblijft zo groot mogelijk is.

1 2 3 4 5 . . . 5 8 5 9 6 0

'Het aantal gebieden'

Het maximale aantal gebieden dat je kunt krijgen door een vlak te verdelen met behulp van een, twee of drie congruente cirkels is respectievelijk twee, vier en ... Hoeveel gebieden zijn er maximaal met vier cirkels? Waarom is het maximaal aantal gebieden bij n cirkels geen 2^n maar $n^2 - n + 2$?

'De eenheidsdriehoekjes'

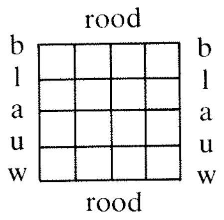
Hoeveel eenheidsdriehoekjes (1 bij 1) zijn er nodig om een driehoek van 10 bij 10 te maken?

Werkblad behorend bij artikel: Wiskunde leren en onderwijzen met behulp van puzzels en spelen.

Werkblad B

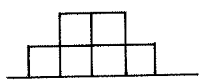
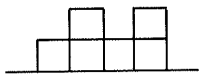
'Hit and Run'

Twee spelers kleuren om beurten een lijnstukje (de een met rood, de ander met blauw). Rood probeert een doorlopend pad te vormen tussen de twee rode kanten en blauw tussen de twee blauwe kanten. Elkaar ontmoetende paden mogen elkaar in een rechte hoek snijden. De eerste speler die zo'n pad gevormd heeft, wint. Is er een winnende strategie voor de beginner? En voor de tweede speler?



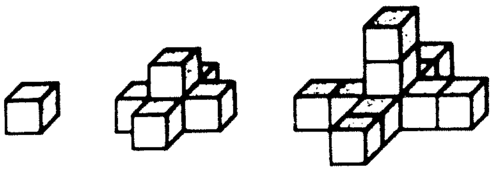
'Kubusjes stapelen'

Een aantal kubusjes (van gelijke grootte) is zo op een tafel gegroepeerd dat figuur (a) het vooraanzicht en figuur (b) het zijaanzicht van het bouwsel is.

(a)  (b) 

a) Hoeveel kubusjes kunnen er *hoogstens* gebruikt zijn?
b) En hoeveel kubusjes zijn er *minstens* gebruikt?

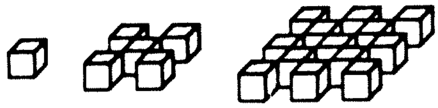
'Blokken stapelen'

(a) 

- Hoe zal het vierde gebouw eruit zien?
- Hoe ben je daar aangekomen? Kun je het ook anders aanpakken?
- Probeer 'in gedachten' het 20ste gebouw te zien.
  Hoeveel blokjes heb je daarvoor nodig?
- Herhaal deze activiteit met andere gebouwen, bijvoorbeeld:

(b) 

(c) 

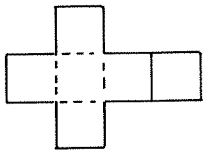
(d) 

Werkblad behorend bij artikel: Wiskunde leren en onderwijzen met behulp van puzzels en spelen.

Werkblad C

'Plakrandjes'

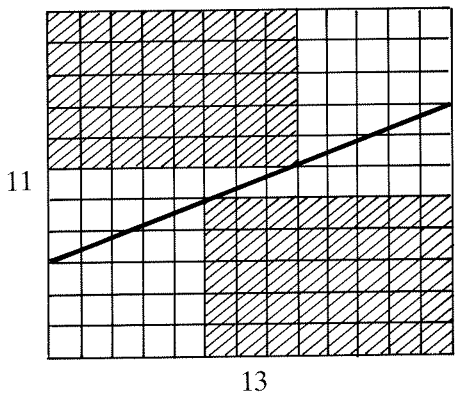
Van een kubus kan men elf verschillende bouwplaatjes (uitslagen) tekenen. Voorbeeld:



Hoeveel plakrandjes zijn er nodig om van zo'n bouwplaatje een kubus te maken?
Maakt het uit welk bouwplaatje je kiest?

'Een oppervlakte paradox'

Maak een nette tekening van onderstaande figuur op papier met ruitjes van 1 cm. Knip deze zes stukjes uit en gooi de twee gearceerde stukjes weg.



Zoals je kunt zien in de figuur is de oppervlakte van het overblijvende deel 63 cm (controleer dit).

1. Leg de vier overgebleven stukjes zo dat ze een vierkant vormen.
2. Wat is de oppervlakte van dit vierkant?
3. Leg de vier stukjes nu zo dat ze een rechthoek vormen met korte zijde 5 cm.
4. Wat is de oppervlakte van deze rechthoek?
5. Kun je verklaren hoe dit kan?

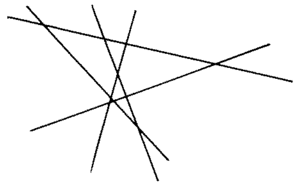
'Even-oneven'

Twee personen (de een noemen we EVEN en de ander ONEVEN) schrijven (onzichtbaar voor elkaar) een van de getallen 0, 1, ., ., 9 op. Ze laten dan de getallen zien. Als de som even is heeft de eerste persoon (EVEN) gewonnen. Als de som oneven is heeft de tweede persoon gewonnen.

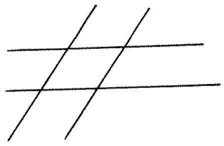
Werkblad behorend bij artikel: Wiskunde leren en onderwijzen met behulp van puzzels en spelen.

Werkblad D

'Rietjes-probleem'



- Hoeveel snijpunten kun je maximaal maken met vijf rietjes? En met n rietjes?
- Hoeveel gebieden kun je maximaal maken met vijf rietjes? En met n rietjes.



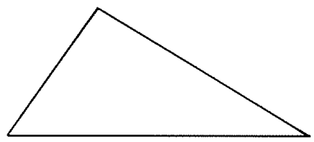
- Kun je met vier rietjes zes snijpunten maken? En 5? 4? 3? 0? 1? 2?
- Hoe zit dat bij vijf rietjes?

'De som is priem'

Om beurten plaatsen twee spelers bij één van de hoekpunten van een kubus één van de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
Hierbij gelden de volgende regels:
- er mag niet meer dan één getal per hoekpunt;
- elk getal mag maar één keer gebruikt worden;
- de som van twee getallen aan de uiteinden van een ribbe moet priem zijn.

De eerste speler die geen getal meer kan plaatsen is de verliezer.

'Verdelen'



- Hoeveel van deze driehoekjes zijn minstens nodig om een grotere driehoek van dezelfde vorm te maken?
- Met hoeveel van deze driehoekjes kan het vervolgens ook?
- ......

'Getallenvierkanten'

Vul in de onderstaande vierkantjes positieve gehele getallen in, zo dat kolommen en rijensommen de aangegeven waarden hebben. Hoeveel verschillende oplossingen zijn er voor elk van de opgaven? Kun je eenzelfde soort probleem maken dat precies één oplossing heeft?

		12
		17
15	14	

		12
		29
24	15	

'Getallenrij'

De eerste vijf getallen van een getallenrij zijn:
3 5 11 17 31
Wat zijn de volgende twee getallen van deze rij?

Werkblad behorend bij artikel: Wiskunde leren en onderwijzen met behulp van puzzels en spelen.

Werkblad E

'Place roll'

5	3	7	PRIEM
2	6	8	17
PRIEM	21	4	16
13	9	PRIEM	26

Spelregels:

1. Iedere speler gooit een dobbelsteen. De hoogste worp begint.
2. De spelers spelen om de beurt.
3. De beginnende speler gooit twee dobbelstenen. De twee gegooide getallen vormen een getal. Kies het grootste als tiental en het kleinste als eenheid.
   Voorbeeld:

    = 43

4. De speler mag nu een fiche zetten in een vakje met een getal dat deelbaar is op het gevormde getal.
5. Een dubbele worp (bijvoorbeeld 33 of 55) betekent: deze beurt overslaan.
6. Indien een speler een priemgetal vormt mag hij/zij een fiche op een priem-vakje zetten.
7. Als een vakje al bezet is, mag het niet door een ander gebruikt worden.
8. Winnaar is de speler die als eerste een rijtje van vier bezet heeft.

'Als eerste vijftien'

Schrijf de getallen 1, 2, 3, .., ..., 9 op negen kaartjes.
Ieder getal op een aparte kaart. Leg de kaartjes open neer. Om de beurt pakken de spelers een kaart. Degene die als eerste drie kaarten heeft met getallen waarvan de som 15 is, heeft gewonnen.

Is er een winnende strategie?
Doet dit spel je denken aan een ander spel, of een puzzel die je kent?

Werkblad behorend bij artikel: Wiskunde leren en onderwijzen met behulp van puzzels en spelen.

Werkblad F

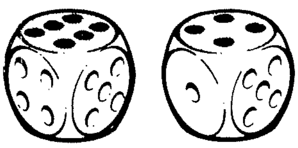
'Vier op een rij, het KGV'

12	20	6	30
9	4	15	3
1	10	5	12
6	30	20	2

Voor dit spel zijn nodig:
- bovenstaand rooster;
- twee dobbelstenen;
- schijfjes van verschillende kleur, die door de spelers op de hokjes kunnen worden gelegd.

Spelregels:
- De speler die het hoogste aantal ogen heeft geworpen, begint.
- Om beurten wordt van iedere worp het kleinste gemene veelvoud bepaald.

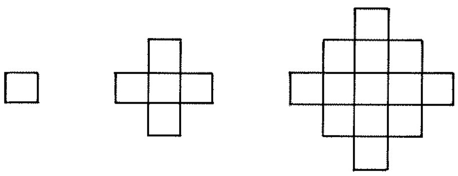
Bijvoorbeeld:



Het KGV is 12, want 12 is het kleinste getal dat zowel deelbaar is door 6 als door 4.
- De hokjes waarin de gevonden (c.q. berekende) getallen staan, worden met schijfjes bedekt.
- Als een speler een combinatie heeft gegooid die al door een tegenstander is geworpen, wordt het schijfje van de tegenstander vervangen.
- Twee keer achter elkaar gooien is niet toegestaan.
- De speler die er in slaagt *drie* schijfjes op een horizontale, verticale of diagonale rij te plaatsen, heeft gewonnen.

'Vierkantjes rij'

Met vierkantjes wordt de volgende rij gevormd:



? ?

1 5 13 ? ?

Hoeveel vierkantjes zijn er nodig voor de tiende figuur?

'Dobbelstenen spel'

A en B gooien elk met een dobbelsteen. Als de som van het aantal ogen dat gegooid is, even is, krijgt B een punt en anders A. Is dit spel eerlijk?

Werkblad behorend bij artikel: Wiskunde leren en onderwijzen met behulp van puzzels en spelen.